DEVOIR SURVEILLE 1

5. Quelques sommes

   (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*, \sum\limits_{k=0}^{n} e^{kx} = \dfrac{1-e^{(n+1)x}}{1-e^x}$ puis que $\sum\limits_{k=0}^{n} e^{kx} = e^{\frac{n}{2}x}\left(\dfrac{sh(\frac{(n+1)x}{2})}{sh(\frac{x}{2})}\right)$.

   (b) Donner alors une formule analogue pour $\sum\limits_{k=0}^{n} e^{-kx}$, avec $x \in \mathbb{R}^*$.

   (c) En déduire une formule pour $\sum\limits_{k=0}^{n} ch(kx)$ ne faisant intervenir que du ch et du sh, pour $x \in \mathbb{R}^*$.

Exercice 2: `inspiré d'EscpT 2009`

1. **Question préliminaire :**
   Montrer que $\forall x \in [0,1[,\ x \leq -\ln(1-x)$.
   En déduire que pour tout entier naturel $k \geq 2$, $\frac{1}{k} \leq \ln(k) - \ln(k-1)$.
   Puis que pour tout entier naturel $n \geq 2$, $\sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \leq 1 + \ln(n-1)$.
2. On considère la fonction f définie pour tout x de $[0, +\infty[$ par la relation : $f(x) = \frac{x}{(x+1)^2}$
   Dresser le tableau de variations complet de f.
3. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$ et la relation : pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
   Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $0 < u_n \leq \frac{1}{n}$. Qu'en déduit-on ?
4. On pose, pour tout entier naturel k : $v_k = \frac{1}{u_{k+1}} - \frac{1}{u_k}$.

   (a) Exprimer v_k en fonction de u_k ; en déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $2 \leq v_k \leq 2 + \frac{1}{k}$.

   (b) En calculant $\sum\limits_{k=1}^{n-1} v_k$, montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a :
   $2(n+1) \leq \frac{1}{u_n} \leq 2(n+1) + \sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$

   (c) A l'aide de la question préliminaire, montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{nu_n} = 2$

Exercice 3: `inspiré d'Eslsca 95 et d'hecE 09`

On étudie la suite de Fibonacci $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$

1. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad F_n \in \mathbb{N}$.

   (b) Montrer que la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Dans toute la suite du problème, a et b ($a > b$) désignent les deux solutions de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.

2. (a) Montrer : $b = 1 - a = -\frac{1}{a}$, $\qquad 1 < a < 2$, $\qquad$ et $-1 < b < \frac{-1}{2}$.

   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(a^n - b^n)$.

   (c) En déduire la limite de F_n quand n tend vers $+\infty$.
3. (a) Montrer par récurrence simple et à l'aide de la définition de la suite que :
   $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (F_n)^2 - F_{n+1}F_{n-1} = (-1)^{n+1}$.

   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $F_{n+2}F_{n-1} - F_{n+1}F_n = (-1)^n$.
4. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, $u_n = \frac{F_n}{F_{n-1}}$

   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, $u_{n+2} - u_n = \frac{(-1)^n}{F_{n+1}F_{n-1}}$.

   (b) En déduire les variations des suites $(u_{2n})_{n\geq1}$ et $(u_{2n+1})_{n\geq1}$.

   (c) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$.
   (On pourra factoriser par a^n et a^{n-1}, respectivement au numérateur et au dénominateur de u_n).

   (d) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{F_{2n}}{F_{2n-1}} \leq a \leq \frac{F_{2n+1}}{F_{2n}}$
5. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\beta_n = F_{n+1} - aF_n$

   (a) Exprimer β_n en fonction de b et n. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < \beta_{2n} < 1$.

   (b) Rappeler l'encadrement du cours liant un réel x à sa partie entière $\lfloor x \rfloor$.

   (c) Montrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lfloor aF_{2n} \rfloor = F_{2n+1} - 1$.

Exo I.

Exercice 2: `ESLSCA E 99`

Soit f la fonction définie sur $[-1,+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{\dfrac{1+x}{2}}$ et u la suite définie par :

$$u_0 \in [-1,+\infty[\text{ et pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1}=f(u_n).$$

1. (a) Etudier f puis dresser son tableau de variations complet.
   (b) Résoudre sur $[-1,+\infty[$ l'équation $f(x)=x$ puis l'inéquation $f(x)\geq x$.
   (c) Tracer alors sur un même graphique la courbe représentative de f et la droite d'équation $y=x$.
   (d) Ecrire les instructions Scilab qui permettent de faire afficher la courbe de f et celle de la droite d'équation $y=x$ sur l'intervalle $[-1,10]$.
2. (a) On suppose dans cette question que $u_0=0$. Construire sur le graphique de la question 1.(c) les termes u_1, u_2 et u_3. Quelle conjecture peut-on émettre sur les variations et la limite de la suite u ?
   (b) Comment choisir u_0 pour que la suite soit constante ?
   (c) D'après le graphique, comment suffit-il de choisir u_0 pour que u soit décroissante ?
   (d) Y a-t-il selon vous des valeurs de u_0 pour lesquelles la suite diverge ?
3. On suppose désormais, et dans toute la suite de l'exercice, que $u_0\in[-1,1]$.
   (a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, u_n existe et $-1\leq u_n\leq 1$.
   (b) Déterminer la monotonie de la suite u (on pourra utiliser 1.(b)).
   (c) En déduire que la suite u est convergente et déterminer sa limite.
4. (a) Montrer que pour tout réel $x\geq -1$, $f(x)-1=\frac{x-1}{2+\sqrt{2+2x}}$.
   (b) En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $|u_{n+1}-1|\leq \frac{1}{2}|u_n-1|$.
   (c) Montrer alors que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $|u_n-1|\leq (\frac{1}{2})^{n-1}$ et retrouver la limite de la suite u.
5. (a) Montrer qu'il existe un unique $\varphi\in[0,\pi]$ tel que $u_0=\cos(\varphi)$.
   (b) Rappeler la formule reliant $\cos(2x)$ et $\cos^2(x)$.
   (c) Montrer alors par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=\cos(\frac{\varphi}{2^n})$ et retrouver la limite de (u_n).
   (d) En admettant que $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x^2}=-\frac{1}{2}$, déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}4^n(u_n-1)$.

