Exercice 3 (Formule de Stirling.). Ce problème a pour objectif d'établir l'équivalent de $n!$ suivant :

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$$

Cet équivalent est connu sous l'appellation « formule de Stirling. »
Les deux parties de ce problème sont indépendantes.

Première partie.

(0) Par intégration par parties, trouver une primitive sur $]0,+\infty[$ de $t \mapsto \ln t$.

(1) Soit k un entier tel que $k \geq 2$.

(a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$:

$$\int_{k-1}^{k} \ln t \mathrm{d}t \leq \ln k \leq \int_{k}^{k+1} \ln t \mathrm{d}t.$$

(a) En déduire un encadrement de $\ln n!$, puis un équivalent de $\ln n!$.

(2) On pose désormais, pour tout $n \geq 1$,

$$v_n = \frac{\mathrm{e}^n n!}{n^{n+\frac{1}{2}}}, \text{ et } d_n = \ln v_n.$$

Montrer que, pour tout $n \geq 1$,

$$d_n - d_{n+1} = \frac{2n+1}{2}\ln\left(\frac{1+\frac{1}{2n+1}}{1-\frac{1}{2n+1}}\right) - 1$$

(3) Montrer que, pour tout $n \geq 1$,

$$\frac{1}{12n+1} - \frac{1}{12(n+1)+1} \leq \frac{1}{3(2n+1)^2}$$

et

$$\frac{1}{12n} - \frac{1}{12(n+1)} \geq \frac{1}{3((2n+1)^2-1)}$$

(4) Soit f la fonction définie sur $]0,1[$ par $f(t) = \dfrac{1}{2t}\ln\left(\dfrac{1+t}{1-t}\right) - 1 - \dfrac{t^2}{3}$.

(a) Etudier les variations de la fonction g définie sur $]0,1[$ par $g(t) = 2tf(t)$.

(b) En déduire que f est positive.

(5) Soit h la fonction définie sur $]0,1[$ par $h(t) = \dfrac{t^2}{3(1-t^2)} - \dfrac{1}{2t}\ln\left(\dfrac{1+t}{1-t}\right) + 1$.

(a) Etudier les variations de la fonction k définie sur $]0,1[$ par $k(t) = 2th(t)$.

(b) En déduire le signe de h.

(6) En déduire, pour tout $n \geq 1$, l'encadrement

$$\frac{1}{12n+1} - \frac{1}{12(n+1)+1} \leq d_n - d_{n+1} \leq \frac{1}{12n} - \frac{1}{12(n+1)}$$

(7) Montrer que les suites $(d_n - \frac{1}{12n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(d_n - \frac{1}{12n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes. Soit ℓ leur limite commune.

(8) En déduire l'existence d'un réel C tel que pour tout $n \geq 1$,

$$Cn^{n+\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-n}\mathrm{e}^{\frac{1}{12n+1}} \leq n! \leq Cn^{n+\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-n}\mathrm{e}^{\frac{1}{12n}}$$

et donner un équivalent de $n!$ à l'aide de la constante C.

Deuxième partie.

Dans cette partie, on détermine la constante C de l'équivalent de $n!$ trouvé plus haut.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \mathrm{d}x$

(1) Calculer I_0 et I_1.

(2) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour $n \geq 1$,

$$I_{n+1} = \frac{n}{n+1} I_{n-1}.$$

En déduire les valeurs de I_{2p} et I_{2p+1} en fonction de p.

(3) Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et en déduire la limite de la suite $\left(\dfrac{I_{2n}}{I_{2n+1}}\right)$.

(4) Montrer alors que $C = \sqrt{2\pi}$.

CORRECTION4

(3) On considère dans cette question l'expérience aléatoire suivante : dans une urne contenant 3 boules blanches et 3 boules noires, on tire successivement et sans remise 3 boules. On appelle alors X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches tirées.

(a) Déterminer $X(\Omega)$ et la loi de X.

