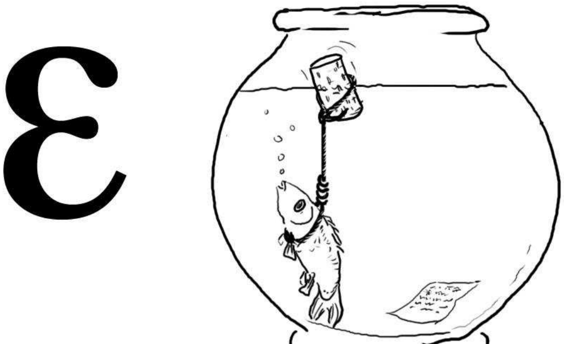
DEVOIR SURVEILLÉ 8

(durée : 2 h 00)



« La lune n'éclaire pas autant que le soleil.
Ça, c'est curieux tout de même.
Il serait plus intelligent d'installer la lumière
la plus forte pendant la nuit plutôt que pendant le jour,
puisqu'à ce moment là, on y voit de toute façon... »

Terry Pratchett

Recommandations

Rédigez vos réponses dans un français correct. Terminez chaque résolution d'exercice par une conclusion $\boxed{\textit{encadrée}}$ *ou soulignée. Laissez une marge au correcteur.*

L'exercice et le problème sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre. Dans un exercice avec plusieurs questions, on pourra, si besoin est, admettre le résultat d'une question pour répondre aux suivantes.

La calculatrice est autorisée.

EXERCICE

(Adaptation de l'Agro 2009)

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & -4 & -2 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer l'image et le noyau de l'endomorphisme $f+2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$. On note $\overrightarrow{e_1}$ un vecteur directeur de la droite $\mathrm{Ker}(f+2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$.
2. Déterminer l'image et le noyau de l'endomorphisme $f-\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$. On note $(\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3})$ une base du plan $\mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$.
3. Démontrer que la famille $\mathscr{B}=(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3})$ est un base de $\mathbb{R}^3$. Que peut-on en déduire pour les sous-espaces $\mathrm{Ker}(f+2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ et $\mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$?
4. Justifier que la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ est donnée par

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. On entame un raisonnement par l'absurde en supposant qu'il existe un endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ tel que

$$g\circ g = f.$$

   a) Démontrer que $f\circ g = g\circ f$.
   b) Démontrer que $f\big(g(\overrightarrow{e_1})\big) = -2g(\overrightarrow{e_1})$. En déduire que $g(\overrightarrow{e_1})\in\mathrm{Ker}(f+2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ puis que $g(\overrightarrow{e_1})$ et $\overrightarrow{e_1}$ sont colinéaires.
   c) Soit $\overrightarrow{u}\in\mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$. Démontrer que $f\big(g(\overrightarrow{u})\big) = g(\overrightarrow{u})$ et en déduire que $g(\overrightarrow{u})$ appartient à $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3})$.
   d) En déduire qu'il existe des nombres réels a,x,y,z,t tels que

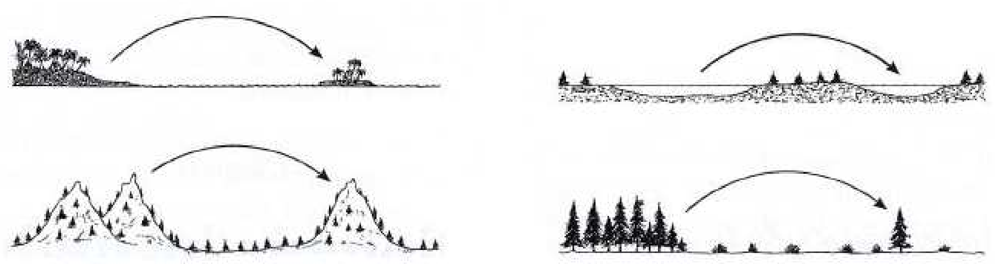
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & x & y \\ 0 & z & t \end{pmatrix}.$$

   e) Démontrer que $\big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g)\big)^2 = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ et en déduire que $a^2=-2$. Conclure.

PROBLEME

(Biogéographie insulaire)

En biogéographie, une métapopulation est un groupe de sous-populations d'une même espèce animale réparties spatialement en îlots. On rencontre ce type de distribution discontinue lorsque les habitats favorables et défavorables s'alternent. C'est par exemple le cas dans les écosystèmes insulaires mais aussi lorsque l'espèce vit dans des habitats isolés (montagnes, lacs, forêts, ...).



Dans ce type d'écosystème, les animaux risquent leur vie s'ils essaient de passer d'un endroit à l'autre, si bien que les mouvements se réduisent. L'isolement qui en résulte favorise alors l'extinction des sous-populations. Ce phénomène est toutefois compensé par une recolonisation périodique, par dispersion depuis les îlots voisins.

