DEVOIR SURVEILLE 2

Lycée Fénelon
Classe de BCPST 1 2006/2007

Devoir surveillé
25/11/2006

DEVOIR SURVEILLÉ 2

(durée : 3 h 30)

Rédigez vos réponses dans un français correct. Terminez chaque résolution d'exercice par une conclusion $\boxed{\textit{encadrée}}$ *ou* <u>*soulignée*</u>*. Laissez une marge au correcteur.*

Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre. Dans un exercice, on pourra, si besoin est, admettre le résultat d'une question pour répondre aux suivantes.

La calculatrice n'est pas autorisée.

Exercice 1

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \frac{1}{2}\Big(u_n + \frac{2}{u_n}\Big).$$

1. Représenter la dynamique de la suite (u_n). Émettre une conjecture et la démontrer. En déduire le comportement asymptotique de la suite (u_n).
2. a) Vérifier que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2u_n}$$

   et en déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} - \sqrt{2} \leqslant (u_n - \sqrt{2})^2.$$

   b) Démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n - \sqrt{2} \leqslant (\sqrt{2} - 1)^{2^n}.$$

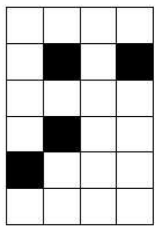
   c) Déterminer une valeur n_0 pour laquelle u_{n_0} fournit une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-3} près par excès. Calculer u_{n_0} (on donnera le résultat sous forme d'une fraction).

   Indication numérique : $\dfrac{1}{\ln 2} \ln\left(\dfrac{-3\ln 10}{\ln(\sqrt{2}-1)}\right) \approx 2,97$

Exercice 2

On donnera les résultats sous forme de produits, sans chercher à les calculer.

Une grille de mots croisés est un tableau rectangulaire de longueur n et de hauteur p, constitué de $n \times p$ cases dont certaines sont noircies et d'autres non !



1. Dans cette question, on considère les grilles 4×6 avec 4 cases noires dont un exemplaire est représenté ci-contre.
   a) Combien peut-on former de telles grilles différentes ?
   b) Parmi ces grilles, combien d'entre-elles ont
      α] au moins un coin noirci ?
      β] exactement deux coins noircis ?
      γ] exactement une case noire par colonne ?
      δ] exactement une case noire par colonne et au plus une case noire par ligne ?
2. On s'intéresse à présent aux grilles de $n \times p$ cases dont k sont noires (avec $k \in [\![1; np]\!]$).
   a) Combien peut-on former de telles grilles différentes ?
   b) Parmi ces grilles, combien d'entre-elles ont
      α] au plus une case noire par colonne ?
      β] au plus une case noire par colonne et au plus une case noire par ligne ?

Exo I.

Exercice 1 :

On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

1) Calculer $P \times Q$. En déduire que P est inversible et donner P^{-1}

2) a) Calculer A^2 (on exprimera A^2 à l'aide de A)

   b) En déduire, à l'aide d'une démonstration par l'absurde, que A n'est pas inversible.

   c) Montrer, par récurrence, que $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$, $A^k = 2^{k-1}.A$

3) Pour tout réel $\alpha \in \mathbb{R}^*$, on pose $B_\alpha = A + \alpha.I_3$

   a) Sans poser de produit matriciel, montrer que :
   $(B_\alpha)^2 = x_2.A + y_2.I_3$ avec x_2 et y_2 réels à préciser en fonction de α

   b) Préciser la valeur des réels $x_0\,, y_0$ et $x_1\,, y_1$ vérifiant : $(B_\alpha)^0 = x_0.A+y_0.I_3$ et $(B_\alpha)^1 = x_1.A+y_1.I_3$

   c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe deux réels x_n et y_n tels que $(B_\alpha)^n = x_n.A + y_n.I_3$

4) a) Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ une expression de y_n en fonction de n uniquement.

   b) Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $x_{n+2} - 2\,(\alpha+1)\,x_{n+1} + \alpha(\alpha+2)\,x_n = 0$
   En déduire l'expression de x_n en fonction de n uniquement

   c) A l'aide de ce qui précède déterminer, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, les coefficients de $(B_\alpha)^k$.

5) Pour tout réel $\alpha \in \mathbb{R}^*$ avec $\alpha \neq -2$, on pose $C_\alpha = \left(\dfrac{(\alpha+2)^{-1} - \alpha^{-1}}{2} \right).A + \alpha^{-1}.I_3$

   Montrer que, si $\alpha \in \mathbb{R}^*$ avec $\alpha \neq -2$, la matrice B_α est inversible avec $(B_\alpha)^{-1} = C_\alpha$.

6) On pose $M = P \times A \times Q$ et pour $t \in \mathbb{R}$ fixé, $M_t = M + t.I_3$

   a) Sans calculer les coefficients de M ni ceux de M^2, montrer que $M^2 = 4.M$
   On admet qu'on montrerait alors par récurrence que $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$, $M^k = 4^{k-1}.M$

   b) A l'aide de la formule du binôme dont on justifiera l'emploi, montrer que :

   $$\forall\, n \geq 2\ , \quad (\,M_t\,)^n = t^n.I + w_n.M_t \qquad \text{avec } w_n \text{ réel à exprimer en fonction de } n \text{ et } t$$

   (Donner l'expression la plus simple de w_n, avec seulement n , t et des constantes... mais pas de $\sum$!)

Exercice 2 :

On considère la suite $(P_n)_n$ de polynômes définie par :

$$P_0(X) = 2\ ,\ P_1(X) = X \quad \text{et} \quad \forall\, n \geq 2\ , \quad P_n(X) = X\,P_{n-1}(X) - P_{n-2}(X)$$

1) a) Calculer $P_2(X)$ et $P_3(X)$

   b) Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Calculer $\left(z + \dfrac{1}{z}\right)^3$. En déduire que $P_3\left(z + \dfrac{1}{z}\right) = z^3 + \dfrac{1}{z^3}$

2) Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, P_n est un polynôme unitaire de degré n.