On a $X(\Omega) = [\![0, 3]\!]$. Notons B_k l'événement « le k^{e} tirage apporte une boule blanche »et N_k l'événement contraire. D'après la formule des probabilités composées,

$$P(X = 0) = P(N_1 N_2 N_3) = P(N_1)P_{N_1}(N_2)P_{N_1 N_2}(N_3)$$

donc

$$P(X = 0) = \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$$

et grâce à la symétrie de l'urne, on a aussi $P(X = 3) = \dfrac{1}{20}$.

Toujours par symétrie de l'urne, on a $P(X = 1) = P(X = 2)$ et puisque $P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 1$, on a

$$P(X = 1) = P(X = 2) = \frac{9}{20}.$$

(b) Vérifier que $\lim\limits_{n\to+\infty} \begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \\ P(X_n = 3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(X = 0) \\ P(X = 1) \\ P(X = 2) \\ P(X = 3) \end{pmatrix}$.

On dit que la suite (X_n) converge en loi vers la variable aléatoire X.

D'après l'étude précédente,

$$\lim_{n\to+\infty} \begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \\ P(X_n = 3) \end{pmatrix} = \lim_{n\to+\infty} M^n Y_0 = M^\infty \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(X = 0) \\ P(X = 1) \\ P(X = 2) \\ P(X = 3) \end{pmatrix}$$

Exercice 3 (**Formule de Stirling.**)**.** Ce problème a pour objectif d'établir l'équivalent de $n!$ suivant :

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$$

C'est la formule de Stirling.
Les trois parties de ce problème sont indépendantes.

Première partie.

(0) Par intégration par parties, trouver une primitive sur $]0, +\infty[$ de $t \mapsto \ln t$.

Soit $x > 0$.

$$\int_1^x \ln(t)\mathrm{d}t = [t\ln(t)]_1^x - \int_1^x 1\mathrm{d}t = x\ln(x) - x + 1$$

Une primitive de ln sur $]0, +\infty[$ est donc la fonction $x \mapsto x\ln(x) - x$.

(1) Soit k un entier tel que $k \geq 2$.

(a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$:

$$\int_{k-1}^k \ln t\mathrm{d}t \leq \ln k \leq \int_k^{k+1} \ln t\mathrm{d}t.$$

Soit k un entier tel que $k \geq 2$. La fonction ln est croissante sur $]0, +\infty[$ donc

— pour $t \in [k - 1, k]$, on a $\ln(t) \leq \ln k$ et par positivité de l'intégrale, on a $\displaystyle\int_{k-1}^k \ln t\mathrm{d}t \leq \ln k$;

— pour $t \in [k, k + 1]$, on a $\ln k \leq \ln t$ et par positivité de l'intégrale, on a $\ln k \leq \displaystyle\int_k^{k+1} \ln t\mathrm{d}t$;

d'où l'encadrement attendu.

(b) En déduire un encadrement de $\ln(n!)$, puis un équivalent de $\ln(n!)$.

On constate que $\ln(n!) = \sum_{k=1}^{n} \ln(k) = \sum_{k=2}^{n} \ln(k)$ puisque $\ln(1) = 0$.

Par sommation des inégalités précédentes membre à membre, on obtient

$$\sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \ln t \mathrm{d}t \leq \sum_{k=2}^{n} \ln k \leq \sum_{k=2}^{n} \int_{k}^{k+1} \ln t \mathrm{d}t.$$

et par additivité de l'intégrale

$$\int_{1}^{n} \ln(t)\mathrm{d}t \leq \ln(n!) \leq \int_{2}^{n+1} \ln(t)\mathrm{d}t.$$

Le calcul de primitive fait en (0) donne alors

$$n\ln(n) - n + 1 \leq \ln(n!) \leq (n+1)\ln(n+1) - (n+1) - 2\ln(2) + 2.$$

L'encadrement précédent suggère de prendre $n\ln(n)$ comme équivalent de $\ln(n!)$. En effet, pour $n \geq 2$, on a $n\ln(n) > 0$ et en quotientant par $n\ln(n)$ l'encadrement précédent, on obtient

$$1 - \frac{1}{\ln(n)} + \frac{1}{n\ln(n)} \leq \frac{\ln(n!)}{n\ln(n)} \leq \frac{(n+1)\ln(n+1)}{n\ln(n)} - \frac{(n+1)}{n\ln(n)} - \frac{2\ln(2)-2}{n\ln(n)}$$

