DEVOIR SURVEILLE 8

Partie 4

On se place dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et l'on considère $p \in \mathcal{L}(E)$ tel que $p^2 = p$.

1. Montrer que $E = \operatorname{Ker} p + \operatorname{Im} p$ (on pourra écrire $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x} - p(\overrightarrow{x}) + p(\overrightarrow{x})$).

2. **a.** Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $(\operatorname{Ker}(g \circ f) = \operatorname{Ker} f) \Rightarrow (\operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} f = \{0_E\})$.

b. En déduire $E = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Im} p$.

Exercice 2

On considère l'application

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \mid (x, y, z) \mapsto (x - y + z, -x + 3y - 2z, -2x + 6y - 4z)$$

et l'on note $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que f est linéaire.

2. Déterminer $\operatorname{Ker} f$ (on en donnera une base).

3. En déduire la dimension et une base de $\operatorname{Im} f$.

4. Montrer que $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Im} f$. A-t-on l'égalité ?

5. On pose $\overrightarrow{u_1} = \overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{u_2} = f(\overrightarrow{e_2})$ et $\overrightarrow{u_3} = f^2(\overrightarrow{e_2})$.

a. Montrer que $\mathcal{B}' = (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}$ dans la base $\mathcal{B}'$.

b. En utilisant la base $\mathcal{B}'$, montrer que $f^3 = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$.

6. On pose $g = f + 3\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$.

a. Pour $k \in \mathbb{N}$, déterminer g^k en fonction de $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$, f et f^2.

b. En calculant $(g - 3\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})^3$, montrer que g est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$ et exprimer g^{-1} à l'aide des puissances de g.

Exercice 3

On étudie la fonction

$$f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R} \mid x \mapsto \frac{\left(x^2 + 1\right) \arctan x}{x}$$

et l'on note C_f sa courbe représentative.

1. Déterminer la parité de f.

2. Déterminer le développement limité à l'ordre 3 de arctan en 0.

3. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 et que son prolongement (que l'on notera encore f) est dérivable en 0.

4. Déterminer l'équation de la tangente T_0 en 0 à C_f ainsi que la position relative de T_0 et de C_f au voisinage de 0.

5. Montrer que la fonction $u : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \mid x \mapsto \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$ est constante, et préciser la valeur de cette constante.

6. Montrer que C_f admet une asymptote Δ en $+\infty$. On donnera une équation de Δ et l'on précisera la position relative de Δ et d
au voisinage de $+\infty$.
On posera $h = \frac{1}{x}$ et l'on utilisera les questions 2 et 5.

7. Étudier les variations de la fonction $h : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \mid x \mapsto \arctan x + \frac{x}{x^2 - 1}$.

8. En déduire le tableau de variations de f.

9. Tracer l'allure de C_f en faisant apparaître les différents éléments obtenus.

Exo 1 et 2

Devoir de Mathématiques 8

samedi 17 mai 2014

Durée : 2 heures

Remarques générales :

- Vérifiez que le sujet comporte 3 pages numérotées de 1 à 3.
- Vous êtes invité à apporter une attention particulière à la présentation et à la rédaction ; les copies peu lisibles ou mal présentées seront sanctionnées.
- Si au cours de l'épreuve vous repérez ce qui semble être une erreur d'énoncé, vous le signalerez sur votre copie et poursuivrez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.

L'utilisation d'une calculatrice ou d'un téléphone portable est interdite.

Exercice 1. Algèbre linéaire (mais pas que) dans $\mathbb{R}_4[X]$

L'objet de l'exercice est entre autre l'étude des deux sous-ensembles suivants du $\mathbb{R}-$ espace vectoriel $\mathbb{R}_4[X]$:

$$\begin{aligned} F &= \left\{\alpha\, X^4 + (\alpha+\beta)\, X + \beta \mid (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2\right\}. \\ G &= \{P \in \mathbb{R}_4[X] \mid P'(1) = 0\} \end{aligned}$$

1. Soient $Q \in F$ quelconque et $A = X^4 + 4\,X + 3$.
   (a) Montrer que Q est divisible par $X + 1$.
   (b) Décomposer A en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ puis dans $\mathbb{C}[X]$.
2. Donner la base canonique de $\mathbb{R}_4[X]$ et la dimension de $\mathbb{R}_4X]$.
3. *Propriétés de F.*
   (a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[X]$.
   (b) Déterminer une base de F. En déduire $\dim(F)$.
4. *Propriétés de G.*
   (a) Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[X]$ et justifier que $\dim(G) \leq 4$.
   (b) Montrer que la famille $\left(1, (X-1)^2, (X-1)^3, (X-1)^4\right)$ est une famille libre et que chaque polynôme de la famille appartient à G.
   (c) En déduire que $G = \mathrm{Vect}(1, (X-1)^2, (X-1)^3, (X-1)^4)$. Que vaut $\dim(G)$?
5. *Propriétés de $F \cap G$*
   (a) Montrer que $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[X]$.
   (b) Justifier à l'aide de la formule de Grassmann que $\dim(F \cap G) \geq 1$.
   (c) Déterminer une base de $F \cap G$.