Exercice 3: `inspiré d'Ecricome S 2003`

On considère la suite de nombres réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=u_n+u_n^2 \qquad \text{et} \quad u_0=a,\ a\in\mathbb{R}_+^*$$

Partie 1 : *Convergence de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

1. Montrer que cette suite est strictement positive et monotone.
2. En raisonnant par l'absurde, montrer que la suite ne peut pas être majorée.
3. En déduire la limite de la suite u.

Partie 2 : *Comportement asymptotique de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\quad v_n=\dfrac{1}{2^n}\ln u_n$

1. Prouver que pour tout entier n de $\mathbb{N}$: $\quad v_{n+1}-v_n=\frac{1}{2^{n+1}}\ln(1+\frac{1}{u_n})$.
2. En déduire que pour tout entier $k\in\mathbb{N}$, $0<v_{k+1}-v_k\leq \frac{1}{2^{k+1}}\ln(1+\frac{1}{a})$
3. En sommant l'encadrement précédent, montrer que $0<v_n-v_0\leq \ln(1+\frac{1}{a})$
4. En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, puis qu'elle converge. On notera α sa limite.
5. Montrer alors que : $\qquad \forall n\in\mathbb{N},\ u_n\leq \exp(\alpha 2^n)$
   On admet pour la suite de l'exercice que l'on pourrait montrer de même : $\forall n\in\mathbb{N},\ \exp(\alpha 2^n)\leq u_n+1$
6. En déduire que $\frac{u_n}{\exp(\alpha 2^n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
7. On pose pour tout $n\in\mathbb{N}$, : $\qquad \beta_n=\exp(\alpha 2^n)-u_n$.
   Montrer que la suite $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $2\beta_n-1=(\beta_{n+1}+\beta_n^2-\beta_n)\exp(-\alpha 2^n)$
8. Jusfier que $(\beta_{n+1}+\beta_n^2-\beta_n)\exp(-\alpha 2^n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
   En déduire que $\exp(\alpha 2^n)-u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$.

Exo II.

Recommandations

Rédigez vos réponses dans un français correct. Terminez chaque résolution d'exercice par une conclusion $\boxed{\textit{encadrée}}$ *ou <u>soulignée</u>. Laissez une marge au correcteur.*

Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre. Dans un exercice avec plusieurs questions, on pourra, si besoin est, admettre le résultat d'une question pour répondre aux suivantes.

La calculatrice n'est pas autorisée.

EXERCICE 1

Soit $a \in \mathbb{R}$. On définit la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ par la donnée de $u_0 = 2$, de $u_1 = 2\cos a$ et de la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+2} = 2(\cos a)u_{n+1} - u_n.$$

Démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = 2\cos na.$$

EXERCICE 2

1. Démontrer par récurrence sur a que, pour tous $a, b, n \in \mathbb{N}$, on a la formule de Vandermonde :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}.$$

Indication : Après avoir fixé $b \in \mathbb{N}$, on considérera, pour tout $a \in \mathbb{N}$, l'assertion

$$\mathscr{P}(a) : \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}$$

dont on démontrera le caractère héréditaire en utilisant au moment opportun la formule de Pascal.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2.$$

À l'aide de la formule de Vandermonde, démontrer que

$$S_n = \binom{2n}{n}.$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}^2.$$

   a) À l'aide du changement d'indice $\ell = n - k$, exprimer T_n en fonction de S_n et en déduire que

$$T_n = \frac{n}{2}\binom{2n}{n}.$$

   b) Retrouver la valeur de T_n à l'aide de la formule du pion et de la relation de Vandermonde.

Exo III.

CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLE 1

Exo I.

(c) f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = \frac{sh(x)-x\,ch(x)}{(sh(x))^2} = \frac{h(x)}{(sh(x))^2}$.
Donc f est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et par parité, f est croissante sur $\mathbb{R}_-^*$.

5. (a) $x \neq 0 \Rightarrow e^x \neq 1$ d'où $\sum\limits_{k=0}^{n} e^{kx} = \sum\limits_{k=0}^{n} (e^x)^k = \frac{1-(e^x)^{n+1}}{1-e^x} = \frac{e^{(n+1)x/2}[e^{-(n+1)x/2}-e^{(n+1)x/2}]}{e^{x/2}[e^{-x/2}-e^{x/2}]}$
(méthode analogue à la factorisation par l'angle moitié)
$= \frac{-e^{(n+1)x/2}}{-e^{x/2}} \frac{e^{(n+1)x/2}-e^{-(n+1)x/2}}{e^{x/2}-e^{-x/2}} = e^{(\frac{(n+1)x}{2}-\frac{x}{2})} \frac{2sh((n+1)x/2)}{2sh(x/2)} = e^{\frac{n}{2}x}[\frac{sh((n+1)x/2}{sh(x/2)}]$.