Les termes $\frac{1}{\ln(n)}$, $\frac{1}{n\ln(n)}$, $\frac{(n+1)}{n\ln(n)} = \frac{1+\frac{1}{n}}{\ln(n)}$ et $\frac{2\ln(2)-2}{n\ln(n)}$ tendent tous vers 0 d'après les opérations sur les limites.

Etudions la limite du terme $\frac{(n+1)\ln(n+1)}{n\ln(n)}$. Pour tout entier $n \geq 2$,

$$\begin{aligned}
\frac{(n+1)\ln(n+1)}{n\ln(n)} &= \left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \\
&= \left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{\ln(n)+\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln(n)} \\
&= 1 + \frac{1}{n} + \frac{(1+\frac{1}{n})\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln(n)}
\end{aligned}$$

et d'après les opérations sur les limites, on a

$$\lim \frac{1}{n} = \lim \frac{(1+\frac{1}{n})\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln(n)} = 0$$

donc

$$\lim \frac{(n+1)\ln(n+1)}{n\ln(n)} = 1.$$

Le théorème de convergence par encadrement assure alors que

$$\lim \frac{\ln(n!)}{n\ln(n)} = 1$$

ce qui prouve que $\ln(n!) \sim n\ln(n)$.

(2) On pose désormais, pour tout $n \geq 1$,

$$v_n = \frac{\mathrm{e}^n n!}{n^{n+\frac{1}{2}}}, \text{ et } d_n = \ln(v_n).$$

Montrer que, pour tout $n \geq 1$,

$$d_n - d_{n+1} = \frac{2n+1}{2}\ln\left(\frac{1+\frac{1}{2n+1}}{1-\frac{1}{2n+1}}\right) - 1$$

Pour tout entier $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}
d_n - d_{n+1} &= \ln(v_n) - \ln(v_{n+1}) \\
&= \ln\left(\frac{v_n}{v_{n+1}}\right) \\
&= \ln\left(\frac{\mathrm{e}^n n!}{n^{n+\frac{1}{2}}} \times \frac{(n+1)^{n+1+\frac{1}{2}}}{\mathrm{e}^{n+1}(n+1)!}\right) \\
&= \ln\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} \frac{1}{\mathrm{e}}\right) \\
&= \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - 1 \\
&= \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{2n+2}{2n}\right) - 1 \\
&= \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{2n+1+1}{2n+1-1}\right) - 1 \\
&= \frac{2n+1}{2}\ln\left(\frac{1+\frac{1}{2n+1}}{1-\frac{1}{2n+1}}\right) - 1
\end{aligned}$$

(3) Montrer que, pour tout $n \geq 1$,

$$\frac{1}{12n+1} - \frac{1}{12(n+1)+1} \leq \frac{1}{3(2n+1)^2}$$

et

$$\frac{1}{12n} - \frac{1}{12(n+1)} \geq \frac{1}{3((2n+1)^2-1)}$$

Pour tout entier $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{12n+1} - \frac{1}{12(n+1)+1} &= \frac{12n+13-12n-1}{(12n+1)(12(n+1)+1)} \\
&= \frac{12}{(12n+1)(12(n+1)+1)}
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\frac{1}{12n+1} - \frac{1}{12(n+1)+1} - \frac{1}{3((2n+1)^2-1)} &= \frac{12}{(12n+1)(12(n+1)+1)} - \frac{1}{3((2n+1)^2-1)} \\
&= \frac{12}{(12n+1)(12(n+1)+1)} - \frac{1}{12n^2+12n} \\
&= \frac{12}{(12n+1)(12(n+1)+1)} - \frac{1}{12n(n+1)} \\
&= \frac{1}{(12n+1)((n+1)+\frac{1}{12})} - \frac{1}{12n(n+1)}.
\end{aligned}$$