Pour modéliser l'évolution d'une métapopulation au cours du temps t, on note p la proportion d'îlots occupés. On émet en outre les hypothèses suivantes :

- la proportion de nouveaux sites occupés est proportionnelle à p pour tenir compte de la migration venue des îlots déjà colonisés (îlots donneurs) ;
- la proportion de nouveaux sites occupés est également proportionnelle à $1-p$ pour tenir compte des îlots non colonisés encore disponibles (îlots receveurs) ;
- les sites occupés disparaissent proportionnellement au nombre de sites occupés (à cause du phénomène d'extinction).

La fonction $p : \mathbb{R}_+ \longrightarrow [0;1]$ étant supposée dérivable, son évolution est alors régie par l'équation différentielle de Mac-Arthur et Wilson (1967) donnée par

$$(E) \qquad p' = \mu p(1-p) - \varepsilon p,$$

où μ et ε sont deux quantités strictement positives désignant respectivement le taux de migration et le taux d'extinction de l'espèce.

Dans tout l'exercice, on suppose que p est strictement positive, c'est-à-dire $\forall t \geqslant 0,\ p(t) \in]0;1]$, et l'on pose

$$p_0 = p(0) \qquad \text{et} \qquad p^* = \frac{\mu - \varepsilon}{\mu}.$$

Dans toutes les questions, exceptée la dernière, μ et ε sont des constantes.

1. Dans cette question, on suppose que $\mu = \varepsilon$. Réécrire l'équation différentielle (E) sous la forme
$$-\frac{p'}{p^2} = \mu$$
et en déduire que
$$\forall t \geqslant 0, \qquad p(t) = \frac{p_0}{p_0 \mu t + 1}.$$
Que se passe-t-il lorsque t tend vers $+\infty$? Interpréter.

► Dans toute la suite, on suppose que $\mu \neq \varepsilon$.

2. À quelle condition l'équation (E) admet-elle comme solution la fonction constante égale à p^* ? On dit alors que p^* est un équilibre.
3. Pour tout $t \geqslant 0$, on pose $u(t) = 1/p(t)$. Démontrer que u vérifie l'équation différentielle linéaire
$$(L) \qquad u' + (\mu - \varepsilon)u = \mu.$$
Résoudre (L) et en déduire que les solutions de (E) sont de la forme
$$\forall t \geqslant 0, \qquad p(t) = \frac{p^*}{1 + \lambda p^* \,\mathrm{e}^{-(\mu-\varepsilon)t}}$$
où $\lambda \in \mathbb{R}$. Exprimer λ en fonction de p^* et p_0 puis écrire l'expression de p ainsi obtenue.
4. Que peut-on dire de la solution lorsque $p_0 = p^*$?
5. On suppose, dans cette question, que $p_0 \neq p^*$.
   a) On suppose que $\mu < \varepsilon$. Déterminer la limite de $p(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$. Interpréter.
   b) On suppose cette fois que $\mu > \varepsilon$. Déterminer la limite de $p(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$. Préciser les variations de p en distinguant les cas $p_0 > p^*$ et $p_0 < p^*$. On accompagnera la réponse de graphes très simples.
6. Les résultats des questions précédentes nous disent que $\forall t > 0$, $p(t) < 1$. Pouvez-vous interpréter biologiquement ce résultat ?
7. Dans de nombreuses situations, les taux de migration et d'extinction ne peuvent plus être considérés comme des constantes. En effet, sur de longues périodes, la modification de la taille et de l'éloignement des îlots conduit l'espèce à se sédentariser et, parallèlement, à s'adapter à son îlot : on parle alors d'endémisation de l'espèce.
Pour tenir compte de ce phénomène, on considère que ε et μ deviennent des fonctions décroissantes du temps t, définies, pour tout $t \geqslant 0$, par
$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \,\mathrm{e}^{-kt} \qquad \text{et} \qquad \mu(t) = \mu_0 \,\mathrm{e}^{-kt},$$
où $0 < \varepsilon_0 < \mu_0$ désignent les taux initiaux d'extinction et de migration et $k > 0$ représente le coefficient d'endémisation de l'espèce. L'équation (L) devient alors
$$(L) \qquad u' + (\mu_0 - \varepsilon_0)\,\mathrm{e}^{-kt}\,u = \mu_0 \,\mathrm{e}^{-kt}.$$
On pose
$$p_0^* = \frac{\mu_0 - \varepsilon_0}{\mu_0}$$
et l'on suppose que
$$p_0 < p_0^*.$$
   a) Résoudre (L) complètement (c'est-à-dire en tenant compte de la condition $u(0) = 1/p_0$). En déduire que, pour tout $t \geqslant 0$,
$$p(t) = \frac{p_0^*\, p_0}{p_0 + (p_0^* - p_0)\exp\left\{ -\dfrac{\mu_0 - \varepsilon_0}{k}(1 - \mathrm{e}^{-kt})\right\}}.$$
   b) Déterminer la limite p^{**} de $p(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$. Justifier que $p_0 < p^{**} < p_0^*$. Interpréter.

CORRECTION DU DS 8

(durée : 2 h 00)

EXERCICE

(Adaptation de l'Agro 2009)

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ *dont la matrice dans la base canonique est* $A = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & -4 & -2 \end{pmatrix}$.