Exo 1 et 2

3. Retard moyen du perdant sur le gagnant.

(a) Vérifier à partir de l'égalité précédente que pour $k \in \{0, \dots, n-2\}$,

$$2(k+1)\mathbb{P}(X_n = k+1) = (n+k)\mathbb{P}(X_n = k).$$

(b) En sommant cette relation sur toutes les valeurs de k, en déduire que

$$\mathbb{E}(X_n) = n - (2n-1)\mathbb{P}(X_n = n-1).$$

(c) On note $Y_n = n - X_n$. La variable Y_n représente le nombre de points d'avance du **vainqueur** sur le **perdant** à l'issue du match.
Exprimer $\mathbb{E}(Y_n)$ en utilisant les questions **2.**(b) et **3.**(b).

(d) En admettant la *formule de Stirling* :

$$n! \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

montrer que

$$\mathbb{E}(Y_n) \underset{n \to +\infty}{\sim} 2\sqrt{\frac{n}{\pi}}.$$

On pourra commencer par montrer que $\mathbb{E}(Y_{n+1}) \underset{n \to +\infty}{\sim} 2\sqrt{\frac{n}{\pi}}$.

EXERCICE 3 - Étude d'une fonction (10 points)

On cherche à tracer l'allure du graphe $\mathcal{C}_f$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$\boxed{f(x) = (x+1)e^{1/x}}$$

1. Étude en 0.

(a) Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$. Que peut-on en déduire concernant $\mathcal{C}_f$?

(b) Calculer $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$.

(c) On note désormais f le prolongement par continuité de f à gauche en 0. Montrer que f est dérivable à gauche en 0 et déterminer $f'_g(0)$. Qu'en déduit-on pour $\mathcal{C}_f$?

2. Variations

(a) Calculer $f'(x)$ pour $x \neq 0$. Pour quelles valeurs de x a t-on $f'(x) \geq 0$?

(b) Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ puis établir le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
Pour les valeurs de f en ses extrema, ne pas chercher de valeur approchée mais donner néanmoins le signe.

Exo 3 et 4

(c) Déterminer le(s) point(s) d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec (Ox).

3. Asymptote.

A l'aide d'un $DL_2(0)$ de l'exponentielle en 0, établir l'existence d'une asymptote oblique Δ à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ et $-\infty$. Préciser l'équation de Δ ainsi que la position relative de Δ et $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

4. Tracer l'allure de $\mathcal{C}_f$.

Tous les résultats de l'exercice doivent apparaître clairement sur votre graphique.

EXERCICE 4 - Analyse - questions courtes (6 points)

Les trois questions sont indépendantes.

1. Déterminer le DL à l'ordre 3 en 1 de

$$u(x) = x^{1-x}$$

2. Déterminer un équivalent simple puis la limite en 0^+ de

$$v(x) = \frac{x^3}{\ln(1+x^2) - x\sin x}$$

3. Déterminer un équivalent simple puis la limite en 0 de

$$w(x) = \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{\sin x}$$

EXERCICE 5 - Étude d'un point singulier (5 points)

Soit g définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\setminus \{0\}$ par

$$\boxed{g(x) = (\cos x)^{\frac{1}{x}}}$$

On note $\mathcal{C}_g$ la courbe représentative de g.

1. Montrer que

$$g(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + o(x^2)$$

2. Prolongement de g

(a) Montrer que g est prolongeable par continuité en 0. Le prolongement sera toujours noté g.

(b) Montrer que g est dérivable en 0 et déterminer $g'(0)$.

(c) Préciser l'équation de la tangente T à $\mathcal{C}_g$ en 0, puis préciser la position relative de T et $\mathcal{C}_g$ au voisinage de 0.

DS 5

La qualité de la rédaction fait partie des éléments évalués.
Merci de commencer chaque exercice sur une nouvelle page et ***d'encadrer vos résultats****.*
L'usage de la calculatrice est interdit.