Or il est clair que $(12n+1)((n+1)+\frac{1}{12}) > 12n(n+1)$ donc $\dfrac{1}{(12n+1)((n+1)+\frac{1}{12})} < \dfrac{1}{12n(n+1)}$ et par suite

$$\frac{1}{12n+1} - \frac{1}{12(n+1)+1} - \frac{1}{3((2n+1)^2-1)} < 0$$

qui implique la première inégalité demandée.
De même, pour tout entier $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{12n} - \frac{1}{12(n+1)} - \frac{1}{3((2n+1)^2-1)} &= \frac{1}{12n(n+1)} - \frac{1}{12n(n+1)} \\
&= 0
\end{aligned}$$

donc (il y a même égalité)

$$\frac{1}{12n} - \frac{1}{12(n+1)} - \frac{1}{3((2n+1)^2-1)} \geq 0$$

qui implique la seconde inégalité demandée.

(4) Soit f la fonction définie sur $]0,1[$ par $f(t) = \frac{1}{2t}\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) - 1 - \frac{t^2}{3}$.

(a) Etudier les variations de la fonction g définie sur $]0,1[$ par $g(t) = 2tf(t)$.

Pour tout réel $t \in]0,1[$,

$$g(t) = \ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) - 2t - \frac{2t^3}{3}$$

La fonction g est dérivable sur $]0,1[$ comme composée et somme de fonctions dérivables et

$$g'(t) = \frac{\frac{2}{(1-t)^2}}{\frac{1+t}{1-t}} - 2 - 2t^2 = \frac{2}{1-t^2} - 2(1+t^2) = \frac{2t^4}{1-t^2} > 0$$

d'où l'on déduit que la fonction g est strictement croissante sur $]0,1[$.

(b) En déduire que f est positive.

Les fonctions f et g ont le même signe sur $]0,1[$. Comme $\lim_{t\to 0} g(t) = 0$, la fonction g est strictement croissante sur $]0,1[$ avec une limite nulle en 0 donc la fonction g est strictement positive sur $]0,1[$ et par suite la fonction f aussi.

(5) Soit h la fonction définie sur $]0,1[$ par $h(t) = \frac{t^2}{3(1-t^2)} - \frac{1}{2t}\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) + 1$.

(a) Etudier les variations de la fonction k définie sur $]0,1[$ par $k(t) = 2th(t)$.

Pour tout réel $t \in]0,1[$,

$$k(t) = \frac{2t^3}{3(1-t^2)} - \ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) + 2t.$$

La fonction k est dérivable sur $]0,1[$ comme composée et somme de fonctions dérivables et

$$\begin{aligned} k'(t) &= \frac{2}{3}\left(\frac{3t^2(1-t^2) - t^3(-2t)}{(1-t^2)^2}\right) - \frac{\frac{2}{(1-t)^2}}{\frac{1+t}{1-t}} + 2 \\ &= \frac{2}{3}\frac{t^2(3-t^2)}{(1-t^2)^2} - \frac{2}{1-t^2} + 2 \\ &= \frac{2t^2(3-t^2) - 6(1-t^2) + 6(1-t^2)^2}{(1-t^2)^2} \\ &= \frac{4t^4}{(1-t^2)^2} > 0 \end{aligned}$$

donc la fonction k est strictement croissante sur $]0,1[$.

(b) En déduire le signe de h.

Les fonctions h et k ont le même signe sur $]0,1[$. Comme $\lim_{t\to 0} k(t) = 0$, la fonction k est strictement croissante sur $]0,1[$ avec une limite nulle en 0 donc la fonction k est strictement positive sur $]0,1[$ et par suite la fonction h aussi.