3) On pose $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $a_n = P_{2n}(0)$. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de a_n en fonction de n

4) a) Montrer par récurrence que, pour $z \in \mathbb{C}^*$ fixé, on a : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $P_n\left(z + \dfrac{1}{z}\right) = z^n + \dfrac{1}{z^n}$.
   Justifier que cette relation reste vraie pour $n = 0$. Elle est alors valable pour tout $n \in \mathbb{N}$

Exo II.

b) A l'aide de 4.a), montrer que $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n(2\cos\theta) = 2\cos(n\theta)$

5) a) On pose $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $x_k = 2\cos\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$

Montrer que $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, x_k est une racine de P_n.

On admet pour la suite que ces racines sont deux à deux distinctes.

b) En déduire que $P_n(X) = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}\left[X - 2\cos\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}\right)\right]$

6) On admet que $P_5(X) = X^5 - 5X^3 + 5X$.

a) Résoudre l'équation $z^2 - 5z + 5 = 0$. En déduire les solutions de l'équation $z^4 - 5z^2 + 5 = 0$

b) A l'aide de 6.a), déterminer la factorisation de P_5 dans $\mathbb{R}[X]$

c) En comparant cette factorisation à celle obtenue en 5.b) determiner les valeurs de $\cos(\dfrac{\pi}{10})$.

Exercice 3 :

Soit $(b_n)_n$ la suite de nombres réels définie par : $b_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n+1}{k}b_k$

On considère aussi la suite de polynômes $\Big(B_n(X)\Big)_n$ définie par :

$$B_0(X) = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad B_n(X) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}b_k X^{n-k}$$

1) a) Calculer b_1 et montrer que $b_2 = \frac{1}{6}$

b) Calculer $B_1(X)$ et montrer que $B_2(X) = X^2 - X + c$ avec c réel à préciser.

2) a) A l'aide de la définition de $B_n(X)$, préciser, pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, le degré de B_n et montrer que :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $B_n(0) = (-1)^n b_n$

b) A l'aide de la définition de b_{n-1}, prouver que, pour $n \geq 2$ fixé, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n}{k}b_k = 0$

En déduire que $\forall n \geq 2$, $B_n(1) = B_n(0)$

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On admet que : $B_n(X+1) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_{n-k}(1)\,X^k$

Montrer que $B_n(X+1) - B_n(X) = n\,X^{n-1}$

4) Soit $p \in \mathbb{N}$ et $r \in \mathbb{N}$. On pose $S_{p,r} = \displaystyle\sum_{k=0}^{p}k^r$

En utilisant 3) avec un "n" bien choisi, exprimer $S_{p,r}$ en fonction de p , de r et de valeurs prise par le polynôme $B_{r+1}(X)$

Exercice 4 :

Dans cet exerice, pour $L = \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \cdots & \ell_n \end{pmatrix} \in M_{1,n}(\mathbb{R})$ et $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, on pose

$$A = C \times L \quad \text{et} \quad s = L \times C$$

1) a) Calculer les coefficients de la matrice A de $M_n(\mathbb{R})$

On admet pour la suite que s est un nombre avec $s = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}c_k\,l_k$

b) A l'aide des propriétés du produit matriciel, montrer, sans passer par le calcul de ses coefficients, que : $A^2 = s.A$

2) On pose $B = I_n + A$

a) Exprimer B^2 à l'aide de B , I_n et de s

b) On suppose dans cette question que $s \neq -1$.
Montrer que B est inversible et donner B^{-1} à l'aide de B et de I_n

c) On suppose dans cette question que $s = -1$.
En raisonnant par l'absurde, montrer que B n'est pas inversible.

3) On considère désormais une matrice inversible $M \in GL_n(\mathbb{R})$ et on pose $N = A + M$

a) Calculer $M \times (I_n + M^{-1} \times A)$. En déduire l'équivalence :

$$I_n + M^{-1} \times A \text{ inversible} \quad \Leftrightarrow \quad N \text{ inversible}$$

(On pourra d'abord prouver "$\Rightarrow$" puis montrer "$\Leftarrow$")

b) En remarquant que $M^{-1} \times C = K \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, et en appliquant ce qui précède, montrer que :

$$N \text{ est inversible} \quad \Leftrightarrow \quad L \times M^{-1} \times C \neq -1$$

c) On suppose que N est inversible, donner une expression de N^{-1} à l'aide de M^{-1} , L et de C

Exercice 1 :

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 3$, on pose $\forall x > 0$, $f_n(x) = x - n\,\ln(x)$.
Dans tout ce qui suit, n est un entier fixé quelconque avec $n \geq 3$. On pourra utiliser le fait que $2 < e < 3$

1) a) Déterminer $\lim\limits_{x \to 0^+} f_n(x)$ et prouver que $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$
   b) Prouver que $f_n(n) < 0$
   c) Dresser le tableau de variations de f_n
2) a) Justifier que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution dans $]0, n[$. On note u_n cette solution.
   b) Calculer $f_n(1)$ et $f_n(e)$. En déduire que $1 < u_n < e$
   c) Montrer que $f_n(u_{n+1}) = \ln(u_{n+1})$. A l'aide de 2b), prouver que la suite $(u_n)_n$ monotone.
   d) Montrer que la suite $(u_n)_n$ converge.
   On note $L = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$. Prouver que $\ln(L) \geq 0$
   e) En raisonnant par l'absurde et en utilisant le fait que $f_n(u_n) = 0$, montrer que $L = 1$
3) a) Montrer que $\dfrac{\ln(u_n)}{u_n - 1} = \dfrac{u_n}{n\,(u_n - 1)}$.
   b) On admet que $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{x - 1} = 1$. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} n\,(u_n - 1)$
4) a) Justifier que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution dans $]n, +\infty[$. On note v_n cette solution.
   b) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$
   c) Prouver que $f_n(n\,\ln n) = -n\,\ln(\ln n)$. En déduire que $n\,\ln(n) \leq v_n$
   d) Déterminer la signe de $f_n(2\,n\,\ln n)$ (On admet que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $k > 2\,\ln(k)$)
   En déduire que $n\,\ln(n) \leq v_n \leq 2\,n\,\ln(n)$
   e) A l'aide de $f_n(v_n) = 0$ et de 4.d), prouver que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{v_n}{n\,\ln(n)} = 1$.