Exercice 1

On considère l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \frac{x}{e^x-1} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

1. Montrer que f est C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.
3. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
4. Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour $x > 0$.
5. On considère $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \mid x \mapsto \left(1 - \sqrt{x}\right) e^{\sqrt{x}}$.
   - **a.** Justifier que φ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.
   - **b.** Montrer que φ est C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et donner $\varphi'(0)$.
   - **c.** En déduire que $\frac{e^{\sqrt{x}}-1-\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}}{x} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} -\frac{1}{2}$.
   - **d.** En déduire la limite de $\frac{e^x-1-xe^x}{x^2}$ quand $x \to 0^+$.
6. Déduire de ce qui précède que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et préciser $f'(0)$.
7. Déterminer le signe de f' sur $\mathbb{R}_+^*$. *On pourra passer par l'étude de $g : x \to e^x - xe^x - 1$.*
8. Dresser le tableau de variations de f en incluant les limites aux bornes.

Exercice 2

Un joueur décide de jouer aux machines à sous. Il va jouer sur deux machines $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ qui sont réglées de la façon suivante :

- la probabilité de gagner sur la machine $\mathcal{A}$ est de $\frac{1}{5}$;
- la probabilité de gagner sur la machine $\mathcal{B}$ est de $\frac{1}{10}$.

Comme le joueur soupçonne les machines d'avoir des réglages différents mais ne sait pas laquelle est la plus favorable, il décide d'adopter la stratégie suivante :

- il commence par choisir une machine au hasard ;
- après chaque partie, il change de machine s'il vient de perdre, il rejoue sur la même machine s'il vient de gagner.

On définit pour tout entier $k \geqslant 1$ les événements suivants :

- G_k : "Le joueur gagne la k-ème partie."
- A_k : "La k-ème partie se déroule sur la machine $\mathcal{A}$.

Partie 1 : calculs élémentaires

1. Déterminer la probabilité de gagner la première partie.
2. Déterminer la probabilité que les trois premières parties se fassent toutes sur la machine $\mathcal{A}$.
3. Déterminer la probabilité de gagner la deuxième partie.
4. Sachant que la deuxième partie a été gagnée, quelle est la probabilité que la première partoe ait eu lieu sur la machine $\mathcal{A}$?

Partie 2 : probabilité de gagner la k-ème partie

Soit $k \in \mathbb{N}$.

1. Exprimer $\mathbb{P}(G_k)$ en fonction de $\mathbb{P}(A_k)$.

Exo 1

CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLE 8

1. Soit $x \in E$, on a $x = \underbrace{x - p(x)}_{u} + \underbrace{p(x)}_{v}$. Or $p(u) = p(x - p(x)) = p(x) - p(p(x)) = 0_E$ car $p \circ p = p$, donc $u \in \operatorname{Ker} p$ et $v = p(x) \in$

   Donc $E \subset \operatorname{Ker} p + \operatorname{Im} p$, et comme l'autre inclusion est évidente, $\boxed{E = \operatorname{Ker} p + \operatorname{Im} p.}$

2. **a.** Supposons $\operatorname{Ker}(g \circ f) = \operatorname{Ker} f$. Soit $x \in \operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} f$. On a $x = f(x')$ pour un certain x' de E car $x \in \operatorname{Im} f$ et g $g(f(x')) = 0_E$ car $x \in \operatorname{Ker} g$. Donc $x' \in \operatorname{Ker}(g \circ f)$, or $\operatorname{Ker}(g \circ f) = \operatorname{Ker} f$, donc $x' \in \operatorname{Ker} f$ et $f(x') = 0_E$, *i.e.* $x = 0_E$. $\operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} f \subset \{0_E\}$. L'autre inclusion est évidente, donc $\boxed{(\operatorname{Ker}(g \circ f) = \operatorname{Ker} f) \Rightarrow (\operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} f = \{0_E\}).}$

   b. On a $\operatorname{Ker}(p \circ p) = \operatorname{Ker} p$ car $p \circ p = p$, donc d'après la question précédente $\operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Im} p = \{0_E\}$. Comme de $E = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p$, on a par définition $\boxed{E = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Im} p.}$

EXERCICE 2

1. Soient $u = (x, y, z)$ et $v = (x', y', z')$ dans $\mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} f(\lambda u + v) &= f(\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z') \\ &= (\lambda x + x' - (\lambda y + y') + (\lambda z + z'), -(\lambda x + x') + 3(\lambda y + y') - 2(\lambda z + z'), -2(\lambda x + x'), +6(\lambda y + y') - 4(\lambda z + z')) \\ &= \lambda(x - y + z, -x + 3y - 2z, -2x + 6y - 4z) + (x' - y' + z', -x' + 3y' - 2z', -2x' + 6y' - 4z') \\ &= \lambda f(u) + f(v) \end{aligned}$$

   Donc $\boxed{f \text{ est linéaire.}}$

2. On résout le système $f(x, y, z) = (0, 0, 0)$, on obtient sous forme matricielle :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -4 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow 2L_1 + L_2 \\ \\ L_3 \leftarrow 2L_3 - L_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