(6) En déduire, pour tout $n \geq 1$, l'encadrement

$$\frac{1}{12n+1} - \frac{1}{12(n+1)+1} \leq d_n - d_{n+1} \leq \frac{1}{12n} - \frac{1}{12(n+1)}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Les questions (4) et (5) permettent d'affirmer l'encadrement suivant :

$$\forall t \in]0,1[,\ \frac{t^2}{3} \leq \frac{1}{2t}\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) - 1 \leq \frac{t^2}{3(1-t^2)}$$

et en appliquant l'encadrement avec $t = \frac{1}{2n+1} \in]0,1[$, on trouve

$$\frac{1}{3(2n+1)^2} \leq d_n - d_{n+1} \leq \frac{1}{3(2n+1)^2(1-(\frac{1}{2n+1})^2)} = \frac{1}{3((2n+1)^2-1)}$$

qui implique, d'après (3),

$$\frac{1}{12n+1} - \frac{1}{12(n+1)+1} \leq d_n - d_{n+1} \leq \frac{1}{12n} - \frac{1}{12(n+1)}$$

(7) Montrer que les suites $(d_n - \frac{1}{12n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(d_n - \frac{1}{12n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes. Soit ℓ leur limite commune.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons

$$a_n = d_n - \frac{1}{12n} \text{ et } b_n = d_n - \frac{1}{12n+1}.$$

D'une part, d'après la partie droite de l'encadrement précédent,

$$a_n - a_{n+1} = d_n - d_{n+1} - \left(\frac{1}{12n} - \frac{1}{12(n+1)}\right) \leq 0$$

ce qui signifie que la suite (a_n) est croissante et d'autre part, d'après la partie gauche de l'encadrement précédent,

$$b_n - b_{n+1} = d_n - d_{n+1} - \left(\frac{1}{12n+1} - \frac{1}{12(n+1)+1}\right) \geq 0$$

ce qui signifie que la suite (b_n) est décroissante.

Enfin, par différence $a_n - b_n = \dfrac{-1}{12n(12n+1)}$ donc

$$\lim(a_n - b_n) = 0.$$

Les suites (a_n) et (b_n) sont donc adjacentes et admettent donc une limite commune.

(8) En déduire l'existence d'un réel C tel que pour tout $n \geq 1$,

$$Cn^{n+\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-n}\mathrm{e}^{\frac{1}{12n+1}} \leq n! \leq Cn^{n+\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-n}\mathrm{e}^{\frac{1}{12n}}$$

et donner un équivalent de $n!$ à l'aide de la constante C.

Puisque $\lim \dfrac{1}{12n} = 0$, la limite ℓ commune aux suites (a_n) et (b_n) est aussi la limite de la suite (d_n). Par conséquent, la suite (v_n) est convergente de limite e^{ℓ}.

Posons $C = \mathrm{e}^{\ell}$.

Le théorème des suites adjacentes assure que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,

$$d_n - \frac{1}{12n} = a_n \leq \ell \leq b_n = d_n - \frac{1}{12n+1}$$

soit encore, puisque $d_n = \ln(v_n)$

$$\ell + \frac{1}{12n+1} \ln(v_n) \leq \ell + \frac{1}{12n}.$$

La fonction exponentielle étant croissante, on obtient

$$C\mathrm{e}^{\frac{1}{12n+1}} \leq v_n \leq C\mathrm{e}^{\frac{1}{12n}}$$

et par définition de v_n, on arrive à

$$Cn^{n+\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-n}\mathrm{e}^{\frac{1}{12n+1}} \leq n! \leq Cn^{n+\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-n}\mathrm{e}^{\frac{1}{12n}}.$$

En quotientant par $Cn^{n+\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-n}$, on a

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{12n+1}} \leq \frac{n!}{Cn^{n+\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-n}} \leq \mathrm{e}^{\frac{1}{12n}}$$

et puisque $\lim \mathrm{e}^{\frac{1}{12n+1}} = \lim \mathrm{e}^{\frac{1}{12n}} = 1$, le théorème de convergence par encadrement implique

$$\lim \frac{n!}{Cn^{n+\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-n}} = 1$$

donc

$$n! \sim Cn^{n+\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-n}.$$

Deuxième partie.

