

Devoir à la maison 7

à rendre au plus tard le lundi 30 janvier 2017

Exercice 1: cet exercice est à rendre au plus tard le lundi 23 janvier 2017

Faire l'exercice 12 de la Feuille 12 (intégrales de Wallis), en rajoutant la question préliminaire : calculer W_0 et W_1 .
Dans cet exercice, toutes les méthodes sont classiques, mais les calculs sont parfois astucieux, notamment dans les questions 2. et 3. N'hésitez pas à me solliciter !

Exercice 2: idéalement (pour votre organisation) à rendre aussi avant le 30 janvier !

On introduit la fonction f définie par $f(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} dt$.

1. Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Etudier la parité de f .
3. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et déterminer f' .
4. (a) En utilisant la relation $t^2 \leq t^2 + 1 \leq t^2 + 2t + 1$, valable pour tout t réel positif ou nul, montrer que l'on a l'encadrement suivant : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln(2x+1) - \ln(x+1) \leq f(x) \leq \ln(2)$
 (b) Donner alors la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
5. Dresser le tableau de variation complet de f .
6. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
7. (a) Montrer que pour tout réel x , on a : $x + \sqrt{x^2+1} > 0$. On note dorénavant h la fonction définie sur $\mathbb{R}$, par $h(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$.
 (b) Calculer h' . En déduire l'expression explicite de $f(x)$.
8. *Pour ceux qui veulent en faire plus :*
 Recherche d'un équivalent de $f(x)$ lorsque x est au voisinage de 0.
 (a) Etablir que, pour tout réel x strictement positif, on a : $x - f(x) = \int_x^{2x} \frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}(1+\sqrt{t^2+1})} dt$
 (b) En déduire : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $0 \leq x - f(x) \leq \frac{7}{6}x^3$ puis que $f(x) \underset{0^+}{\sim} x$.
 (c) Montrer que l'on a aussi : $f(x) \underset{0^-}{\sim} x$.

Exercice 3: à rendre au plus tard le lundi 30 janvier 2017

On considère pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, les ensembles suivants :
 $E_1(A) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) / AM = M\}$ et $E_2(A) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) / A^2M = AM\}$

1. Montrer que $E_1(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On admettra qu'il en est de même pour $E_2(A)$.
2. Exemple : dans cette question uniquement, on prend $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
 Déterminer une base de $E_1(A)$.
3. On revient au cas général.
 (a) Etablir $E_1(A) \subset E_2(A)$.
 (b) Montrer que si A est inversible alors $E_1(A) = E_2(A)$.
 (c) Montrer que si $A - I_3$ est inversible, alors $E_1(A) = \{0\}$
4. Exemple : on pose $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer $E_1(A)$ et $E_2(A)$.

Devoir à la maison 4

à rendre le jeudi 6 novembre 2014

Exercice 1:

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n(X) = \prod_{k=0}^n (1 + X^{2^k})$.

1. Expliciter P_0 , P_1 et P_2 puis trouver une relation de récurrence entre P_{n+1} et P_n .
2. Déterminer le degré de P_n en fonction de n : on commencera par deviner le résultat, puis on le justifiera à l'aide d'un raisonnement par récurrence.

Exercice 2: Polynômes d'interpolation de Lagrange

1. Un exemple : Déterminer l'unique polynôme P de degré 3 tel que $P(1) = 0$, $P(2) = 0$, $P(3) = 0$ et $P(4) = 1$.
2. Cas général : soit $n \in \mathbb{N}$, et $a_0, a_1, \dots, a_n$ n réels 2 à 2 distincts.
 - a) Déterminer l'unique polynôme de degré n , noté L_0 , tel que $L_0(a_0) = 1$ et pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $L_0(a_k) = 0$.
 - b) *bonus* : plus généralement, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, déterminer l'unique polynôme de degré n , que l'on notera L_k , tel que $L_k(a_k) = 1$ et pour tout $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $j \neq k$, $L_k(a_j) = 0$.

Conseil : Pour justifier l'unicité (en même temps que le reste), il suffit de raisonner par analyse et synthèse. Faire ce raisonnement pour chaque question.

Exercice 3:

On note $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par : $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1. Déterminer le signe de f sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f admet une limite en 0 (c'est-à-dire est continue en 0).
3. Déterminer pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x)$.
4. Étudier les variations de l'application $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $u(x) = (1 - x)e^x - 1$.
5. En déduire le tableau de variations de f .
6. Déterminer la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement.
7. Déterminer la limite de f en $-\infty$. La droite $y = -x$ est-elle asymptote à la courbe au voisinage de $-\infty$?
8. Résoudre l'équation $f(x) = x$ sur $\mathbb{R}$.
9. Tracer l'allure de la courbe représentative de f .

Devoir à la maison 4

à rendre le jeudi 6 novembre 2014

Exercice 4:

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n(X) = \prod_{k=0}^n (1 + X^{2^k})$.

1. Expliciter P_0 , P_1 et P_2 puis trouver une relation de récurrence entre P_{n+1} et P_n .
2. Déterminer le degré de P_n en fonction de n : on commencera par deviner le résultat, puis on le justifiera à l'aide d'un raisonnement par récurrence.

Exercice 5: Polynômes d'interpolation de Lagrange

1. Un exemple : Déterminer l'unique polynôme P de degré 3 tel que $P(1) = 0$, $P(2) = 0$, $P(3) = 0$ et $P(4) = 1$.
2. Cas général : soit $n \in \mathbb{N}$, et $a_0, a_1, \dots, a_n$ n réels 2 à 2 distincts.
 - a) Déterminer l'unique polynôme de degré n , noté L_0 , tel que $L_0(a_0) = 1$ et pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $L_0(a_k) = 0$.
 - b) *bonus* : plus généralement, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, déterminer l'unique polynôme de degré n , que l'on notera L_k , tel que $L_k(a_k) = 1$ et pour tout $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $j \neq k$, $L_k(a_j) = 0$.

Conseil : Pour justifier l'unicité (en même temps que le reste), il suffit de raisonner par analyse et synthèse. Faire ce raisonnement pour chaque question.

Exercice 6:

On note $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par : $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1. Déterminer le signe de f sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f admet une limite en 0 (c'est-à-dire est continue en 0).
3. Déterminer pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x)$.
4. Étudier les variations de l'application $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $u(x) = (1 - x)e^x - 1$.
5. En déduire le tableau de variations de f .
6. Déterminer la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement.
7. Déterminer la limite de f en $-\infty$. La droite $y = -x$ est-elle asymptote à la courbe au voisinage de $-\infty$?
8. Résoudre l'équation $f(x) = x$ sur $\mathbb{R}$.
9. Tracer l'allure de la courbe représentative de f .