   On obtient donc $\boxed{\operatorname{Ker} f = \{(-\frac{1}{2}z, \frac{1}{2}z, z),\ z \in \mathbb{R}\} = \operatorname{Vect}((-1, 1, 2)).}$

3. On a donc (rang) : $\operatorname{rg} f = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \operatorname{Ker} f = 2$. On a $f(e_1) = (1, -1, -2)$ et $f(e_2) = (-1, 3, 6)$. Ces deux vecteurs sont dans en ne sont pas colinéaires, et comme $\operatorname{rg} f = 2$, ils forment donc une base de $\operatorname{Im} f$. Donc $\boxed{\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}((1, -1, -2), (-1, 3, 6)).}$

4. On remarque que $(-1, 1, 2) = -f(e_1)$, donc $(-1, 1, 2) \in \operatorname{Im} f$, donc $\operatorname{Vect}(-1, 1, 2) \subset \operatorname{Im} f$, *i.e.* $\boxed{\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Im} f.}$. On a $\dim \operatorname{Ke}$ $\dim \operatorname{Im} f$, donc $\boxed{\operatorname{Ker} f \neq \operatorname{Im} f.}$

5. **a.** On a $u_1 = (0, 1, 0)$, $u_2 = f(0, 1, 0) = (-1, 3, 6)$ et $u_3 = f(-1, 3, 6) = (2, -2, -4)$. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on résout $\alpha u_1 + \beta u_2 +$ (x, y, z) :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 2 & x \\ 1 & 3 & -2 & y \\ 0 & 6 & -4 & z \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftrightarrow L_2 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & y \\ 0 & -1 & 2 & x \\ 0 & 6 & -4 & z \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 + 6L_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & y \\ 0 & -1 & 2 & x \\ 0 & 0 & 8 & 6x + z \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow 4L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow 4L_2 - L_3 \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 12 & 0 & 6x + 4y + z \\ 0 & -4 & 0 & -2x - z \\ 0 & 0 & 8 & 6x + z \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + 3L_2 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 0 & 4y - 2z \\ 0 & -4 & 0 & -2x - z \\ 0 & 0 & 8 & 6x + z \end{array}\right)$$

Exo 1 et 2

et donc finalement $\begin{cases}\alpha = y - \frac{1}{2}z \\ \beta = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}z \\ \gamma = \frac{3}{4}x + \frac{1}{8}z\end{cases}$.

La solution étant unique, $\boxed{\mathscr{B}' \text{ est une base de } \mathbb{R}^3}$, et l'on a $\boxed{e_1 = \frac{1}{2}u_2 + \frac{3}{4}u_3,\ e_2 = u_1 \text{ et } e_3 = -\frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{4}u_2 + \frac{1}{8}u_3.}$

b. On a $f(u_3) = 0_{\mathbb{R}^3}$ par un calcul immédiat. On en déduit $f^3(u_1) = f(f^2(u_1)) = f(u_3) = 0_{\mathbb{R}^3}$, $f^3(u_2) = f(f(u_3)) = f(0_{\mathbb{R}^3}) = 0_{\mathbb{R}^3}$ et $f^3(u_3) = f^2(f(u_3)) = f^2(0_{\mathbb{R}^3}) = 0_{\mathbb{R}^3}$. L'endomorphisme f^3 coïncide avec l'application nulle sur la base $\mathscr{B}'$, donc $\boxed{f^3 = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}.}$

6. a. On note Id pour $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$ et l'on considère $k \in \mathbb{N}$. On a $f \circ 3\mathrm{Id} = 3\mathrm{Id} \circ f = 3f$, on peut donc appliquer le binôme de Newton, en remarquant que $f^i = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$ pour $i \geqslant 3$:

$$\begin{aligned}(f + 3\mathrm{Id})^k &= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f^i \circ (3\mathrm{Id})^{k-i} \\ &= \sum_{i=0}^{2} \binom{k}{i} 3^{k-i} f^i + \sum_{i=3}^{k} \underbrace{f^i \circ (3\mathrm{Id})^{k-i}}_{=0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}} \\ &= 3^k \mathrm{Id} + k3^{k-1} f + \frac{k(k-1)}{2} 3^{k-2} f^2 \qquad \text{si } k \geqslant 2\end{aligned}$$

On vérifie que la formule trouvée reste valable pour $k = 0$ et $k = 1$, on a finalement $\boxed{g^k = 3^{k-2}(9\mathrm{Id} + 3kf + \frac{k(k-1)}{2} f^2.}$

b. On a d'une part $(g - 3\mathrm{Id})^3 = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$ et d'autre part, comme g et $-3\mathrm{Id}$ commutent, $(g - 3\mathrm{Id})^3 = g^3 - 9g^2 + 27g - 27\mathrm{Id}$, d'où $27\mathrm{Id} = g^3 - 9g^2 + 27g$ et donc $\mathrm{Id} = \left(\frac{1}{27}(g^2 - 9g + 27\mathrm{Id})\right) \circ g = g \circ \left(\frac{1}{27}(g^2 - 9g + 27\mathrm{Id})\right)$.