1. *Déterminer l'image et le noyau de l'endomorphisme* $f + 2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$. *On note* $\overrightarrow{e_1}$ *un vecteur directeur de la droite* $\mathrm{Ker}(f + 2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$.

   On a

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(f + 2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) &= \mathrm{rg}(A + 2I_3) \\
&= \mathrm{rg}(2A + 4I_3) \\
&= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 5 & 1 & \boxed{1} \\ 1 & 5 & -1 \\ 4 & -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} {\scriptstyle L_1} \\ {\scriptstyle L_2} \\ {\scriptstyle L_3} \end{array} \\
&= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 5 & 1 & \boxed{1} \\ 6 & \boxed{6} & 0 \\ -6 & -6 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} {\scriptstyle L_1} \\ {\scriptstyle L_2 \leftarrow L_2 + L_1} \\ {\scriptstyle L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1} \end{array} \\
&= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 5 & 1 & \boxed{1} \\ 6 & \boxed{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} {\scriptstyle L_1} \\ {\scriptstyle L_2} \\ {\scriptstyle L_3 \leftarrow L_3 + L_2} \end{array} \\
&= 2,
\end{aligned}$$

   donc $\dim \mathrm{Im}(f + 2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = 2$. En ne conservant que les vecteurs des colonnes de $A + 2I_3$ qui possèdent un pivot dans la réduite de Gauß, on obtient une famille de 2 vecteurs, de rang 2 dans $\mathrm{Im}(f + 2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ qui est de dimension 2, c'est-à-dire une base de $\mathrm{Im}(f + 2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$. Par conséquent,

$$\boxed{\mathrm{Im}(f + 2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) \text{ est le plan de } \mathbb{R}^3 \text{ dont une base est } \big((1, 5, -4), (1, -1, 2)\big).}$$

Le théorème du rang dit que $\dim \operatorname{Ker}(f + 2\operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \operatorname{Im}(f + 2\operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3}) = 3 - 2 = 1$. De plus, on a

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{u} \in \operatorname{Ker}(f + 2\operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3}) &\iff (f + 2\operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3})(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0} \\
&\iff (A + 2I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 5x & + & y & + & \boxed{z} & = & 0 \\ 6x & + & \boxed{6y} & & & = & 0 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcr} x & = & \lambda \\ y & = & -\lambda \\ z & = & -4\lambda \end{array}\right. \quad (\lambda \in \mathbb{R})
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\operatorname{Ker}(f + 2\operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3}) \text{ est la droite de } \mathbb{R}^3 \text{ dirigée par } \overrightarrow{e_1} = (1, -1, -4).}$$

2. *Déterminer l'image et le noyau de l'endomorphisme* $f - \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3}$. *On note* $(\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ *une base du plan* $\operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3})$.

   On a

$$\begin{aligned}
\operatorname{rg}(f - \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3}) &= \operatorname{rg}(A - I_3) \\
&= \operatorname{rg}(2A - 2I_3) \\
&= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} -1 & 1 & \boxed{1} \\ 1 & -1 & -1 \\ 4 & -4 & -4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} {\scriptstyle L_1} \\ {\scriptstyle L_2} \\ {\scriptstyle L_3} \end{array} \\
&= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} -1 & 1 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} {\scriptstyle L_1} \\ {\scriptstyle L_2 \leftarrow L_2 + L_1} \\ {\scriptstyle L_3 \leftarrow L_3 + 4L_1} \end{array} \\
&= 1,
\end{aligned}$$

   donc $\dim \operatorname{Im}(f - \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3}) = 1$. En ne conservant que le vecteurs de la colonne de $A - I_3$ qui possède un pivot dans la réduite de Gauß, on obtient 1 vecteur non nul dans $\operatorname{Im}(f - \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3})$ qui est de dimension 1, c'est-à-dire une base de $\operatorname{Im}(f - \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3})$. Par conséquent,

$$\boxed{\operatorname{Im}(f - \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3}) \text{ est la droite de } \mathbb{R}^3 \text{ dirigée par le vecteur } (1, -1, -4).}$$

   Le théorème du rang nous dit alors que $\dim \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \operatorname{Im}(f - \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3}) = 3 - 1 = 2$. De plus, on a

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{u} \in \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3}) &\iff (f - \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3})(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0} \\
&\iff (A - I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \\
&\iff -x + y + \boxed{z} = 0 \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcr} x & = & \lambda & & \\ y & = & & & \mu \\ z & = & \lambda & - & \mu \end{array}\right. \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R})
\end{aligned}$$

   donc

$$\boxed{\operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3}) \text{ est le plan de } \mathbb{R}^3 \text{ de base } (\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}) \text{ où } \overrightarrow{e_2} = (1, 0, 1) \text{ et } \overrightarrow{e_3} = (0, 1, -1).}$$