Problème :

Lorsque f est une fonction continue sur le segment $[-1, 1]$, on définit les réels :

$$I(f) = \int_{-1}^{1} f(t)\,dt \qquad \text{et} \qquad S(f) = \frac{f(-1) + 4\,f(0) + f(1)}{3}$$

L'objectif de ce problème est de montrer que $S(f)$ est une valeur approchée de l'intégrale $I(f)$ à ε près c'est à dire d'établir une inégalité du type : $|I(f) - S(f)| \leq \varepsilon$.
Cette méthode de calcul approché d'intégrale s'appelle méthode de Simpson.

Partie A :

1) On pose $\forall x \in [-1, 1]$ $\varphi(x) = \cos\left(\dfrac{\pi\,x}{2}\right)$.
   Calculer $S(\varphi)$ et montrer que $I(\varphi) = \dfrac{k}{\pi}$ avec k entier à préciser.
   On admet qu'on a : $|I(f) - S(f)| \leq \dfrac{4}{9}$. Ainsi, $S(\varphi)$ est une valeur approchée de $I(\varphi)$ à $\dfrac{4}{9}$ près.

Exo III.

MATHÉMATIQUES – DEVOIR SURVEILLÉ N° 1

9 septembre 2016 – Durée : 3 heures – Calculatrices interdites

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante de l'appréciation des copies. Tout résultat ou conclusion doit être mis en avant (encadrez, soulignez).
L'usage de documents, d'une calculatrice ou de tout matériel électronique est interdit.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

EXERCICE 1 – COURS, INÉQUATIONS

Les questions de cet exercice sont toutes indépendantes. On précisera bien les propriétés des fonctions usuelles utilisées.

1. Rappeler la définition de la fonction valeur absolue.
2. Pour A une partie de $\mathbb{R}$, donner la définition de « La partie A est majorée par le réel M ».
3. Pour A une partie de $\mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{R}$, donner la définition de « m est le minimum de A ».
4. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et $a \in \mathbb{R}$. Donner l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a.
5. Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction. Donner la définition de « f est décroissante sur l'intervalle I ».
6. Résoudre l'inéquation $x^3 - 1 \geqslant 0$, d'inconnue réelle x.
7. Résoudre l'inéquation $|2x+1| \leqslant |x-1|$, d'inconnue réelle x.
8. Résoudre l'inéquation $\sqrt{x+2} < x$, d'inconnue réelle x.

EXERCICE 2 – PARTIE ENTIÈRE

On considère la fonction $f\colon x \mapsto \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$ où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière du réel x.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Rappeler l'encadrement de x à l'aide de sa partie entière $\lfloor x \rfloor$.
2. Déterminer l'ensemble de définition de f.
3. Montrer que f est périodique de période 1.
4. Déterminer une expression simplifiée de $f(x)$ pour $x \in [0,1[$.
5. Dans un repère orthonormé, tracer la courbe de f sur $[-2;2[$.

EXERCICE 3 – ÉTUDE D'UNE FONCTION

On considère la fonction $h\colon x \longmapsto \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.

1. Déterminer le domaine de définition $\mathscr{D}_h$ de h.
2. Étudier la parité de h.
3. Dresser le tableau de variation complet de h sur $\mathscr{D}_h$.
4. On considère la fonction $g\colon x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$, définie sur $\mathbb{R}$.
   (a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) \in]-1,1[$.
   (b) Déterminer la fonction composée $g \circ h$.
   (c) Justifier que la composée $h \circ g$ est définie sur $\mathbb{R}$ puis déterminer une expression simple de celle-ci.

Exo IV.

CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLE 2

Exo I.

Exercice 2

Une grille de mots croisés est un tableau rectangulaire de longueur n et de hauteur p, constitué de $n \times p$ cases dont certaines sont noircies et d'autres non !

1. *Dans cette question, on considère les grilles 4×6 avec 4 cases noires.*

   a) *Combien peut-on former de telles grilles différentes ?*

   Une grille étant entièrement déterminée par la position des cases noires, il suffit de choisir simultanément 4 cases noires parmi les 24 cases de la grille, ce qui fournit

   $$\boxed{\binom{24}{4} \text{ grilles différentes.}}$$

   b) *Parmi ces grilles, combien d'entre-elles ont*

   α] *au moins un coin noirci ?*

   Il est plus aisé de dénombrer le complémentaire, c'est-à-dire les grilles qui n'ont aucun coin noirci. Pour constituer ces grilles, on choisit 4 cases noires parmi les 20 cases de la grille qui ne sont pas des coins, ce qui donne $\binom{20}{4}$ grilles sans coin noirci. On en déduit qu'

   $$\boxed{\text{il y a } \binom{24}{4} - \binom{20}{4} \text{ grilles avec au moins un coin noirci.}}$$

   β] *exactement deux coins noircis ?*

   Pour constituer de telles grilles, on doit choisir successivement :

   - ► 2 coins parmi les 4 coins, ce qui laisse $\binom{4}{2}$ possibilités ;
   - ► 2 autres cases parmi les 20 cases qui ne sont pas des coins, ce qui laisse $\binom{20}{2}$ possibilités.

   Donc

   $$\boxed{\text{il y a } \binom{4}{2} \times \binom{20}{2} \text{ grilles avec exactement deux coins noircis.}}$$

   γ] *exactement une case noire par colonne ?*

   Pour constituer de telles grilles, on doit choisir successivement :

   - ► 1 case parmi les 6 cases de la première colonne, ce qui laisse 6 choix possibles ;
   - ► 1 case parmi les 6 cases de la deuxième colonne, ce qui laisse 6 choix possibles ;
   - ► 1 case parmi les 6 cases de la troisième colonne, ce qui laisse 6 choix possibles ;
   - ► 1 case parmi les 6 cases de la quatrième colonne, ce qui laisse 6 choix possibles.

   Donc

   $$\boxed{\text{il y a } 6^4 \text{ grilles avec exactement une case noire par colonne.}}$$

   δ] *exactement une case noire par colonne et au plus une case noire par ligne ?*

   Pour constituer de telles grilles, on doit choisir successivement :

   - ► 1 case parmi les 6 cases de la première colonne, ce qui laisse 6 choix possibles ;
   - ► 1 case parmi les 5 cases de la deuxième colonne qui ne sont pas dans la ligne de la première case noire, ce qui laisse 5 choix possibles ;
   - ► 1 case parmi les 4 cases de la troisième colonne qui ne sont pas dans les lignes des deux premières cases noires, ce qui laisse 4 choix possibles ;
   - ► 1 case parmi les 3 cases de la quatrième colonne qui ne sont pas dans les lignes des trois premières cases noires, ce qui laisse 3 choix possibles.