Donc $\boxed{g \text{ est un automorphisme et } g^{-1} = \frac{1}{27}(g^2 - 9g + 27\mathrm{Id}).}$

Exercice 3

On étudie la fonction

$$f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R} \mid x \mapsto \frac{\left(x^2 + 1\right) \arctan x}{x}$$

et l'on note C_f sa courbe représentative.

1. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On a $f(-x) = \frac{((-x)^2+1)\arctan(-x)}{-x} = \frac{-\left(x^2+1\right)\arctan x}{-x} = f(x)$, donc $\boxed{f \text{ est paire.}}$
2. Quand $x \to 0$, on a $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + \mathrm{o}(x^2)$, d'où en «primitivant» $\arctan x = \arctan 0 + x - \frac{x^3}{3} + \mathrm{o}(x^3)$, *i.e.* $\boxed{\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \mathrm{o}\left(x^3\right).}$
3. On en déduit, pour $x \neq 0$, x au voisinage de 0, $f(x) = \frac{1}{x}\left((x^2 + 1)\left(x - \frac{1}{3}x^3 + \mathrm{o}(x^3)\right)\right) = \frac{1}{x}\left(x + \frac{2}{3}x^3 + \mathrm{o}(x^3)\right) = 1 + \frac{2}{3}x^2 + \mathrm{o}(x^2)$.
   On a donc $f \underset{0}{\to} 1$, $\boxed{\text{on peut donc prolonger } f \text{ par continuité en 0 en posant } f(0) = 1}$, et on a alors pour la fonction f ainsi prolongée le $DL_2(0)$ suivant :
   $$f(x) = 1 + \frac{2}{3}x^2 + \mathrm{o}_{x\to 0}(x^2)$$
   On en déduit que $\boxed{f \text{ est dérivable en 0 et que } f'(0) = 0.}$
4. Toujours à l'aide du DL ci-dessus, on a $\boxed{T_0 : y = 1 \text{ et } C_f \text{ au-dessus de } T_0 \text{ au voisinage de } 0}$ (car $\frac{2}{3}x^2 \geqslant 0$ au voisinage de 0).
5. u est dérivable comme somme et composée de fonctions dérivables et $\forall x > 0,\ u'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2}\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} = 0$, donc u est constante sur l'intervalle $]0, +\infty[$. De plus, quand $x \to +\infty$, on a $u(x) \to \frac{\pi}{2}$ (pas d'indétermination), donc $\boxed{\forall x > 0,\ u(x) = \frac{\pi}{2}.}$
6. Pour $x > 0$, on a $f(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{x}\right) = \frac{x\pi}{2} + \frac{\pi}{2x} - \underbrace{\left(x + \frac{1}{x}\right)\arctan\frac{1}{x}}_{v(x)}$.
   Posons $h = \frac{1}{x}$, on a alors $h \to 0$ quand $x \to +\infty$ et $\arctan\frac{1}{x} = \arctan h = h - \frac{h^3}{3} + \mathrm{o}(h^3)$, donc $\arctan\frac{1}{x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{3x^3} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x^3}\right)$.
   On a donc $\left(x + \frac{1}{x}\right)\arctan\frac{1}{x} = 1 - \frac{1}{3x^2} + \frac{1}{x^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right) = 1 + \frac{2}{3x^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)$,
   d'où $f(x) = \frac{\pi}{2}x - 1 + \underbrace{\frac{\pi}{2x} - \frac{2}{3x^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)}_{d(x)}$. On a $d(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $d(x) \geqslant 0$ pour x au voisinage de $+\infty$.
   Donc $\boxed{C_f \text{ a une asymptote } \Delta : y = \frac{\pi}{2}x - 1 \text{ en } +\infty \text{ et } C_f \text{ est au-dessus de cette asymptote au voisinage de } +\infty.}$

7. La fonction h est définie sur $[0,1[\cup]1,+\infty[$ et elle est $C\infty$ sur chacun de ces intervalles. Pour $x \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$, on a $h'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{x^2-1-2x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2} = \frac{(1-x^2)^2-(1+x^2)^2}{(1+x^2)(1-x^2)^2} = \frac{1}{(1+x^2)(1-x^2)^2} \times -4x^2 < 0$.
On obtient les variations suivantes :

x	0		1		$+\infty$
$h(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$\frac{\pi}{2}$