3. *Démontrer que la famille* $\mathscr{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ *est un base de* $\mathbb{R}^3$*. Que peut-on en déduire pour les sous-espaces* $\operatorname{Ker}(f + 2\operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3})$ *et* $\operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3})$ *?*

   On a $\mathscr{B} = \big((1, -1, -4), (1, 0, 1), (0, 1, -1)\big)$. Notons B la matrice de $\mathscr{B}$ dans la base canonique. Alors

$$\begin{aligned}
\operatorname{rg} B &= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \boxed{1} \\ -4 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} {\scriptstyle L_1} \\ {\scriptstyle L_2} \\ {\scriptstyle L_3} \end{array} \\
&= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & \boxed{1} & 0 \\ -1 & 0 & \boxed{1} \\ -5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} {\scriptstyle L_1} \\ {\scriptstyle L_2} \\ {\scriptstyle L_3 \leftarrow L_3 + L_2} \end{array} \\
&= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & \boxed{1} & 0 \\ -1 & 0 & \boxed{1} \\ \boxed{-6} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} {\scriptstyle L_1} \\ {\scriptstyle L_2} \\ {\scriptstyle L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \end{array} \\
&= 3,
\end{aligned}$$

   donc $\mathscr{B}$ est une famille de 3 vecteurs, de rang 3 dans l'espace $\mathbb{R}^3$ qui est de dimension 3. Cela signifie que

$$\boxed{\mathscr{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}) \text{ est un base de } \mathbb{R}^3.}$$

   D'après le lemme de juxtaposition des bases, on en déduit que

$$\boxed{\text{les sous-espaces } \operatorname{Ker}(f + 2\operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3}) \text{ et } \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3}) \text{ sont supplémentaires dans } \mathbb{R}^3.}$$

4. *Écrire la matrice de* f *dans la base* $\mathscr{B}$*.*

   Comme $\overrightarrow{e_1} \in \operatorname{Ker}(f + 2\operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3})$, on a $f(\overrightarrow{e_1}) = -2\overrightarrow{e_1}$ et comme $\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3} \in \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3})$, on a $f(\overrightarrow{e_2}) = \overrightarrow{e_2}$ et $f(\overrightarrow{e_3}) = \overrightarrow{e_3}$. Par conséquent,

$$\boxed{\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

5. *On entame un raisonnement par l'absurde en supposant qu'il existe un endomorphisme* g *de* $\mathbb{R}^3$ *tel que* $g \circ g = f$*.*

   a) *Démontrer que* $f \circ g = g \circ f$*.*

      On a
$$f \circ g = (g \circ g) \circ g = g \circ (g \circ g) = g \circ f,$$
      donc
$$\boxed{f \text{ et } g \text{ commutent.}}$$

   b) *Démontrer que* $f\big(g(\overrightarrow{e_1})\big) = -2g(\overrightarrow{e_1})$*. En déduire que* $g(\overrightarrow{e_1}) \in \operatorname{Ker}(f + 2\operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3})$ *puis que* $g(\overrightarrow{e_1})$ *et* $\overrightarrow{e_1}$ *sont colinéaires.*

      On a
$$\begin{aligned}
f\big(g(\overrightarrow{e_1})\big) &= g\big(f(\overrightarrow{e_1})\big) && \text{car } f \text{ et } g \text{ commutent} \\
&= g(-2\overrightarrow{e_1}) && \text{car } \overrightarrow{e_1} \in \operatorname{Ker}(f + 2\operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3}),
\end{aligned}$$
      ce qui donne, puisque g est linéaire,
$$\boxed{f\big(g(\overrightarrow{e_1})\big) = -2g(\overrightarrow{e_1}).}$$

On en déduit que $g(\overrightarrow{e_1})$ appartient à $\mathrm{Ker}(f + 2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$. Comme celui-ci est une droite vectorielle dirigée par le vecteur $\overrightarrow{e_1}$, on en déduit bien que

$$\boxed{g(\overrightarrow{e_1}) \text{ et } \overrightarrow{e_1} \text{ sont colinéaires.}}$$

c) *Soit* $\overrightarrow{u} \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$. *Démontrer que* $f\big(g(\overrightarrow{u})\big) = g(\overrightarrow{u})$ *et en déduire que* $g(\overrightarrow{u})$ *appartient à* $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$.

On a

$$\begin{aligned} f\big(g(\overrightarrow{u})\big) &= g\big(f(\overrightarrow{u})\big) && \text{car } f \text{ et } g \text{ commutent} \\ &= g(\overrightarrow{u}) && \text{car } \overrightarrow{u} \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}), \end{aligned}$$

donc $g(\overrightarrow{u})$ appartient à $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$. Comme ce sous-esapce admet pour base le couple $(\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$, on a

$$\boxed{g(\overrightarrow{u}) \in \mathrm{Vect}(\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}).}$$

d) *En déduire qu'il existe des nombres réels* a, x, y, z, t *tels que* $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & x & y \\ 0 & z & t \end{pmatrix}$.