(b) On applique l'égalité précédente en $-x$ ($-x \in \mathbb{R}^*$ puisque $x \in \mathbb{R}^*$),
d'où $\sum\limits_{k=0}^{n} e^{-kx} = e^{-\frac{n}{2}x}[\frac{sh(-(n+1)x/2)}{sh(-x/2)}] = e^{-\frac{n}{2}x}[\frac{-sh((n+1)x/2)}{-sh(x/2)}] = e^{-\frac{n}{2}x}[\frac{sh((n+1)x/2)}{sh(x/2)}]$ par imparité de sh.

(c) Pour $x \neq 0$, $\sum\limits_{k=0}^{n} ch(kx) = \frac{1}{2}[\sum\limits_{k=0}^{n} e^{kx} + \sum\limits_{k=0}^{n} e^{-kx}] = \frac{1}{2}[e^{\frac{n}{2}x} + e^{-\frac{n}{2}x}]\frac{sh((n+1)x/2)}{sh(x/2)} = ch(nx/2)\frac{sh((n+1)x/2)}{sh(x/2)}$

Exercice 2:

1. Poser $f(x) = -\ln(1-x) - x$ pour $x \in [0,1[$; TV pour obtenir son signe (f croissante sur $[0,1[$ et $f(0)=0$).
Pour tout $k \geq 2$ $x = \frac{1}{k} \in [0,1[$, d'où $\frac{1}{k} \leq -\ln(1-\frac{1}{k}) = -\ln(\frac{k-1}{k}) = -[\ln(k-1) - \ln k] = \ln k - \ln(k-1)$
En sommant ces inégalités, pour k variant de 2 à $n-1$, $\sum\limits_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k} \leq \sum\limits_{k=2}^{n-1} (\ln k - \ln(k-1)) = \ln(n-1) - \ln 1 = \ln(n-1)$
(somme télescopique). Finalement, $\sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \sum\limits_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k} \leq 1 + \ln(n-1)$.

2. f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et $f'(x) = \frac{(x+1)^2 - x*2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{(x+1)-2x}{(x+1)^3} = \frac{1-x}{(x+1)^3}$. Donc f admet un maximum en 1 de valeur $f(1) = 1/4$. De plus, $f(0) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

3. Récurrence : $u_1 = \frac{1}{4} \in [0,1]$. Puis si pour $n \geq 1$, $0 < u_n \leq \frac{1}{n}$, alors par stricte croissance de f sur $[0, \frac{1}{n}] \subset [0,1]$ ($n \geq 1$), $f(0) < f(u_n) \leq f(\frac{1}{n})$, d'où $0 < u_{n+1} \leq f(1/n)$. Or $f(1/n) = \frac{1/n}{(1/n+1)^2} = \frac{n}{(n+1)^2} = \frac{n}{n+1} \times \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$ (car $\frac{n}{n+1} \leq 1$). Conclure. On en déduit par le théorème d'encadrement que la suite (u_n) converge vers 0.

4. a) $v_k = \frac{(u_k+1)^2}{u_k} - \frac{1}{u_k} = \frac{(u_k)^2+2u_k}{u_k} = u_k + 2$. D'où $0 \leq u_k \leq \frac{1}{k} \Rightarrow 2 \leq v_k = u_k + 2 \leq 2 + \frac{1}{k}$.
b) $\sum\limits_{k=1}^{n-1} v_k = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{1}{u_{k+1}} - \frac{1}{u_k} = \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_1}$ (somme télescopique) $= \frac{1}{u_n} - 4$. Puis en sommant l'encadrement du a) pour k variant de 1 à $n-1$, on obtient : $\sum\limits_{k=1}^{n-1} 2 \leq \sum\limits_{k=1}^{n-1} v_k \leq \sum\limits_{k=1}^{n-1} (2 + \frac{1}{k})$ d'où $2(n-1) \leq \frac{1}{u_n} - 4 \leq 2(n-1) + \sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$.
d'où $2(n-1) + 4 \leq \frac{1}{u_n} \leq 4 + 2(n-1) + \sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$. On conclut en remarquant que $2(n-1) + 4 = 2(n+1)$.
c) Le b) donne : $2\frac{n+1}{n} \leq \frac{1}{nu_n} \leq 2\frac{n+1}{n} + \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$. Or $2\frac{n+1}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 2$ et par la question préliminaire, $0 \leq \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \leq \frac{1}{n}(1 + \ln(n-1)) = \frac{1}{n} + \frac{\ln(n-1)}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ (croissances comparées). Donc (théorème d'encadrement), $\frac{1}{nu_n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 2$.

Exercice 3:

1. Par récurrence (double) :supp. pour un certain n,$F_n \in \mathbb{N}$ et $F_{n+1} \in \mathbb{N}$. Alors $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \in \mathbb{N}$.
Monotonie par récurrence (double) : $F_0 \leq F_1$ et comme $F_2 = 1 + 0 = 1$, $F_1 \leq F_2$.
Supposons que pour un certain n, $F_n \leq F_{n+1}$ et $F_{n+1} \leq F_{n+2}$. Il faut montrer que $F_{n+2} \leq F_{n+3}$. Or en sommant les deux inégalités de l'H.R., on obtient : $F_n + F_{n+1} \leq F_{n+1} + F_{n+2}$ d'où $F_{n+2} \leq F_{n+3}$. Conclure.