Dans cette partie, on détermine la constante C de l'équivalent de $n!$ trouvé plus haut. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \mathrm{d}x$

(1) Calculer I_0 et I_1.

On trouve

$$I_0 = \frac{\pi}{2} \text{ et } I_1 = \sin(\frac{\pi}{2}) - \sin(0) = 1.$$

(2) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour $n \geq 1$,

$$I_{n+1} = \frac{n}{n+1} I_{n-1}.$$

En déduire les valeurs de I_{2p} et I_{2p+1} en fonction de p.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\begin{aligned}
I_{n+1} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x \cos^2 x \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x (1 - \sin^2 x) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x \mathrm{d}x - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^{n-1} x \sin x \mathrm{d}x \\
&= I_{n-1} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos^n x}{n} \right)' \sin x \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

et par intégration par parties,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos^n x}{n} \right)' \sin x \mathrm{d}x = \left[\frac{\cos^n x}{n} \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos^n x}{n} \right) \cos x \mathrm{d}x$$

donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos^n x}{n} \right)' \sin x \mathrm{d}x = -\frac{1}{n} I_{n+1}$$

et par conséquent

$$I_{n+1} = I_{n-1} - \frac{1}{n} I_{n+1}$$

et cette relation se réécrit

$$I_{n+1} = \frac{n}{n+1} I_{n-1}.$$

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a donc

$$I_{2p+1} = \frac{2p}{2p+1} I_{2p-1}$$

qui fournit par récurrence,

$$I_{2p+1} = \frac{2p(2p-2)\cdots 2}{(2p+1)(2p-1)\cdots 3} I_1$$

expression encore égale à

$$I_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}.$$

Et pour I_{2p}, on a

$$I_{2p} = \frac{2p-1}{2p} I_{2p-2}$$

qui fournit par récurrence,

$$I_{2p} = \frac{(2p-1)(2p-3)\cdots 1}{2p(2p-2)\cdots 2} I_0$$

expression encore égale à

$$I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \frac{\pi}{2}.$$

(3) Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et en déduire la limite de la suite $\left(\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} \right)$.

Puisque $-1 \leq \cos x \leq 1$, on a pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $(\cos x)^{n+1} \leq (\cos x)^n$ et par positivité de l'intégrale, $I_{n+1} \leq I_n$ donc la suite (I_n) est décroissante.

Pour la limite de la suite $\left(\dfrac{I_{2n}}{I_{2n+1}}\right)$, on a par décroissance de la suite (I_n) :

$$1 \leq \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} \leq \frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}} = \frac{2n+1}{2n} = 1 + \frac{1}{2n}$$

et grâce au théorème de convergence par encadrement,

$$\lim \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = 1.$$

(4) Montrer alors que $C = \sqrt{2\pi}$.

D'après les résultats obtenus en (2),

$$\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = \frac{(2n+1)((2n)!)^2}{2^{4n}(n!)^4}\frac{\pi}{2}$$

et d'après l'équivalent de $n!$ trouvé dans la partie 1,

$$\frac{((2n)!)^2}{(n!)^4} \sim \frac{C^2(2n)^{4n+1}\mathrm{e}^{-4n}}{C^4 n^{4n+2}\mathrm{e}^{-4n}} \sim \frac{2^{4n+1}}{C^2 n}$$

donc

$$\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = \frac{(2n+1)((2n)!)^2}{2^{4n}(n!)^4}\frac{\pi}{2} \sim \frac{(2n+1)2^{4n+1}}{2^{4n}C^2 n}\frac{\pi}{2} \sim \frac{2\pi}{C^2}$$

ce qui signifie que $\lim \dfrac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = \dfrac{2\pi}{C^2}$. Or la limite trouvée en (3) et l'unicité de celle-ci impliquent

$$C^2 = 2\pi \text{ soit } C = \sqrt{2\pi}.$$