Le fait que $g(\overrightarrow{e_1})$ soit colinéaire à $\overrightarrow{e_1}$ implique l'existence d'un scalaire $a \in \mathbb{R}$ tel que $g(\overrightarrow{e_1}) = a\overrightarrow{e_1}$.

Par ailleurs, on sait que $\overrightarrow{e_2}$ et $\overrightarrow{e_3}$ sont tous les deux dans $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$, donc, d'après la question précédente, on sait que $g(\overrightarrow{e_2})$ et $g(\overrightarrow{e_3})$ appartiennent à $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$. Cela signifie qu'il existe quatre scalaires $x, y, z, t \in \mathbb{R}$ tels que l'on ait $g(\overrightarrow{e_2}) = x\overrightarrow{e_2} + z\overrightarrow{e_3}$ et $g(\overrightarrow{e_3}) = y\overrightarrow{e_2} + t\overrightarrow{e_3}$.

Par suite, d'après la définition de la matrice de l'endomorphisme g dans la base $\mathscr{B}$, on a bien

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & x & y \\ 0 & z & t \end{pmatrix}.}$$

e) *Démontrer que* $\big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g)\big)^2 = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ *et en déduire que* $a^2 = -2$. *Conclure.*

La relation $g \circ g = f$ se traduit, dans la base $\mathscr{B}$, par l'égalité matricielle

$$\boxed{\big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g)\big)^2 = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f).}$$

Or

$$\big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g)\big)^2 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & x & y \\ 0 & z & t \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & \spadesuit & \heartsuit \\ 0 & \diamondsuit & \clubsuit \end{pmatrix}$$

où $\spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit, \clubsuit$ désignent des scalaires dont on se moque. Cela implique, par identification des coefficients des matrices $\big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g)\big)^2$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \mathrm{Diag}(-2, 1, 1)$, que

$$\boxed{a^2 = -2.}$$

L'égalité $a^2 = -2$ n'étant pas possible avec $a \in \mathbb{R}$, on aboutit à une absurdité. Par conséquent,

$$\boxed{\text{il n'existe pas d'endomorphisme } g \text{ de } E \text{ tels que } g \circ g = f.}$$

PROBLEME

(Biogéographie insulaire)

En biogéographie, une métapopulation est un groupe de sous-populations d'une même espèce animale réparties spatialement en îlots. On rencontre ce type de distribution discontinue lorsque les habitats favorables et défavorables s'alternent. C'est par exemple le cas dans les écosystèmes insulaires mais aussi lorsque l'espèce vit dans des habitats isolés (montagnes, lacs, forêts, ...). Dans ce type d'écosystème, les animaux risquent leur vie s'ils essaient de passer d'un endroit à l'autre, si bien que les mouvements se réduisent. L'isolement qui en résulte favorise alors l'extinction des sous-populations. Ce phénomène est toutefois compensé par une recolonisation périodique par dispersion depuis les îlots voisins.

Pour modéliser l'évolution d'une métapopulation au cours du temps t, on note p la proportion d'îlots occupés. On émet en outre les hypothèses suivantes : la proportion de nouveaux sites occupés est proportionnelle à p pour tenir compte de la migration venue des îlots déjà colonisés (îlots donneurs) ; la proportion de nouveaux sites occupés est également proportionnelle à $1-p$ pour tenir compte des îlots non colonisés encore disponibles (îlots receveurs) ; les sites occupés disparaissent proportionnellement au nombre de sites occupés (à cause du phénomène d'extinction).

La fonction $p : \mathbb{R}_+ \longrightarrow [0;1]$ étant supposée dérivable, son évolution est alors régie par l'équation différentielle de Mac-Arthur et Wilson (1967) donnée par (E) $p' = \mu p(1-p) - \varepsilon p$, où μ et ε sont deux quantités strictement positives désignant respectivement le taux de migration et le taux d'extinction de l'espèce.

Dans tout l'exercice, on suppose que p est strictement positive, c'est-à-dire $\forall t \geqslant 0,\ p(t) \in]0;1]$, et l'on pose $p_0 = p(0)$ et $p^* = (\mu-\varepsilon)/\mu$. Dans toutes les questions, exceptée la dernière, μ et ε sont des constantes.

1. *Dans cette question, on suppose que $\mu = \varepsilon$. Réécrire l'équation différentielle (E) sous la forme $-p'/p^2 = \mu$ et en déduire que $\forall t \geqslant 0,\ p(t) = p_0/(p_0\mu t + 1)$. Que se passe-t-il lorsque t tend vers $+\infty$? Interpréter.*