2. a) $\Delta = 5$; $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $b = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. $\frac{1}{a} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{2(1-\sqrt{5})}{(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})} = \frac{2(1-\sqrt{5})}{-4} = -\frac{1-\sqrt{5}}{2} = -b$.
Puis $4 < 5 < 9 \Rightarrow 2 < \sqrt{5} < 9 \Rightarrow 1 < \frac{3}{2} < a < 2$. Et $-3 < -\sqrt{5} < -2 \Rightarrow -2 < 1 - \sqrt{5} < -1 \Rightarrow -1 < b < -\frac{1}{2}$.
b) Soit par récurrence (le résultat est donné dans l'énoncé), soit reconnaître que (F_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 et appliquer la méthode du cours.
c) $a > 1 \Rightarrow a^n \to +\infty$ et $|b| < 1 \Rightarrow b^n \to 0$. D'où $F_n \to +\infty$ quand $n \to +\infty$.

3. a) Cas $n = 1$: $(F_1)^2 - F_2F_0 = 1^2 - 0 = 1 = (-1)^2$.
Supposons pour un certain $n \geq 1$: $(F_n)^2 - F_{n+1}F_{n-1} = (-1)^{n+1}$ et mq $(F_{n+1})^2 - F_{n+2}F_n = (-1)^{n+2}$.
Or $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ d'où $(F_{n+1})^2 - F_{n+2}F_n = (F_{n+1})^2 - F_{n+1}F_n - (F_n)^2 = (F_{n+1})^2 - F_{n+1}F_n - [(-1)^{n+1} + F_{n+1}F_{n-1}]$ par H.R. $= F_{n+1}[F_{n+1} - F_n - F_{n-1}] - (-1)^{n+1} = 0 + (-1)^{n+2} = (-1)^{n+2}$. Conclure.
b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$: $F_{n+2}F_{n-1} - F_{n+1}F_n = (F_{n+1} + F_n)F_{n-1} - F_{n+1}F_n = F_{n+1}F_{n-1} + F_nF_{n-1} - F_{n+1}F_n = (F_n)^2 - (-1)^{n+1} + F_nF_{n-1} - F_{n+1}F_n$ par a) $= F_n[F_n + F_{n-1} - F_{n+1}] - (-1)^{n+1} = 0 + (-1)^n$.

4. a) Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$. $u_{n+2} - u_n = \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}} - \frac{F_n}{F_{n-1}} = \frac{F_{n+2}F_{n-1} - F_nF_{n+1}}{F_{n+1}F_{n-1}} = \frac{(-1)^n}{F_{n+1}F_n}$ par 3.b)
b) Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = u_{2n}$: $v_{n+1} - v_n = u_{2(n+1)} - u_{2n} = u_{2n+2} - u_{2n} = \frac{(-1)^{2n}}{F_{2n+1}F_{2n-1}} = \frac{1}{F_{2n+1}F_{2n-1}} > 0$.
Donc la suite v est croissante. Faire de même avec l'autre.
c) $u_n = \frac{F_n}{F_{n-1}} = \frac{a^n - b^n}{a^{n-1} - b^{n-1}} = \frac{a^n[1-(b/a)^n]}{a^{n-1}[1-(b/a)^{n-1}]} = a\frac{1-(b/a)^n}{1-(b/a)^{n-1}} \to a$ car $|b/a| < 1$.
d) Donc la suite (u_{2n}) tend vers a, et comme elle est croissante, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{2n} \leq a$. De même pour l'autre côté.

5. a) $\beta_n = \frac{1}{\sqrt{5}}[(a^{n+1} - b^{n+1} - a(a^n - b^n)] = \frac{1}{\sqrt{5}}[ab^n - b^{n+1}] = \frac{1}{\sqrt{5}}b^n[a-b] = b^n$ car $a - b = \sqrt{5}$. D'où $\beta_{2n} = b^{2n} = (b^2)^n$
Or $-1 < b < \frac{-1}{2} \Rightarrow 1 > b^2 > \frac{1}{4} > 0$ ($x \to x^2$ st. décroissante sur $\mathbb{R}^-$) $\Rightarrow 1 > \beta_{2n} > (\frac{1}{4})^n > 0$.
c) par a), on obtient $0 < F_{2n+1} - aF_{2n} < 1$ d'où $F_{2n+1} - 1 < aF_{2n} < F_{2n+1}$, encadrement entre 2 entiers consécutifs car $F_{2n+1} \in \mathbb{N}$ d'où $F_{2n+1} - 1 = \lfloor aF_{2n} \rfloor$.

Exo II.

Eléments de correction du DS 1

Questions

1. Par linéarité, $S_1 = 2\sum_{k=10}^{40} k^2 - 6\sum_{k=10}^{40} k = 2[\sum_{k=1}^{40} k^2 - \sum_{k=1}^{9} k^2] - 6\sum_{k=10}^{40} k = 2[\frac{40*41*81}{6} - \frac{9*10*19}{6}] - 6\frac{31*50}{2}$.

   Formules sur les puissances : $S_2 = (-1)^{-1}2^3 \sum_{k=5}^{30} \frac{(-1)^k(2)^k}{(3^2)^k} = -8\sum_{k=5}^{30}(-\frac{2}{9})^k = -8(-\frac{2}{9})^5\frac{1-(-2/9)^{26}}{1-(-2/9)} = 8(\frac{2}{9})^5\frac{1-(2/9)^{26}}{1+2/9}$.

   Cf DM2, binôme de Newton : $S_3 = \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}4^k3^{n-k} = \frac{1}{n!}[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}4^k3^{n-k} - \binom{n}{0}4^0 3^n] = \frac{1}{n!}[(4+3)^n - 3^n] = \frac{1}{n!}[7^n - 3^n]$.