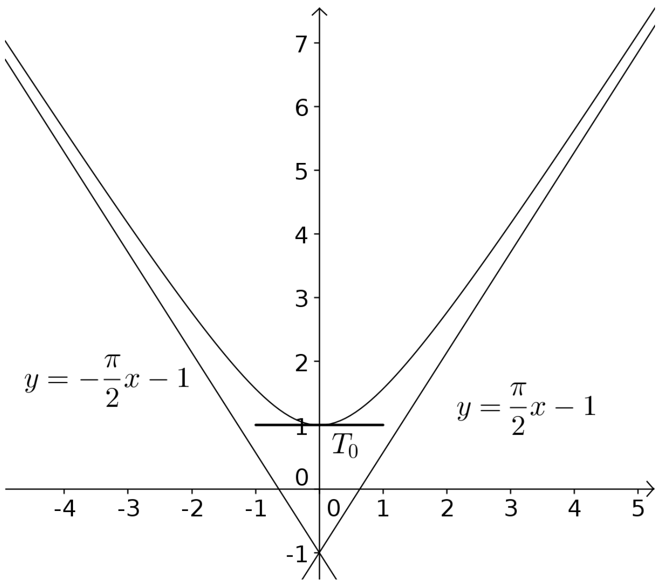
8. Pour $x \geqslant 0$, on a $f'(x) = \frac{(2x\arctan x+1)x-(x^2+1)\arctan x}{x^2} = \frac{(x^2-1)\arctan x+x}{x^2}$.
Pour $x > 0$, $x \neq 1$, on a donc $f'(x) = \frac{x^2-1}{x^2}h(x)$. D'après la question précédente, on a donc le tableau de signes suivant :

x	0		1		$+\infty$
$\frac{x^2-1}{x^2}$	||	$-$	0	$+$	
$h(x)$	0	$-$	||	$+$	
$f'(x)$	0	$+$		$+$	

f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, on connaît déjà sa limite en $+\infty$ grâce à son asymptote et l'on peut déduire ses variations sur $\mathbb{R}_-$ par parité :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

9.



(d) En utilisant la formule de Stirling, 1 pt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y_{n+1}) &\underset{n\to\infty}{\sim} (2n) \times \frac{\sqrt{4\pi n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{\sqrt{2\pi n}^2\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}} \times \frac{1}{4^n} \\ &= 2\sqrt{\frac{n}{\pi}}\end{aligned}$$

Par conséquent, en remplaçant dans un premier temps n par $n-1$ dans ce résultat, on obtient :

$$\mathbb{E}(Y_n) \underset{n\to\infty}{\sim} 2\sqrt{\frac{n-1}{\pi}} \underset{n\to\infty}{\sim} 2\sqrt{\frac{n}{\pi}}.$$

Exercice 3 *(10 pts)*

1.

(a) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ donc par composition et produit, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$. On en déduit que $\mathcal{C}_f$ possède une asymptote verticale d'équation $x=0$. 1 pt

(b) $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ donc par composition et produit, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0$. 0,5 p

(c) On a posé $f(0)=0$. On a alors 1,5 p

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{x+1}{x}e^{1/x}$$

Or $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x}e^{1/x} = \lim\limits_{t\to -} te^{-t} = 0$. On a donc $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = 0$. Autrement dit f est dérivable à gauche en 0 et $f_g'(0)=0$. La courbe $\mathcal{C}_f$ possède une tangente horizontale à gauche au point de coordonnées $(0,0)$.

2.

(a) f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour $x \neq 0$ on a 2 pt

$$f'(x) = e^{1/x} - \frac{1}{x^2}(x+1)e^{1/x} = \frac{x^2-x-1}{x^2}e^{1/x}.$$

$f'(x)$ est donc du signe de x^2-x-1, qui possède deux racines $r_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $r_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Par conséquent :

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty; r_1\right[\cup \left]r_2; +\infty\right[.$$

(b) On a par composition et produit de limites : 1 pt

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

D'où le tableau de variations (ne figure pas dans ce corrigé). $f(x)$ étant du signe de $(x+1)$ on a $f(r_1) > 0$ et $f(r_2) > 0$ (puisque $\sqrt{5} < 3$).