   Lorsque $\mu = \varepsilon$, on a $\mu p(1-p) - \varepsilon p = \mu p - \mu p^2 - \varepsilon p = -\mu p^2$, donc (E) se réécrit sous la forme $p' = -\mu p^2$ ou encore, puisque p ne s'annule pas,

$$\boxed{-\frac{p'}{p^2} = \mu.}$$

   En intégrant cette égalité, on obtient alors

$$\forall t \geqslant 0, \qquad \frac{1}{p(t)} = \mu t + c,$$

   où c désigne une constante réelle. Il s'ensuit que

$$\forall t \geqslant 0, \qquad p(t) = \frac{1}{\mu t + c}\cdot$$

   La condition initale $p_0 = p(0) = 1/c$ nous dit alors $c = 1/p_0$, ce qui donne

$$\boxed{\forall t \geqslant 0, \qquad p(t) = \frac{p_0}{\mu p_0 t + 1}\cdot}$$

   On constate alors, puisque $\mu \neq 0$ et $p_0 \neq 0$, que

$$\boxed{\lim_{t\to+\infty} p(t) = 0.}$$

   Cela signifie que

lorsque le taux de migration est égal au taux d'extinction, la métapopulation est condamnée à disparaître de l'écosystème.

Dans toute la suite, on supposera que $\mu \neq \varepsilon$.

2. *À quelle condition l'équation (E) admet-elle comme solution la fonction constante égale à p^* ? On dit alors que p^* est un équilibre.*

Pour être une solution de (E), la fonction constante égale à p^* doit vérifier la condition $0 < p^* \leqslant 1$ et satisfaire l'équation (E). Or

$$0 < p^* \leqslant 1 \iff 0 < \frac{\mu - \varepsilon}{\mu} \leqslant 1 \iff \mu > \varepsilon,$$

puisqu'il est clair que l'inégalité $(\mu - \varepsilon)/\mu \leqslant 1$ est toujours satisfaite. Par ailleurs, on a

$$(p^*)' - \mu p^*(1 - p^*) + \varepsilon p^* = 0 - \mu\frac{\mu - \varepsilon}{\mu}\Big(1 - \frac{\mu - \varepsilon}{\mu}\Big) + \varepsilon\frac{\mu - \varepsilon}{\mu} = -(\mu - \varepsilon)\frac{\varepsilon}{\mu} + \varepsilon\frac{\mu - \varepsilon}{\mu} = 0,$$

donc p^* vérifie bien (E). En conclusion,

$$\boxed{\text{l'équation } (E) \text{ admet comme solution la fonction constante égale à } p^* \text{ si, et seulement si, } \mu > \varepsilon.}$$

3. *Pour tout $t \geqslant 0$, on pose $u(t) = 1/p(t)$. Démontrer que u vérifie l'équation différentielle linéaire (L) $u' + (\mu - \varepsilon)u = \mu$. Résoudre (L) et en déduire que les solutions de (E) sont de la forme $\forall t \geqslant 0,\ p(t) = p^*/(1 + \lambda p^* \,\mathrm{e}^{-(\mu-\varepsilon)t})$ où $\lambda \in \mathbb{R}$. Exprimer λ en fonction de p^* et p_0 puis écrire l'expression de p ainsi obtenue.*

La fonction p étant définie, dérivable et non nulle sur $\mathbb{R}_+$, la fonction $u = 1/p$ est définie, dérivable et non nulle sur $\mathbb{R}_+$. On peut donc écrire $p = 1/u$ et dériver, ce qui donne $p' = -u'/u^2$. En reportant dans l'quation (E), on obtient

$$-\frac{u'}{u^2} = \mu\frac{1}{u}\Big(1 - \frac{1}{u}\Big) - \varepsilon\frac{1}{u} \iff -u' = \mu u\Big(1 - \frac{1}{u}\Big) - \varepsilon u \iff u' + (\mu - \varepsilon)u = \mu,$$

ce qui démontre bien que

$$\boxed{u \text{ vérifie l'équation différentielle linéaire } (L)\ u' + (\mu - \varepsilon)u = \mu.}$$

L'équation (L) est définie sur $\mathbb{R}_+$.
D'après le cours, les solutions de l'équation homogène $u' + (\mu - \varepsilon)u = 0$ sont les fonctions de la forme

$$\forall t \geqslant 0, \qquad u_h(t) = \lambda\,\mathrm{e}^{-(\mu-\varepsilon)t} \qquad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

On constate par ailleurs que l'équation (L) admet comme solution particulière évidente la fonction constante

$$\forall t \geqslant 0, \qquad u_p(t) = \frac{1}{p^*}\cdot$$

Les solutions de (L) sont alors les fonctions de la forme $u = u_p + u_h$, c'est-à-dire

$$\forall t \geqslant 0, \qquad u(t) = \frac{1}{p^*} + \lambda\,\mathrm{e}^{-(\mu-\varepsilon)t} \qquad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

Comme $p = 1/u$, on en déduit immédiatement que

$$\boxed{\forall t \geqslant 0, \qquad p(t) = \frac{p^*}{1 + \lambda p^*\,\mathrm{e}^{-(\mu-\varepsilon)t}} \qquad (\lambda \in \mathbb{R}).}$$

La condition initale $p(0) = p_0$ nous dit alors que

$$\frac{p^*}{1 + \lambda p^*} = p_0 \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \lambda = \frac{p^* - p_0}{p^* p_0},$$

donc

$$\boxed{\forall t \geqslant 0, \qquad p(t) = \frac{p^* p_0}{p_0 + (p^* - p_0)\,\mathrm{e}^{-(\mu-\varepsilon)t}}\cdot}$$