2. Sur $\mathbb{C}$: $z = 0$ n'est pas solution et tout $z \in \mathbb{C}^*$ s'écrit de manière unique $z = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho > 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$.
   Or $\sqrt{3}+i = 2(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}) = 2e^{i\pi/6}$ et $\rho^4 e^{i4\theta} = 2e^{i\pi/6} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\rho^4 = 2\\ 4\theta = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ pour un } k \in \mathbb{Z}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\rho = 2^{1/4} \text{ car } \rho > 0\\ \exists k \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{\pi}{24} + \frac{2k\pi}{4}\end{array}\right.$
   Avec la contrainte $\theta \in [0, 2\pi[$, il reste 4 arguments possibles $\frac{\pi}{24}$, $\frac{13\pi}{24}$, $\frac{25\pi}{24}$ et $\frac{37\pi}{24}$.
   Finalement, $\mathcal{S} = \{2^{1/4}e^{i\pi/24}, 2^{1/4}e^{i13\pi/24}, 2^{1/4}e^{i25\pi/24}, 2^{1/4}e^{i37\pi/24}\}$

3. L'inéquation est définie sur $\mathbb{R}$. Mais si $x \in]-\infty, -1[$, $x+1 < 0$ et x ne peut pas être solution.
   Sur $[-1, +\infty[$, $x+1 \geq 0$ d'où $|x^2-1| \leq x+1 \Leftrightarrow -(x+1) \leq x^2-1 \leq x+1 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x^2-x-2 \leq 0\\ 0 \leq x^2+x\end{array}\right.$ Or sur $[-1, +\infty[$, $x^2+x = x(x+1) \geq 0 \Leftrightarrow x \in \{-1\} \cup [0, +\infty[$ et pour x^2-x-2 : $\Delta = 9$ deux racines -1 et 2. *Ccl* : $\mathcal{S} = [0, 2] \cup \{-1\}$.

4.
```
a=input('entrer a') ; b=input('entrer b')
if a*b>0 then, disp(log(a*b)),else disp('erreur'),end
```

5. f est définie sur $\mathbb{R}$ d'où $\forall x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ et $f(-x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} = \frac{1/e^x}{(\frac{e^x+1}{e^x})^2} = \frac{(e^x)^2}{e^x(e^x+1)^2} = f(x)$.
   En $-\infty$, pas de F.I. car $e^x \to 0$ d'où $f(x) \to 0$. Puis en $+\infty$, par parité, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

Exercice 1:

1. $e^x - e^{-x} > 0 \Leftrightarrow e^x > e^{-x} \Leftrightarrow x > -x$ (par stricte croissance du ln) $\Leftrightarrow 2x > 0 \Leftrightarrow x > 0$ donc $D = \mathbb{R}_+^*$.

2. a) En 0^+ : $f(x) = \ln(e^x - e^{-x}) \underset{x\to0}{\longrightarrow} -\infty$ car $e^x - e^{-x} \to 1 - 1 = 0$. Asymptote verticale d'équation $x = 0$.
   En $+\infty$: $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ car $e^{-x} \to 0$ et $e^x \to +\infty$.

   b) $\forall x \in D$, $f'(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}} > 0$ car $x \in D$ donc $e^x - e^{-x} > 0$. On en déduit le tableau de variations.
   c) f est strictement croissante (et continue sur D) et l'ensemble des valeurs prises est $f(D) =]-\infty, +\infty[$.
   Comme $0 \in f(D) = \mathbb{R}$, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in D$. En particulier $\alpha > 0$.
   Puis $f(1) = \ln(e - \frac{1}{e}) > 0$ car $e > 2$, $\frac{1}{e} < 1$ donc $e - \frac{1}{e} > 2 - 1 = 1$. D'où $\alpha < 1$.
   d) $f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(e^x - e^{-x}) = 0 \Leftrightarrow e^x - e^{-x} = 1 \Leftrightarrow e^x - 1 - e^{-x} = 0$. Posons $X = e^x > 0$; alors l'équation devient $X - 1 - 1/X = 0 \Leftrightarrow \frac{X^2-X-1}{X} = 0 \Leftrightarrow X^2 - X - 1 = 0$. On obtient une équation du second degré : $\Delta = 5$ donc deux racines $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Or $X > 0$, donc $X = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et finalement, l'unique solution est $\alpha = \ln(\frac{1+\sqrt{5}}{2})$.
   e) Plus généralement $f(x) = y \Leftrightarrow \ln(e^x - e^{-x}) = y \Leftrightarrow e^x - e^{-x} = e^y \Leftrightarrow e^x - e^y - e^{-x} = 0 \Leftrightarrow X - e^y - 1/X = 0 \Leftrightarrow X^2 - e^yX - 1 = 0$. $\Delta = e^{2y} + 4$ donc il y a deux solutions $X = \frac{e^y\pm\sqrt{e^{2y}+4}}{2}$ mais $X > 0 \Rightarrow X = \frac{e^y+\sqrt{e^{2y}+4}}{2}$ car $e^{2y} + 4 > e^{2y}$ donc $\sqrt{e^{2y}+4} > \sqrt{e^{2y}} = e^y$. Et finalement l'unique solution est $x = \ln(X) = \ln(\frac{e^y+\sqrt{e^{2y}+4}}{2})$.

3. a) $e^\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $e^{-\alpha} = \frac{1}{e^\alpha} = \frac{2}{1+\sqrt{5}}$ d'où $f'(\alpha) = ... = \frac{(1+\sqrt{5})^2+2^2}{(1+\sqrt{5})^2-2^2} = \frac{10+2\sqrt{5}}{2+2\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}(\sqrt{5}+1)}{2(1+\sqrt{5})} = \sqrt{5}$.
   b)$f(x) - x = \ln(e^x(1 - e^{-2x})) - x = \ln(e^x) + \ln(1 - e^{-2x}) - x = \ln(1 - e^{-2x}) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc (C) admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote oblique d'équation $y = x$. OU $f(x) - x = \ln(e^x - e^x) - \ln(e^x) = ...$ (formule sur le ln)
   c) Puis $f(x) - x = \ln(1 - e^{-2x}) < 0$ car $\forall x > 0$, $1 - e^{-2x} < 1$; la courbe est en-dessous de (Δ).
   d) Dessiner les asymptotes, la tangente ... puis la courbe.