   Donc

   $$\boxed{\begin{array}{l}\text{il y a } 6 \times 5 \times 4 \times 3 \text{ grilles avec exactement une case} \\ \text{noire par colonne et au plus une case noire par ligne.}\end{array}}$$

Exo II.

2. *On s'intéresse à présent aux grilles de $n \times p$ cases dont k sont noires (avec $k \in [\![1; np]\!]$).*

   a) *Combien peut-on former de telles grilles différentes ?*

   Une grille étant entièrement déterminée par le choix simultané k cases noires parmi les np cases de la grille, ce qui fournit

   $$\boxed{\binom{np}{k} \text{ grilles différentes.}}$$

   b) *Parmi ces grilles, combien d'entre-elles ont*

   α] *au plus une case noire par colonne ?*

   Pour constituer de telles grilles, on doit choisir successivement :

   - k colonnes parmi les n colonnes de la grille, ce qui laisse $\binom{n}{k}$ possibilités ;
   - 1 case parmi les p cases dans chacune des k colonnes choisies, ce qui laisse p^k possibilités.

   Donc

   $$\boxed{\text{il y a } \binom{n}{k} \times p^k \text{ grilles avec au plus une case noire par colonne.}}$$

   β] *au plus une case noire par colonne et au plus une case noire par ligne ?*

   Pour constituer de telles grilles, on doit choisir successivement :

   - k colonnes parmi les n colonnes de la grille, ce qui laisse $\binom{n}{k}$ possibilités ;
   - 1 case parmi les p cases de la première colonne choisie, ce qui laisse p possibilités ;
   - 1 case parmi les $p-1$ cases de la deuxième colonne choisie qui ne sont pas dans la ligne de la première case noire, ce qui laisse $p-1$ possibilités ;
   - 1 case parmi les $p-2$ cases de la troisième colonne choisie qui ne sont pas dans la ligne des deux premières cases noires, ce qui laisse $p-2$ possibilités ;
   - etc
   - 1 case parmi les $p-k+1$ cases de la k-ème colonne choisie qui ne sont pas dans la ligne des $k-1$ premières cases noires, ce qui laisse $p-k+1$ possibilités.

   Donc

   $$\boxed{\begin{array}{l}\text{il y a } \binom{n}{k} \times p(p-1)\cdots(p-k+1) \text{ grilles avec au plus} \\ \text{une case noire par colonne et au plus une case noire par ligne}\end{array}}$$

1ECS	Devoir n° 5	2014-2015

Exercice 1 :

1) $P\times Q = \begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix} = 2I$ donc $P\times(\frac{1}{2}Q) = I$ d'où $\boxed{P \text{ inversible et } P^{-1} = \frac{1}{2}Q}$ 1

2a) $A^2 = \begin{pmatrix}0&4&0\\0&4&0\\-6&6&4\end{pmatrix} = 2A$ $\boxed{\text{d'où } A^2 = 2A}$

2b) supposons A inversible alors A^{-1} existe

on a $A^2 = 2A$ donc $A^{-1}\times A^2 = A^{-1}\times(2A)$ or $A^{-1}\times A^2 = \underbrace{A^{-1}\times A}_{=I}\times A = I\times A = A$ or $A^{-1}\times 2A = 2\underbrace{A^{-1}\times A}_{=I} = 2I$

donc on aurait $A = 2I$ ce qui est faux d'où $\boxed{A \text{ n'est pas inversible}}$

2c) • on suppose que pour k fixé, $A^k = 2^{k-1}.A$ c'est H_k

on sait que $A^{k+1} = \underbrace{A^k\times A}_{\text{d'après } H_k} = (2^{k-1}.A)\times A = 2^{k-1}.A^2 \underset{\text{par 2a}}{=} 2^{k-1}.2A = 2^k.A = 2^{(k+1)-1}.A$ c'est H_{k+1}

• Ici H_1 vraie car $A^1 = 2^0.A = 1.A$

• Ccl : d'après le th. de récurrence, $\boxed{\forall k\in\mathbb{N}^*\ A^k = 2^{k-1}.A}$

3a) $(B_\alpha)^2 = (A+\alpha I)^2 = \underbrace{A^2}_{=2A} + 2\alpha\underbrace{A\times I}_{=A} + \underbrace{(\alpha I)^2}_{=\alpha^2 I}$ (ici $A\times I = I\times A = A$ donc A et I commutent et on peut utiliser la formule du binôme)

d'où $(B_\alpha)^2 = 2A + 2\alpha A + \alpha^2 I$ ainsi $(B_\alpha)^2 = 2(\alpha+1)A + \alpha^2 I$

$\boxed{\text{d'où } x_2 = 2(\alpha+1) \text{ et } y_2 = \alpha^2}$

3b) $(B_\alpha)^0 = I = 0.A + 1.I$ donc $\boxed{x_0 = 0 \text{ et } y_0 = 1}$

$(B_\alpha)^1 = B_\alpha = 1.A + \alpha.I$ donc $\boxed{x_1 = 1 \text{ et } y_1 = \alpha}$

3c) on suppose que pour $n\in\mathbb{N}$ fixé, il existe deux réels x_n et y_n tq $(B_\alpha)^n = x_n.A + y_n.I$ c'est H_n

on sait que $(B_\alpha)^{n+1} = (B_\alpha)^n\times B_\alpha$ donc $(B_\alpha)^{n+1} = \underbrace{(x_nA + y_nI)}_{=(B_\alpha)^n \text{ par } H_n}\times\underbrace{(A+\alpha I)}_{\text{par déf. de } B_\alpha}$

d'où $(B_\alpha)^{n+1} = (x_nA)\times A + (x_nA)\times(\alpha I) + (y_nI)\times A + (y_nI)\times(\alpha I)$) on déplace les réels

$= x_nA^2 + x_n\alpha\underbrace{A\times I}_{=A} + y_n\underbrace{I\times A}_{=A} + \alpha y_n\underbrace{I\times I}_{=I}$