4. *Que peut-on dire de la solution lorsque $p_0 = p^*$?*

   Lorsque $p_0 = p^*$, on a nécessairement $p^* \in]0;1]$, c'est-à-dire $\mu > \varepsilon$. On constate alors, à l'aide du résultat de la question précédente, que $\forall t \geqslant 0,\ p(t) = p^*$. Par conséquent,

   $$\boxed{\text{lorsque } p_0 = p^*\text{, la solution est constante, égale à l'équilibre } p^*.}$$

5. *On suppose, dans cette question, que $p_0 \neq p^*$.*

   a) *On suppose que $\mu < \varepsilon$. Déterminer la limite de p en $+\infty$. Interpréter.*

   Si $\mu < \varepsilon$, on a $\lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-(\mu-\varepsilon)t} = +\infty$ et donc $\lim_{t\to+\infty} \big((p^* - p_0)\,\mathrm{e}^{-(\mu-\varepsilon)t}\big) = \pm\infty$ puisque $p_0 \neq p^*$. Il s'ensuit, d'après le résultat de la question 3, que

   $$\boxed{\lim_{t\to+\infty} p(t) = 0.}$$

   Par conséquent,

   $$\boxed{\begin{array}{l}\text{lorsque le taux de migration est strictement inférieur au taux d'extinction,}\\ \text{la métapopulation est condamnée à disparaître de l'écosystème considéré.}\end{array}}$$

   b) *On suppose cette fois que $\mu > \varepsilon$. Déterminer la limite de p en $+\infty$. Préciser les variations de p selon que $p_0 > p^*$ ou $p_0 < p^*$. On donnera des graphes très simples.*

   Cette fois, on a $\lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-(\mu-\varepsilon)t} = 0$. Par suite, l'expression de la solution déterminée à la question 3 nous dit que

   $$\boxed{\lim_{t\to+\infty} p(t) = p^*.}$$

   Ainsi,

   $$\boxed{\begin{array}{l}\text{lorsque le taux de migration est strictement supérieur au taux}\\ \text{d'extinction, la population finit par se stabiliser à l'équilibre } p^*.\end{array}}$$

   La fonction $t \longmapsto \mathrm{e}^{-(\mu-\varepsilon)t}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Lorsque $p_0 > p^*$, la fonction $t \longmapsto (p^* - p_0)\,\mathrm{e}^{-(\mu-\varepsilon)t}$ est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Après ajout de la constante p_0, passage à l'inverse et multiplication par la constante strictement positive p^*p_0, on en déduit que la fonction

   $$t \longmapsto \frac{p^*p_0}{p_0 + (p^* - p_0)\,\mathrm{e}^{-(\mu-\varepsilon)t}}$$

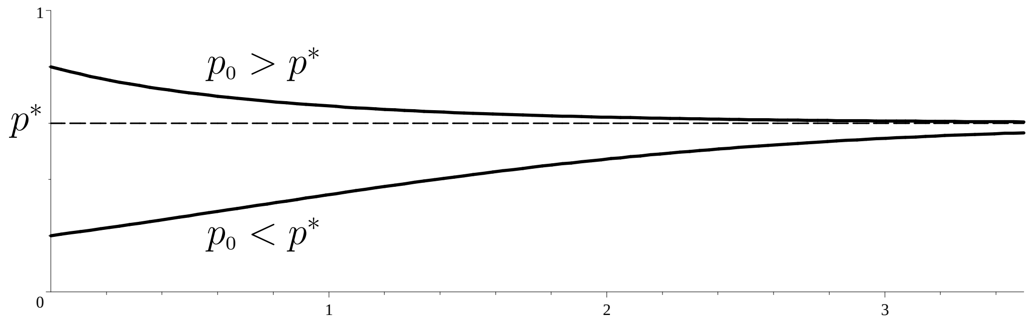
   est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Donc

   $$\boxed{\begin{array}{l}\text{lorsque la proportion initiale d'îlots peuplés est supérieure à l'équilibre,}\\ \text{la proportion } p \text{ décroît strictement de sa valeur initiale vers l'équilibre.}\end{array}}$$

   Mutatis mutandis, on obtient que

   $$\boxed{\begin{array}{l}\text{lorsque la proportion initiale d'îlots peuplés est inférieure à l'équilibre,}\\ \text{la proportion } p \text{ croît strictement de sa valeur initiale vers l'équilibre.}\end{array}}$$

   Graphiquement, on obtient les situations suivantes :



6. *Les résultats des questions précédentes nous disent que $\forall t > 0,\ p(t) < 1$. Pouvez-vous interpréter biologiquement ce résultat ?*

On constate que, tant que $\varepsilon > 0$ (c'est-à-dire tant qu'il existe un facteur d'extinction), il existe des îlots non colonisés. Ainsi,

en conservation de la biodiversité, toute stratégie qui vise à maintenir une espèce dans tous les endroits disponibles n'est pas réaliste : il faut qu'il reste des habitats libres, potentiellement colonisables, pour que l'espèce puisse se maintenir.