4. a) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $h'(x) = f'(x) - 1 = \frac{e^x+e^{-x}-(e^x-e^{-x})}{e^x-e^x} = \frac{2e^{-x}}{e^x-e^{-x}} > 0$ car $x > 0$.
   b) D'après 3.b), en posant $y = -e^{-2x} \to 0$, $e^{2x}h(x) = e^{2x}\ln(1 - e^{-2x}) = \frac{\ln(1-e^{-2x})}{e^{-2x}} = -\frac{\ln(1+y)}{y} \to -1$.

Exercice 2:

1. (a) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+x}$ et pour $x > -1$, $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{2\sqrt{1+x}} > 0$. Donc f est strictement croissante et $f(-1) = 0$. En particulier f est positive sur $\mathbb{R}$. En $+\infty$: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ car $\lim_{x\to+\infty} 1 + x = +\infty$.

   (b) Soit $x \in [-1, +\infty[$. $f(x) = x \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1+x}{2}} = x$. Si $x \in [-1, 0[$ $x < 0$ donc n'est pas solution (car $f(x) \geq 0$).
   Sur $[0, +\infty[$, comme $x \geq 0$, $\sqrt{\frac{1+x}{2}} = x \Leftrightarrow \frac{1+x}{2} = x^2 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 1 = 0$. $\Delta = 9$, et les racines sont $r_1 = -1/2 \notin [0, +\infty[$ et $r_2 = 1 \in [0, +\infty[$. Conclusion : pour tout $x \in [-1, +\infty[$, $f(x) = x \Leftrightarrow x = 1$.
   Résolution de l'inéquation :
   si $-1 \leq x < 0$ alors $x < 0 \leq \sqrt{\frac{1+x}{2}}$ (car une racine carré est positive) donc $x < f(x)$.
   Puis si $x \geq 0$; $f(x) \geq x \Leftrightarrow \frac{1+x}{2} \geq x^2$ (car la fonction carré est croissante sur $\mathbb{R}^+$)
   $\Leftrightarrow 2x^2 - x - 1 \leq 0$. D'après l'étude précédente, on obtient (comme $x \geq 0$), $0 \leq x \leq 1$.
   Conclusion : sur $[-1, +\infty[$, $f(x) \geq x \Leftrightarrow x \in [-1, 1]$.

Exo III.

(d) `function y=f(x) ; y=sqrt((1+x)/2) ; endfunction`
`x=-1:0.1:10; fplot2d(x,f) ; plot2d(x,x)`

2. a) u semble croitre et converger vers 1.
b) $u_0 = 1$ car alors $u_1 = f(u_0) = f(1) = 1$ et par récurrence, on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1$.
c) prendre $u_0 > 1$. d) non

3. (a) Par récurrence : *cas* n=0 : d'après l'énoncé $u_0 \in [-1, 1]$.
Supposons que pour un certain n, u_n existe et $-1 \le u_n \le 1$ et mq u_{n+1} existe et $-1 \le u_{n+1} \le 1$.
Or $u_n \ge -1$ donc $\frac{1+u_n}{2} \ge 0$ et u_{n+1} existe. Puis $-1 \le u_n \le 1 \Rightarrow f(-1) \le f(u_n) \le f(1)$ (par croissance de f) $\Rightarrow 0 \le u_{n+1} \le 1 \Rightarrow -1 \le 0 \le u_{n+1} \le 1$. *Ccl.*
(b) $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$. Or par 1.(b), pour tout $x \in [-1, 1]$, $f(x) \ge x$ càd $f(x) - x \ge 0$.
Donc en $x = u_n \in [-1, 1]$, $f(u_n) - u_n \ge 0$: la suite u est croissante.
(c) La suite u est croissante et majorée par 1, donc elle converge. Soit $l \in [-1, 1]$ sa limite. Par passage à la limite dans la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, on obtient $l = f(l) \Leftrightarrow l = 1$ par 1.(b)

4. (a) Quantité conjuguée : $f(x) - 1 = \sqrt{\frac{1+x}{2}} - 1 = \frac{\frac{1+x}{2}-1}{\sqrt{\frac{1+x}{2}}+1} = \frac{x-1}{2(\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{2}}+1)} = \frac{x-1}{\sqrt{2}\sqrt{x+1}+2} = \frac{x-1}{\sqrt{2+2x}+2}$.
(b) $|u_{n+1} - 1| = |f(u_n) - 1| = \frac{|u_n-1|}{2+\sqrt{2+2u_n}} \le \frac{|u_n-1|}{2}$ car $2 + \sqrt{2 + 2u_n} \ge 2$.
(c) Par récurrence : *cas* $n = 0$: $|u_0 - 1| \le 2$ car $-1 \le u_0 \le 1 \Rightarrow -2 \le u_0 - 1 \le 0 \Rightarrow |u_0 - 1| \le 2$ et $(\frac{1}{2})^{0-1} = 2$.
Supposons que pour un certain n : $|u_n - 1| \le (\frac{1}{2})^{n-1}$. Alors par b) puis par H.R., on a :
$|u_{n+1} - 1| \le \frac{1}{2}|u_n - 1| \le \frac{1}{2}(\frac{1}{2})^{n-1} = (\frac{1}{2})^n$ *Ccl.*
Comme $-1 < \frac{1}{2} < 1$, $(\frac{1}{2})^{n-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc (théorème d'encadrement) $|u_n - 1| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ càd $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