$= x_n(2A) + x_n\alpha A + y_n A + \alpha y_n I$

d'où $(B_\alpha)^{n+1} = \underbrace{[x_n(\alpha+2)+y_n]}_{=x_{n+1}\in\mathbb{R}}.A + \underbrace{\alpha y_n}_{=y_{n+1}\in\mathbb{R}} I$ on crée ainsi deux réels x_{n+1} et y_{n+1} tq $(B_\alpha)^{n+1} = x_{n+1}.A + y_{n+1}.I$ c'est H_{n+1}

De plus H_0, H_1 et H_2 sont vraies d'après 3a) et 3b)

Ccl : D'après le th. de récurrence, $\forall n\in\mathbb{N}$ H_n vraie

cad $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}\ \exists(x_n,y_n)\in\mathbb{R}^2 \text{ tq } (B_\alpha)^n = x_n.A + y_n I \text{ les réels } x_n \text{ et } y_n \text{ étant définis par : } \forall n\in\mathbb{N}\ x_{n+1} = (\alpha+2)x_n + y_n \text{ et } y_{n+1} = \alpha y_n}$

4a) on a $\forall n\in\mathbb{N}$ $y_{n+1} = \alpha y_n$ la suite $(y_n)_n$ est géométrique de raison α

D'où $\exists\lambda\in\mathbb{R}$ tq $\forall n\in\mathbb{N}$ $y_n = \lambda\alpha^n$

or $y_0 = 1$ et $y_0 = \lambda\alpha^0 = \lambda$ donc $\lambda = 1$ alors $\forall n\in\mathbb{N}$ $y_n = 1.\alpha^n$ $\boxed{\text{cad } \forall n\in\mathbb{N}\ y_n = \alpha^n}$

Exo III.

6a) $\Pi = P\times A\times Q$ donc $\Pi^2 = (P\times A\times Q)(P\times A\times Q) = P\times A\times \underbrace{(Q\times P)}_{=2I}\times A\times Q = P\times \underbrace{A\times 2I\times A}_{=2A^2}\times Q$

d'où $\Pi^2 = 2.P\times \underbrace{A^2}_{=2A}\times Q = 2P\times(2A)\times Q = 4P\times A\times Q = 4\Pi$ ainsi $\boxed{\Pi^2 = 4\Pi}$ (3)

6b) $I\times\Pi = \Pi\times I = \Pi$ donc I et Π commutent et on peut utiliser la formule du binôme

$$(\Pi_t)^n = (\Pi + tI)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\Pi^k\underbrace{(tI)^{n-k}}_{=t^{n-k}.I} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}t^{n-k}\Pi^k\times I$$

on déplace les réels

or $\forall k\geq 1$ $\Pi^k = 4^{k-1}.\Pi$ donc on isole le terme pour $k=0$ du reste du Σ - on a :

$$(\Pi_t)^n = \underbrace{\binom{n}{0}}_{=1}\underbrace{t^{n-0}}_{=t^n}\underbrace{\Pi^0}_{=I}\times I + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}t^{n-k}\underbrace{\Pi^k}_{=4^{k-1}.\Pi \text{ car ici } k\geq 1}\times I$$

d'où $(\Pi_t)^n = t^n.I + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}t^{n-k}4^{k-1}.\Pi = t^n.I + \underbrace{4^{-1}}_{=\frac{1}{4}}.\underbrace{\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}t^{n-k}4^{k}}.\Pi$

$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}4^k t^{n-k} - \binom{n}{0}4^0 t^n$

$= (4+t)^n - 1.1.t^n$

Alors $\boxed{(\Pi_t)^n = t^n I + \frac{1}{4}[(4+t)^n - t^n].\Pi \text{ et } w_n = \frac{(4+t)^n - t^n}{4}}$

Exercice 2 :

1a) $P_2(X) = XP_1(X) - P_0(X) = \boxed{X^2 - 2 = P_2(X)}$ et $P_3(X) = XP_2(X) - P_1(X) = \boxed{X^3 - 3X = P_3(X)}$

1b) $\left(z+\frac{1}{z}\right)^3 = z^3 + 3z^2.\frac{1}{z} + 3z\times\frac{1}{z^2} + \left(\frac{1}{z}\right)^3 = z^3 + 3z + 3\frac{1}{z} + \frac{1}{z^3}$

d'où $P_3\left(z+\frac{1}{z}\right) = \left(z+\frac{1}{z}\right)^3 - 3.\left(z+\frac{1}{z}\right) = z^3+3z+3\frac{1}{z}+\frac{1}{z^3} - 3z - \frac{3}{z} = \boxed{z^3 + \frac{1}{z^3} = P_3\left(z+\frac{1}{z}\right)\ \forall z\in\mathbb{C}^*}$

2) on suppose que pour $n\geq 2$ fixé on a : P_n polynôme unitaire de degré n
et P_{n-1} polynôme unitaire de degré $n-1$ c'est H_n

on sait que $P_{n+1}(X) = XP_n(X) - P_{n-1}(X)$

donc $P_{n+1}(X) = X[1.X^n + \underbrace{\cdots\cdots}_{\text{termes de deg}\leq n-1}] - [1.X^{n-1} + \underbrace{\cdots\cdots}_{\text{termes de deg}\leq n-2}]$

$= 1.X^{n+1} + \underbrace{\cdots\cdots}_{\text{termes de deg}\leq n}$ d'où P_{n+1} est unitaire de deg $n+1$ c'est H_{n+1}

de plus H_2 est vraie car $P_2(X) = 1.X^2 - 2$ donc P_2 est unitaire de deg 2
et $P_1(X) = 1.X$ donc P_1 est unitaire de deg 1

Concl : D'après le th. de récurrence, $\forall n\geq 2$ H_n vraie ainsi $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*\ P_n \text{ unitaire de degré } n}$

3) On a $\forall n\in\mathbb{N}$ $P_{2n+2}(X) = XP_{2n+1}(X) - P_{2n}(X)$ donc $\underbrace{P_{2n+2}(0)}_{=a_{n+1}} = 0.P_{2n+1}(0) - \underbrace{P_{2n}(0)}_{=a_n}$

ainsi $\forall n\in\mathbb{N}$ $a_{n+1} = -a_n$

La suite $(a_n)_n$ est géométrique de raison -1 donc $\exists\lambda\in\mathbb{R}$ tq $\forall n\in\mathbb{N}$ $a_n = \lambda.(-1)^n$

or $a_1 = P_2(0) = -2$ et $a_1 = \lambda(-1)^1 = -\lambda$ donc $\lambda = 2$ d'où $\forall n\in\mathbb{N}^*$ $a_n = 2(-1)^n$

de plus $a_0 = P_0(0) = 2 = 2(-1)^0$ l'égalité reste vraie ainsi $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}\ a_n = 2(-1)^n}$