Exo 3 et 4

(c) On résout $f(x) = 0 \Leftrightarrow x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ donc le seul point d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec (Ox) est $(-1, 0)$. 1 pt

3. Quand $x \to \pm\infty$, on pose $h = 1/x$ (h tend vers 0). On a alors 2 pt

$$\begin{aligned} f(1/h) &\underset{h\to 0}{=} \left(\frac{1}{h}+1\right)e^h \\ &= \frac{1}{h}(1+h)\left(1+h+h^2/2+o(h^2)\right) \\ &= \frac{1}{h}(1+2h+3h^2/2+o(h^2)) \end{aligned}$$

En remplaçant h par $1/x$ on obtient

$$f(x) \underset{x\to\pm\infty}{=} x+2+\frac{3}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right).$$

On a donc $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)-(x+2) = 0$ donc $\mathcal{C}_f$ possède une asymptote oblique $\Delta : y = x+2$ en $\pm\infty$.
Puisque $f(x)-(x+2) \underset{x\to\pm\infty}{\sim} \frac{3}{2x}$, La courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de Δ en $+\infty$ et en dessous de Δ en $-\infty$.
4. Faire apparaître les asymptotes (oblique et verticale), les extrema, et la tangente horizontale à l'origine (la courbe ne figure pas dans ce corrigé) 1 pt

$\boxed{\text{EXERCICE 4}}$ *(6 pts)*

1. On pose $x = 1+h$ (soit $h = x-1$). On a alors 2 pt

$$\begin{aligned} x^{1-x} &= (1+h)^{-h} \\ &= \exp\left(-h\ln(1+h)\right) \\ &\underset{h\to 0}{=} \exp(-h(h-h^2/2+o(h^2)) \\ &\underset{h\to 0}{=} exp(-h^2+h^3/2+o(h^3)) \\ &\underset{h\to 0}{=} 1-h^2+o(h^3) \end{aligned}$$

Par conséquent

$$u(x) = 1-(x-1)^2+o((x-1)^3).$$

2. On a 2 pt

$$\ln(1+x^2)-x\sin x = x^2-x^4/2-(x^2-x^4/6)+o(x^4)$$

donc $\ln(1+x^2)-x\sin x \underset{x\to 0}{\sim} -x^4/3$. Au final,

$$v(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^3}{-x^4/3} = \frac{-3}{x}$$

et en particulier $\lim_{x\to 0^+} v(x) = \lim_{x\to 0^+} (-3/x) = -\infty$.

3. On a $w(x) = \frac{\sin x - \ln(1+x)}{\ln(1+x)\sin x}$. 2 pt

Pour le numérateur, $\sin x - \ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - (x - x^2/2) + o(x^2) \underset{x\to 0}{\sim} x^2/2$.

Pour le dénominateur, $\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x$ et $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$. Au final,

$$w(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2/2}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

En particulier $\lim_{x\to 0} w(x) = 1/2$.

$\boxed{\text{Exercice 5}}$ *(5 pts)*

1. On a 2 pt

$$\begin{aligned}
g(x) &= \exp\left(\frac{\ln(\cos x)}{x}\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} \exp\left(\frac{\ln(1 - x^2/2 + o(x^3))}{x}\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} \exp\left(\frac{-x^2/2 + o(x^3)}{x}\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} \exp\left(-\frac{x}{2} + o(x^2)\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\left(-\frac{x}{2}\right)^2 \\
&\underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8}
\end{aligned}$$

2. Prolongement de g

(a) Le résultat de la question 1 donne en particulier $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$ donc g est prolongeable par continuité en 0 en posant $g(0) = 1$. 1 pt

(b) Le résultat de la question 1 donne aussi 1 pt

$$\frac{g(x) - g(0)}{x} \underset{x\to 0}{=} -\frac{1}{2} + \frac{x}{8} + o(x),$$

et par conséquent $\lim_{x\to 0} (g(x) - g(0))/x = -1/2$, autrement dit g est dérivable en 0 et $g'(0) = -1/2$.

(c) T a donc pour équation $y = 1 - x/2$ et $g(x) - (1 - x/2) \underset{x\to 0}{\sim} x^2/8$. Ainsi $g(x) - (1 - x/2)$ est positif (et donc $\mathcal{C}_g$ est au dessus de T) au voisinage de 0. 1 pt

DS 5 – Correction

Exercice 1

1. $x \mapsto x$ et $x \mapsto e^x - 1$ sont C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$, et de plus $e^x - 1 > 0$ si $x > 0$. Donc (quotient), $\boxed{f \text{ est } C^\infty \text{ sur } \mathbb{R}_+^*.}$
2. On sait que $e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$, d'où $\frac{e^x-1}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$ et donc $f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1 = f(0)$. Donc f est continue en 0, donc d'après la question précédente $\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+.}$
3. En $+\infty$, on a $e^x - 1 \sim e^x$ donc $f(x) \sim \frac{x}{e^x}$. Or $\frac{x}{e^x} \to 0$, donc $\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$.
4. Pour $x > 0$, on a $\boxed{f'(x) = \frac{e^x-1-xe^x}{(e^x-1)^2}.}$
5. **a.** $\boxed{\varphi \text{ est continue sur son ensemble de définition } (\mathbb{R}_+)}$ comme somme, composée et produit de fonctions continues.
   De plus, $x \mapsto \sqrt{x}$ est C^1 sur $]0,+\infty[$ à valeurs dans $]0,+\infty[$ et exp est C^1 sur $\mathbb{R}$, donc par composition $x \mapsto e^{\sqrt{x}}$ est C^1 sur $]0,+\infty[$ et par produit $\boxed{\varphi \text{ est } C^1 \text{ sur }]0,+\infty[.}$