5. (a) Sur $[0, \pi]$, cos est st. décroissante (et continue) et prend une seule fois toutes les valeurs entre 1 et -1.
(b) $\cos(2x) \big(= (\cos(x + x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos^2(x) - (1 - \cos^2(x)) \big) = 2\cos^2(x) - 1$.
(c) *Cas* $n = 0$: $\cos(\frac{\varphi}{2^0}) = \cos(\varphi) = u_0$. Supposons pour un certain $n \ge 0$ que $u_n = \cos(\frac{\varphi}{2^n})$. Alors
$u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}} = \sqrt{\frac{1+\cos(\frac{\varphi}{2^n})}{2}} = \sqrt{\frac{1+\cos(\frac{2\varphi}{2^{n+1}})}{2}} = \sqrt{\frac{1+(2\cos^2(\frac{\varphi}{2^{n+1}})-1)}{2}} = \sqrt{\cos^2(\frac{\varphi}{2^{n+1}})} = |\cos(\frac{\varphi}{2^{n+1}})|$
$= \cos(\frac{\varphi}{2^{n+1}})$ puisque $n \ge 0 \Rightarrow n + 1 \ge 1 \Rightarrow 0 \le \frac{\varphi}{2^{n+1}} \le \frac{\pi}{2}$ (car $\varphi \in [0, \pi]$) $\Rightarrow \cos(\frac{\varphi}{2^{n+1}}) \ge 0$ *Ccl.*
Comme $\frac{\varphi}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on retrouve que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \cos(0) = 1$.
(d) $4^n(u_n - 1) = \frac{u_n-1}{[1/(2^n)]^2} = \frac{\cos(\frac{\varphi}{2^n})-1}{[1/(2^n)]^2} = \varphi^2 \frac{\cos(\frac{\varphi}{2^n})-1}{(\frac{\varphi}{2^n})^2} = \varphi^2 \frac{\cos(x)-1}{x^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\frac{1}{2} \times \varphi^2$ en posant $x = \frac{\varphi}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 3: Partie I

1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. *Cas* $n = 0$: $u_0 = a > 0$.
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n > 0$. Alors $u_{n+1} = u_n + u_n^2 \ge u_n > 0$. *Ccl.* Puis $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = u_n^2 \ge 0$ donc la suite est croissante. OU montrer qu'elle est croissante donc minorée par $u_0 > 0$, donc strictement positive.
2. Supposons que la suite est majorée. Alors comme elle est croissante, elle converge : soit l sa limite. En passant à la limite dans la relation $u_{n+1} = u_n + u_n^2$ on obtient $l = l + l^2 \Leftrightarrow l^2 = 0 \Leftrightarrow l = 0$. Contradiction, car la suite étant croissante, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \ge u_0 = a$ donc $l \ge a > 0$.
3. u est croissante et non majorée donc u diverge vers $+\infty$.

II

1. $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2^{n+1}} \ln(u_{n+1}) - \frac{1}{2^n} \ln(u_n) = \frac{1}{2^{n+1}} \ln(u_n + u_n^2) - \frac{2}{2^{n+1}} \ln(u_n) = \frac{1}{2^{n+1}}[\ln(u_n + u_n^2) - \ln(u_n^2)]$
$= \frac{1}{2^{n+1}}[\ln(\frac{u_n+u_n^2}{u_n^2})] = \frac{1}{2^{n+1}} \ln(1 + \frac{1}{u_n})$
2. Soit $k \in \mathbb{N}$. Par croissance de la suite u, on a $u_k \ge u_0 = a$ d'où $\frac{1}{u_k} \le \frac{1}{a}$ et $\ln(1 + \frac{1}{u_n}) \le \ln(1 + \frac{1}{a})$. On en déduit par 1., $v_{k+1} - v_k = \frac{1}{2^{k+1}} \ln(1 + \frac{1}{u_k}) \le \frac{1}{2^{k+1}} \ln(1 + \frac{1}{a})$.
Par ailleurs, comme $u_k > 0$, on obtient $1 + \frac{1}{u_k} > 1$ et $\ln(1 + \frac{1}{u_k}) > 0$. D'où $v_{k+1} - v_k = \frac{1}{2^{k+1}} \ln(1 + \frac{1}{u_k}) > 0$.
3. Par 2. : $\sum_{k=0}^{n-1} 0 < \sum_{k=0}^{n-1}(v_{k+1} - v_k) \le \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^{k+1}} \ln(1 + \frac{1}{a})$. D'où $0 < v_n - v_0 \le \frac{1}{2} \ln(1 + \frac{1}{a}) \sum_{k=0}^{n-1} (\frac{1}{2})^k = \frac{1}{2} \ln(1 + \frac{1}{a}) \frac{1-(1/2)^n}{1-1/2}$
$= (\ln(1 + \frac{1}{a})(1 - (\frac{1}{2})^n) \le \ln(1 + \frac{1}{a})$.
4. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \le \ln(1 + \frac{1}{a}) + v_0$ donc la suite (v_n) est majorée. Comme elle est de plus croissante (puisque pour tout $k \in \mathbb{N}$, $v_{k+1} - v_k > 0$), elle converge.
5. v croissante implique que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \le \alpha$. D'où $\frac{1}{2^n} \ln(u_n) \le \alpha$, et $\ln(u_n) \le 2^n\alpha$, puis $u_n \le \exp(2^n\alpha)$.
6. On a donc l'encadrement : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exp(2^n\alpha) - 1 \le u_n \le \exp(2^n\alpha)$ d'où $1 - \exp(-2^n\alpha) \le \frac{u_n}{\exp(2^n\alpha)} \le 1$. Le théorème d'encadrement permet alors de conclure.
7. Les deux inégalités du 5. permettent d'écrire : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \le \exp(2^n\alpha) - u_n \le 1$. Donc la suite β est bornée.
De plus, $\beta_{n+1} + \beta_n^2 - \beta_n = \exp(\alpha 2^{n+1}) - u_{n+1} + (\exp(\alpha 2^n) - u_n)^2 - (\exp(\alpha 2^n) - u_n) = [\exp(\alpha 2^n)]^2 - u_n - u_n^2 + [\exp(\alpha 2^n)]^2 - 2u_n \exp(\alpha 2^n) + u_n^2 - \exp(\alpha 2^n) + u_n = \exp(\alpha 2^n)[2\exp(\alpha 2^n) - 2u_n - 1]$. D'où le résultat ....
8. La suite β étant bornée entre 0 et 1, on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \le \beta_{n+1} + \beta_n^2 - \beta_n \le 2$
d'où $-1 \times \exp(-\alpha 2^n) \le (\beta_{n+1} + \beta_n^2 - \beta_n)\exp(-\alpha 2^n) \le 2\exp(-\alpha 2^n)$ et d'après le théorème d'encadrement, $(\beta_{n+1} + \beta_n^2 - \beta_n)\exp(-\alpha 2^n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ càd $2\beta_n - 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ soit encore $\beta_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$.