Exercice 4 : (7)

1a) $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$, $(l_1\ l_2\ l_3 \dots l_n) = L$

$$\begin{pmatrix} c_1l_1 & c_1l_2 & c_1l_3 & \dots & c_1l_n \\ c_2l_1 & c_2l_2 & c_2l_3 & \dots & c_2l_n \\ c_3l_1 & c_3l_2 & c_3l_3 & \dots & c_3l_n \\ \vdots \\ c_nl_1 & c_nl_2 & c_nl_3 & \dots & c_nl_n \end{pmatrix} = C \times L = A$$

le coeff ligne i colonne j de A noté a_{ij} est égal à $a_{ij} = c_i \times l_j$

Rq : $s = L \times C = (l_1\ l_2\ l_3 \dots l_n) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = c_1l_1 + c_2l_2 + c_3l_3 + \dots + c_nl_n = \sum_{k=1}^{n} c_kl_k$

1b) $A^2 = A \times A = (C \times L) \times (C \times L) = C \times \underbrace{(L \times C)}_{= s \in \mathbb{R}} \times L \underset{\text{on déplace les réels}}{=} s \cdot C \times L = s \cdot A$ d'où $\boxed{A^2 = sA}$

2a) $B = I + A$ or ici $I \times A = A \times I = A$ donc on peut utiliser la formule du binôme.

$B^2 = (I+A)^2 = \underbrace{I^2}_{=I} + 2\underbrace{I \times A}_{=A} + \underbrace{A^2}_{=sA} = I + 2A + sA$ d'où $B^2 = I + (s+2)A$

or $A = B - I$ donc $B^2 = I + (s+2)(B - I) = (s+2)B + \underbrace{(1-(s+2))}_{=-s-1} I$ d'où $\boxed{B^2 = (s+2)B - (s+1)I}$

2b) si $s \neq -1$ alors $s+1 \neq 0$ donc d'après 2a) $\frac{1}{s+1} B^2 = \frac{1}{s+1}\left[(s+2)B - (s+1)I\right] = \frac{s+2}{s+1} B - 1 \cdot I$

d'où $I = \frac{s+2}{s+1} B - \frac{1}{s+1} B^2 = \frac{s+2}{s+1} I \times B - \frac{1}{s+1} B \times B = \left[\frac{s+2}{s+1} I - \frac{1}{s+1} B\right] \times B = I$

Ainsi $\boxed{B \text{ est inversible et } B^{-1} = \frac{s+2}{s+1} I - \frac{1}{s+1} B}$

2c) Ici $s = -1$ et on suppose que B est inversible cad que B^{-1} existe.

on sait que $B^2 = (s+2)B - (s+1)I \underset{\text{ici } s=-1}{=} 1 \cdot B - 0 \cdot I$ donc $B^2 = B$

or B^{-1} existe donc $\underbrace{B^{-1} \times B^2}_{= B^{-1} \times B \times B = I \times B = B} = B^{-1} \times B$ d'où $B = I$ d'où $A + I = I$

alors $A = 0$

Or si $A = 0$ alors tous les coeff de A sont nuls donc $\forall i \in [\![1,n]\!]$ $\forall j \in [\![1,n]\!]$ $a_{ij} = 0$

En particulier pour ceux de la diagonale $\forall k \in [\![1,n]\!]$ $a_{kk} = 0$ donc $s = \sum_{k=1}^{n} a_{kk} = \sum_{k=1}^{n} 0 = 0$

on obtient $s = 0$ ce qui contredit le fait que $s = -1$

$\boxed{\text{Finalement, si } s = -1 \text{ alors } B \text{ n'est pas inversible}}$

3) a) $\Pi \times (I_n + \Pi^{-1}A) = \Pi \times I_n + \Pi \times \Pi^{-1} \times A = \Pi + I \times A = \Pi + A = N = \Pi \times (I_n + \Pi^{-1} \times A)$

($\Rightarrow$) on suppose que $I + \Pi^{-1}A$ inversible

on sait que Π est inversible donc $N = \Pi \times (I_n + \Pi^{-1}A)$ est un produit de matrices inversibles

Ainsi N est inversible.

($\Leftarrow$) on suppose que N est inversible.

on a $N = \Pi \times (I + \Pi^{-1}A)$ avec Π inversible donc Π^{-1} existe

Ainsi $\Pi^{-1} \times N = \underbrace{\Pi^{-1} \times \Pi}_{=I} \times (I + \Pi^{-1}A) = I \times (I + \Pi^{-1}A)$ d'où $\Pi^{-1} \times N = I + \Pi^{-1}A$

la matrice $I + \Pi^{-1}A$ est donc égale à $\Pi^{-1} \times N$ - c'est un produit de matrices inversibles

donc $I + \Pi^{-1}A$ est inversible.

Ccl : on a bien l'équivalence : $\boxed{I + \Pi^{-1}A \text{ inversible} \Leftrightarrow N \text{ inversible.}}$

 3

Exercice 1. (1)

1 a) $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ et donc $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} f_n(x) = +\infty}$ $\forall x>0$, $f_n(x) = x\left(1 - n\frac{\ln x}{x}\right)$ 3

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ (croissance comparé) ; d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - n\frac{\ln x}{x} = 1 \Rightarrow \boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty}$

1b) $f_n(n) = n(1-\ln n)$; mais, $n \geqslant 3 > e$. D'où $\ln n > \ln(e) = 1 \Rightarrow \boxed{f_n(n) < 0}$

1c) f_n est dérivable sur $]0,+\infty[$, comme somme de fonctions dérivables. 4

$\forall x>0$, $f_n'(x) = 1 - \frac{n}{x} = \frac{x-n}{x}$; $f_n'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant n$

On a donc le tableau de variation :

x	0		n		$+\infty$
$f_n'(x)$		$-$	0	$+$	
$f_n(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f_n(n)$	$\nearrow$	$+\infty$