7. *Dans de nombreuses situations, les taux de migration et d'extinction ne peuvent plus être considérés comme des constantes. En effet, sur de longues périodes, la modification de la taille et de l'éloignement des îlots conduit l'espèce à se sédentariser et, parallèlement, à s'adapter à son îlot : on parle alors d'endémisation de l'espèce. Pour tenir compte de ce phénomène, on considère que ε et μ sont des fonctions décroissantes du temps, définies, pour tout $t \geqslant 0$, par $\varepsilon(t) = \varepsilon_0\,\mathrm{e}^{-kt}$ et $\mu(t) = \mu_0\,\mathrm{e}^{-kt}$, où $0 < \varepsilon_0 < \mu_0$ désignent les taux initiaux d'extinction et de migration et $k > 0$ représente le coefficient d'endémisation. L'équation (L) devient alors $(L)\ u' + (\mu_0 - \varepsilon_0)\,\mathrm{e}^{-kt}\,u = \mu_0\,\mathrm{e}^{-kt}$. On pose $p_0^* = (\mu_0 - \varepsilon_0)/\mu_0$ et l'on suppose que $p_0 < p_0^*$.*

   a) *Résoudre (L). En déduire, pour tout $t \geqslant 0$, l'expression de $p(t)$.*

   L'équation (L) est définie sur $\mathbb{R}_+$.
   D'après le cours, les solutions de l'équation homogène $u' + (\mu_0 - \varepsilon_0)\,\mathrm{e}^{-kt}\,u = 0$ sont les fonctions de la forme

$$\forall t \geqslant 0, \qquad u_h(t) = \lambda \exp\left\{-\int^t (\mu_0 - \varepsilon_0)\,\mathrm{e}^{-kv}\,\mathrm{d}v\right\} = \lambda \exp\left\{\frac{\mu_0 - \varepsilon_0}{k}\,\mathrm{e}^{-kt}\right\} \qquad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

   On constate par ailleurs que l'équation (L) admet comme solution particulière évidente la fonction constante

$$\forall t \geqslant 0, \qquad u_p(t) = \frac{1}{p_0^*}\cdot$$

   Les solutions de (L) sont alors les fonctions de la forme $u = u_p + u_h$, c'est-à-dire

$$\forall t \geqslant 0, \qquad u(t) = \frac{1}{p_0^*} + \lambda \exp\left\{\frac{\mu_0 - \varepsilon_0}{k}\,\mathrm{e}^{-kt}\right\} \qquad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

   La condition initale $u(0) = 1/p_0$ nous dit alors que

$$\frac{1}{p_0^*} + \lambda \exp\left\{\frac{\mu_0 - \varepsilon_0}{k}\right\} = \frac{1}{p_0} \iff \lambda = \frac{p_0^* - p_0}{p_0^*\,p_0} \exp\left\{-\frac{\mu_0 - \varepsilon_0}{k}\right\},$$

   donc

$$\boxed{\forall t \geqslant 0, \qquad u(t) = \frac{1}{p_0^*} + \frac{p_0^* - p_0}{p_0^*\,p_0} \exp\left\{-\frac{\mu_0 - \varepsilon_0}{k}(1 - \mathrm{e}^{-kt})\right\}.}$$

   Comme $p = 1/u$, on en déduit immédiatement que

$$\boxed{\forall t \geqslant 0, \qquad p(t) = \frac{p_0^*\,p_0}{p_0 + (p_0^* - p_0) \exp\left\{-\dfrac{\mu_0 - \varepsilon_0}{k}(1 - \mathrm{e}^{-kt})\right\}}.}$$

   b) *Déterminer la limite p^{**} de p en $+\infty$. Justifier que $p_0 < p^{**} < p_0^*$. Interpréter.*

   Le résultat de la question précédente nous dit que

$$\boxed{p^{**} = \lim_{t \to +\infty} p(t) = \frac{p_0^*\,p_0}{p_0 + (p_0^* - p_0) \exp\left\{-\dfrac{\mu_0 - \varepsilon_0}{k}\right\}}.}$$

Or

$$0 < \exp\left\{-\frac{\mu_0 - \varepsilon_0}{k}\right\} < 1,$$

donc, comme $p_0 < p_0^*$,

$$\frac{p_0^* \, p_0}{p_0 + (p_0^* - p_0) \times 1} < p^{**} < \frac{p_0^* \, p_0}{p_0 + (p_0^* - p_0) \times 0},$$

c'est-à-dire

$$\boxed{p_0 < p^{**} < p_0^*.}$$

On constate donc qu'

en cas d'endémisation, la population se stabilise à un niveau plus faible que pendant la période de métapopulation

Si l'on avait supposé que $p_0 > p_0^*$, alors la population se serait stabilisée à un niveau plus élevé que pendant la période de métapopulation…