EXERCICE 2

1. Démontrer par récurrence sur a que, pour tous $a, b, n \in \mathbb{N}$, on a la formule de Vandermonde $\sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}$.

   Fixons $b \in \mathbb{N}$.

   <u>Initialisation :</u> Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{0}{k}\binom{b}{n-k} = \binom{0}{0}\binom{b}{n-0} = \binom{0+b}{n},$$

   puisque les autres termes de la somme sont nuls. Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

   <u>Hérédité :</u> Fixons $a \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}(a)$ est vraie et démontrons $\mathscr{P}(a+1)$. On a

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n} \binom{a+1}{k}\binom{b}{n-k} \\
= &\sum_{k=0}^{n} \left\{\binom{a}{k} + \binom{a}{k-1}\right\}\binom{b}{n-k} && \text{par la formule de Pascal} \\
= &\sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k-1}\binom{b}{n-k} \\
= &\sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k} + \sum_{k=1}^{n} \binom{a}{k-1}\binom{b}{n-k} && \text{car } \binom{a}{-1} = 0 \\
= &\sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k} + \sum_{\ell=0}^{n-1} \binom{a}{\ell}\binom{b}{n-1-\ell} && \text{en posant } \ell = k-1 \text{ dans la deuxième somme} \\
= &\binom{a+b}{n} + \binom{a+b}{n-1} && \text{d'après } \mathscr{P}(a) \text{ appliquée pour } n \text{ et } n-1 \\
= &\binom{a+1+b}{n} && \text{par la formule de Pascal,}
\end{aligned}$$

   donc $\mathscr{P}(a+1)$ est vraie.

   <u>Conclusion :</u> D'après le principe de récurrence, la propriété $\mathscr{P}(a)$ est vraie pour tout $a \in \mathbb{N}$. Par suite, on peut affirmer que

$$\boxed{\forall a, b, n \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}.}$$

2. *Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$. Démontrer que $S_n = \binom{2n}{n}$.*

   En choisissant $a = b = n$ dans la formule de Vandermonde, on obtient

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \binom{2n}{n}.$$

   Or, d'après la formule de symétrie, on a $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ pour tout $k \in [\![0; n]\!]$, donc

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = S_n.$$

   En combinant ces résultats, on obtient finalement

$$\boxed{S_n = \binom{2n}{n}.}$$

Exo IV.

3. *Soit* $n \in \mathbb{N}$. *On pose* $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}^2$.

   a) *À l'aide du changement d'indice* $\ell = n-k$, *exprimer* T_n *en fonction de* S_n *et en déduire la valeur de* T_n.

   En effectuant le changement d'indice $\ell = n-k$ dans la somme définissant T_n, on obtient

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{\ell=0}^{n}(n-\ell)\binom{n}{n-\ell}^2 \\ &= \sum_{\ell=0}^{n}(n-\ell)\binom{n}{\ell}^2 && \text{par la formule de symétrie} \\ &= n\sum_{\ell=0}^{n}\binom{n}{\ell}^2 - \sum_{\ell=0}^{n}\ell\binom{n}{\ell}^2 \\ &= nS_n - T_n, \end{aligned}$$

   donc

$$\boxed{T_n = \frac{n}{2}S_n.}$$

   On en conclut que

$$\boxed{T_n = \frac{n}{2}\binom{2n}{n}.}$$

   b) *Retrouver la valeur de* T_n *à l'aide de la formule du pion et de la relation de Vandermonde.*

   On a

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}^2 \\ &= \sum_{k=0}^{n} k\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}\binom{n}{k} && \text{par la formule du pion} \\ &= n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}\binom{n}{k} && \text{car } \binom{n-1}{-1} = 0 \\ &= n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{n-k}\binom{n}{k} && \text{par la formule de symétrie} \\ &= n\binom{2n-1}{n} && \text{par la formule de Vandermonde} \\ &= n\frac{(2n-1)!}{n!(n-1)!} \\ &= n\frac{n}{2n}\frac{(2n)!}{n!\,n!}, \end{aligned}$$

   donc

$$\boxed{T_n = \frac{n}{2}\binom{2n}{n}.}$$