2a) f_n est continue, strictement décroissante sur $]0,n[$. Elle réalise 4

donc une bijection de $]0,n[$ sur $]f_n(n),+\infty[$. Or avec 1b), $f_n(n) < 0$

On en déduit que $0 \in]f_n(n),+\infty[$. Ainsi, $\boxed{\text{il existe un unique } x \in]0,n[\text{ tq } f_n(x) = 0}$ 4

on pose $u_n = x$

2b) $\boxed{f_n(1) = 1} > 0$ et $\boxed{f_n(e) = e - n} < 0$ On en déduit que $f_n(e) < 0 < f_n(1)$

On a donc $f_n(e) < f_n(u_n) < f_n(1)$. Comme f_n est décroissante sur $]0,n[$

On en déduit que $\boxed{1 < u_n < e}$

2c). $f_n(u_{n+1}) = u_{n+1} - n\ln(u_{n+1})$. Mais par définition de u_{n+1}, on a :

$f_n(u_{n+1}) = 0 \Leftrightarrow u_{n+1} - (n+1)\ln(u_{n+1}) = 0$. Donc $u_{n+1} - n\ln(u_{n+1}) = \ln(u_{n+1})$ 4

On a donc $\boxed{f_n(u_{n+1}) = \ln(u_{n+1})}$.

. On a $u_{n+1} > 1$ (cf 2b) ; ce qui donne $f_n(u_{n+1}) = \ln(u_{n+1}) > 0 = f_n(u_n)$

On a donc $f_n(u_{n+1}) > f_n(u_n)$. Comme f_n est décroissante sur $]0,n[$

et que u_n, u_{n+1} sont des éléments de $]0,n[$ (cf 2b)

On a donc $u_{n+1} < u_n$. $\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est donc décroissante}}$

2d) elle est minorée par 1 (cf 2b), on en déduit que (u_n) converge

On a vu que $1 < u_n < e$ et $(U_n)_n$ converge vers L donc on peut faire tendre n vers $+\infty$ dans l'inégalité.

Ce qui donne $\boxed{1 \leqslant L \leqslant e}$ On en déduit $L \geqslant 1$. D'où $\boxed{\ln(L) \geqslant 0}$

2e) On a vu que $f_n(u_n) = 0$. D'où $u_n - n\ln(u_n) = 0$. D'où $u_n = n\ln(u_n)$ 4

Si $L > 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(u_n) = \ln(L) > 0$. D'où $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln(u_n) = +\infty}$

Mais $n\ln(u_n) = u_n$. On a donc aussi $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln(u_n) = L}$

ceci est absurde. On en déduit $L \leqslant 1$. Mais on a vu que $L \geqslant 1$

On en déduit que $\boxed{L = 1}$

Exo IV.

Or $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \frac{\ln(\ln n)}{\ln n} = 0$; Par encadrement, nous avons : (3)

$\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln(v_n)}{\ln n} = 1$; On peut en conclure : $\boxed{\lim_{n \to +\infty} \frac{v_n}{n \ln n} = 1.}$

Problème :

A1) $S(\varphi) = \frac{1}{3}\left[\cos(-\pi/2) + 4\cos 0 + \cos(\pi/2)\right] = 4/3$

$I(\varphi) = \int_{-1}^{1} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx = \left[\frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{\pi}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \left(\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)\right) = \frac{4}{\pi}$

On en déduit que $\boxed{S(\varphi) = \frac{4}{3} \text{ et } I(\varphi) = \frac{4}{\pi}}$ (d'où $k = 4$)

A2) $I(P) = \int_{-1}^{1}(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3)dx = a_0\int_{-1}^{1} dx + a_1\int_{-1}^{1} x\, dx + a_2\int_{-1}^{1} x^2 dx + a_3\int_{-1}^{1} x^3 dx$

$= a_0[x]_{-1}^{1} + a_1\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1} + a_2\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} + a_3\left[\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{1} = a_0 \times (1+1) + a_1 \times 0 + a_2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right) + a_3 \times 0$

Nous obtenons donc $\boxed{I(P) = 2a_0 + \frac{2}{3}a_2}$ ainsi $\boxed{\lambda = 2 \text{ et } \mu = \frac{2}{3}}$

$S(P) = 1/3\left[P(-1) + 4P(0) + P(1)\right] = 1/3\,(a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + 4a_0 + a_0 + a_1 + a_2 + a_3)$

$= 1/3\,(6a_0 + 2a_2) = 2a_0 + 2/3\, a_2$

On peut en conclure que $\boxed{S(P) = I(P) \text{ pour } P \in \mathbb{R}_3[X]}$

A3a) $\boxed{R(0) = R(1) = R(-1) = 0}$ et $R'(X) = -3X^2 + 1 \Rightarrow \boxed{R'(0) = 1.}$

A3b) $S(R) = 1/3\,(R(-1) + 4R(0) + R(1)) = 0$ et $I(R) = S(R)$ (d'après A2 car $\deg P \leq 3$)

On en déduit que $\boxed{I(R) = 0 \text{ et } S(R) = 0}$

A4a) On a $P_1(0) = P_1'(0)$: 0 est une racine d'ordre au moins 2 et X^2 divise P_1

On en déduit qu'il existe $Q(X)$ tel que $P_1(X) = X^2 Q(X)$

Or on a que $P_1(-1) = 0$. On en déduit que l'on peut mettre en facteur

$X - (-1) = X + 1 \Rightarrow$ il existe $\tilde{Q}$ tel que $P_1(X) = X^2(X+1)\tilde{Q}(X)$

On en déduit $\deg \tilde{Q} \leq 0 \Rightarrow \tilde{Q}(X) = cste$ $\boxed{\text{Il existe donc } \alpha \text{ tel que } P_1(X) = X^2(X+1)\alpha}$ Comme $\deg P_1 \leq 3$

A4b) On a $P_1(X) = \alpha X^2(X+1) = \alpha X^3 + \alpha X^2$; $P_1(1) = 1$ et $P_1(1) = 2\alpha$.