   b. Pour $x > 0$, on a $\varphi'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}} + \left(1 - \sqrt{x}\right)\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}} = -\frac{1}{2}e^{\sqrt{x}}$. On a donc $\varphi'(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} -\frac{1}{2}$, et comme φ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ on en déduit (prolongement C^1) que $\boxed{\varphi \text{ est } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+ \text{ et } \varphi'(0) = -\frac{1}{2}.}$

   c. On a donc $\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} -\frac{1}{2}$, or pour $x > 0$ on a $\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x} = \frac{(1-\sqrt{x})e^{\sqrt{x}}-1}{x} = \frac{e^{\sqrt{x}}-1-\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}}{x}$, d'où $\boxed{\frac{e^{\sqrt{x}}-1-\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}}{x} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} -\frac{1}{2}.}$

   d. On a $x^2 \to 0^+$ quand $x \to 0^+$ et $\frac{e^{\sqrt{X}}-1-\sqrt{X}e^{\sqrt{X}}}{X} \underset{X\to 0^+}{\longrightarrow} -\frac{1}{2}$, d'où $\frac{e^{\sqrt{x^2}}-1-\sqrt{x^2}e^{\sqrt{x^2}}}{x^2} = \boxed{\frac{e^x-1-xe^x}{x^2} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} -\frac{1}{2}.}$
6. En 0^+, on a $e^x - 1 \sim x$, d'où $(e^x-1)^2 \sim x^2$ et $f'(x) \sim \frac{e^x-1-xe^x}{x^2}$. D'après la question précédente, on a donc $f'(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} -\frac{1}{2}$. Comme de plus f est C^0 sur $\mathbb{R}_+$ et C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit $\boxed{f \text{ de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+ \text{ et } f'(0) = -\frac{1}{2}.}$
7. On a $f'(x) = \frac{e^x-1-xe^x}{(e^x-1)^2}$ du signe de $g(x) = e^x - 1 - xe^x$ pour $x > 0$. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ de dérivée $g' : x \mapsto -xe^x$. On a $g(0) = 0$, $g'(0) = 0$ et $g'(x) < 0$ pour $x > 0$, on en déduit $g(x) < 0$ si $x > 0$. Donc $\boxed{f'(x) < 0 \text{ pour } x > 0.}$
8. On obtient

x	0	$+\infty$
$f(x)$	1 $\searrow$	0

Exercice 2

Partie 1 : calculs élémentaires

1. On applique les probabilités totales avec le système complet d'événements $A_1, \overline{A_1}$, on obtient $\mathbb{P}(G_1) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(G_1) + \mathbb{P}(\overline{A}_1)\mathbb{P}_{\overline{A}_1}(G_1) = \frac{1}{2}\frac{1}{5} + \frac{1}{2}\frac{1}{10} = \frac{3}{20}$. $\boxed{\text{La probabilité de gagner la première partie est donc de } \frac{3}{20}.}$
2. On applique la formule des probabilités composées : $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(A_2)\mathbb{P}(A_1 \cap A_2)(A_3)$.
   D'après l'énoncé, on a $\mathbb{P}_{A_1}(A_2) = \mathbb{P}_{A_1}(G_1) = \frac{1}{5}$, et de même $\mathbb{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) = \frac{1}{5}$.
   On obtient donc $\boxed{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{50}.}$
3. On a $\mathbb{P}(G_2) = \mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}_{A_2}(G_2) + \mathbb{P}(\overline{A}_2)\mathbb{P}_{\overline{A_2}}(G_2) = \frac{1}{5}\mathbb{P}(A_2) + \frac{1}{10}(1 - \mathbb{P}(A_2)) = \frac{1}{10}(1 + \mathbb{P}(A_2))$.
   Or $P(A_2) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(G_1) + \mathbb{P}(\overline{A}_1)\mathbb{P}_{\overline{A}_1}(\overline{G}_1) = \frac{1}{2}\frac{1}{5} + \frac{1}{2}\frac{9}{10} = \frac{11}{20}$.
   Finalement, $\boxed{\mathbb{P}(G_2) = \frac{31}{200}.}$

Exo 1