On en déduit que $\alpha = 1/2$ puis que $\boxed{P_1(X) = 1/2\, X^2(X+1)}$

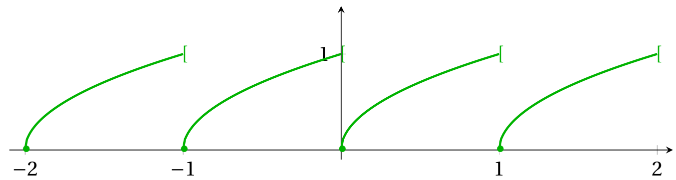
A5a) on a $\forall x \in \mathbb{R}$ $P_f(x) = f(-1)\, P_{-1}(x) + f(0)\, P_0(x) + f(1) P_1(x) + f'(0)\, R(x)$

Ainsi $P_f(X) = \underbrace{f(-1)}_{\text{réel}}\ \underbrace{P_{-1}(X)}_{\text{polynôme de } \mathbb{R}_3[X]} + \underbrace{f(0)}_{\text{réel}}\ \underbrace{P_0(X)}_{\text{polynôme de } \mathbb{R}_3[X]} + \underbrace{f(1)}_{\text{réel}}\ \underbrace{P_1(X)}_{\text{polynôme de } \mathbb{R}_3[X]} + \underbrace{f'(0)}_{\text{réel}}\ \underbrace{R(X)}_{\text{polynôme de } \mathbb{R}_3[X]}$

Donc P_f est une somme de polynôme de deg ≤ 3

Ainsi P_f est un polynôme de degré ≤ 3 càd $\boxed{P_f \in \mathbb{R}_3[X]}$

5.



EXERCICE 3 – ÉTUDE D'UNE FONCTION

On considère la fonction $h\colon x \longmapsto \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

1. Déterminer le domaine de définition $\mathscr{D}_h$ de h. La fonction $x \mapsto \frac{1+x}{1-x}$ est une fonction rationnelle donc définie sur $\{x \in \mathbb{R} \mid 1-x \neq 0\} = \mathbb{R}\setminus\{1\}$.
La fonction ln est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, donc par composée,

$$\mathscr{D}_h = \left\{x \in \mathbb{R}\setminus\{1\} \;\middle|\; \frac{1+x}{1-x} > 0\right\}$$

On a :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1+x$		$-$	0	$+$		$+$	
$1-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$\frac{1+x}{1-x}$		$-$	0	$+$	‖	$-$	

Donc

$$\boxed{\mathscr{D}_h =]-1,1[}$$

2. Soit $x \in]-1,1[$. Alors $-x$ appartient à $]-1,1[$ et

$$h(-x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{\frac{1+x}{1-x}}\right) = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = -h(x)$$

Par conséquent, $\boxed{\text{la fonction } h \text{ est impaire.}}$

3. h est dérivable sur $\mathscr{D}_h$ et, notant $u(x) = \frac{1+x}{1-x}$, on a : $u'(x) = \frac{(1-x)+(1+x)}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1-x)^2}$ et

$$h'(x) = \frac{1}{2}\frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{1}{2}\frac{2}{(1-x)^2}\frac{1-x}{1+x} = \frac{1}{(1-x)(1+x)} > 0$$

car sur $]-1,1[$, $(1-x)(1+x) > 0$. La fonction h est donc strictement croissante sur $\mathscr{D}_h$.
Calculons les limites aux bornes de $\mathscr{D}_h$.
D'après le tableau de signe ci-dessus, $\lim\limits_{x\to(-1)^+} \frac{1+x}{1-x} = 0^+$.

Or $\lim\limits_{X\to 0^+} \ln(X) = -\infty$, donc $\boxed{\lim\limits_{x\to(-1)^+} h(x) = -\infty}$. Puisque h est impaire, on en déduit immédiatement que $\boxed{\lim\limits_{x\to 1^-} h(x) = +\infty}$. Le tableau de variation de h est

x	-1		1
h	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖

Exo V.

4. On considère la fonction $g\colon x \longmapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, définie sur $\mathbb{R}$.

(a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors,
— puisque $e^{-x} > 0$, on a $-e^{-x} < e^{-x}$. De plus $e^x + e^{-x} > 0$, donc

$$g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} < \frac{e^x + e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 1$$

— de même, $e^x > -e^x$ et on obtient,

$$g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} > \frac{-e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = -1$$

En résumé, on a : $-1 < g(x) < 1$, c'est-à-dire $g(x) \in]-1,1[$.
On aurait aussi pu étudier la fonction g.

(b) La fonction $g \circ h$ est définie sur $\{x \in \mathscr{D}_h \mid h(x) \in \mathscr{D}_g\} =]-1,1[$ car $\mathscr{D}_g = \mathbb{R}$.
Soit alors $x \in]-1,1[$.

$$(g \circ h)(x) = g(h(x)) = \frac{e^{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)} - e^{-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}}{e^{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)} + e^{-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}}$$

Or,

$$e^{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)} = e^{\ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)} = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \qquad \text{et} \qquad e^{-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)} = e^{\ln\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)} = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

Ainsi,

$$(g \circ h)(x) = \frac{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} = \frac{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} \times \frac{\sqrt{(1+x)(1-x)}}{\sqrt{(1+x)(1-x)}} = \frac{(1+x)-(1-x)}{(1+x)+(1-x)} = \frac{2x}{2} = x$$

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ (g \circ h)(x) = x}$$

(c) La fonction $h \circ g$ est définie sur $\{x \in \mathscr{D}_g \mid g(x) \in]-1,1[\} =_R$ d'après la question 4a.
Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$(h \circ g)(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1 + \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}}{1 - \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{(e^x + e^{-x}) + (e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{e^x}{e^{-x}}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(e^{2x}\right) = x$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ (h \circ g)(x) = x}$$

EXERCICE 4

1. (a) Soient deux réels a et b strictement positifs.

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqslant 2 &\iff \frac{a^2+b^2}{ab} \geqslant 2 \\
&\iff a^2 + b^2 \geqslant 2ab && \text{car } ab > 0 \\
&\iff a^2 - 2ab + b^2 \geqslant 0
\end{aligned}$$

(b) Soient deux réels a et b strictement positifs. Alors $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$. Ainsi, dans les équivalences précédentes, la dernière inégalité est vraie car le carré d'un nombre réel est toujours positif. On en déduit la première inégalité est également vraie.

$$\boxed{\forall a > 0, \forall b > 0,\ \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqslant 2}$$