DEVOIR SURVEILLE 1

BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Conception : EDHEC

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHÉMATIQUES

mardi 3 mai 2016, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Ils ne doivent faire usage d'aucun document. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*** *Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = \dfrac{e^{-x}}{x}$.

On considère également la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, valable pour tout entier naturel n.

1) a) Dresser le tableau de variation de f, limites comprises.

b) Vérifier que chaque terme de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est parfaitement défini et strictement positif.

2) Les scripts suivants renvoient, pour celui de gauche, la valeur 5, et pour celui de droite, la valeur 6. Que sait-on de u_5 et u_6 ? Quelle conjecture peut-on émettre sur le comportement de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

```
u = 1
n = 0
while u > 0.00001
u = exp(-u)/u
n = n+1
end
disp(n)
```

```
u = 1
n = 0
while u < 100 000
u = exp(-u)/u
n = n+1
end
disp(n)
```

3) a) Étudier les variations de la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ g(x) = e^{-x} - x^2$.

b) En déduire que l'équation $f(x) = x$, d'inconnue x, possède une seule solution, que l'on notera α, sur $\mathbb{R}_+^*$.

c) Montrer que $\dfrac{1}{e} < \alpha < 1$.

4) a) Établir les deux inégalités : $u_2 > u_0$ et $u_3 < u_1$.

b) En déduire les variations des suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

Exo I.

Devoir à la maison 5   à rendre le jeudi 24 novembre

Exercice 1:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On effectue $2n$ lancers indépendants d'une pièce truquée où la probabilité d'obtenir pile est $p \in]0,1[$.

1. Déterminer Ω et introduire des événements élémentaires liés à l'expérience.
2. On introduit pour tout $i \in [\![1, 2n]\!]$ l'événement A_i " on obtient pile pour la première fois au lancer i", ainsi que l'événement A_0 "on n'obtient aucun pile".
   (a) Calculer $P(A_i)$ pour tout $i \in [\![0, 2n]\!]$. *On pensera à distinguer le cas* $i = 0$.
   (b) Vérifier par le calcul que $\sum_{i=0}^{2n} P(A_i) = 1$. Comment aurait-on pu faire sinon ?
3. On introduit pour tout $j \in [\![2, 2n]\!]$ l'événement B_j "pour la première fois, on obtient deux résultats identiques aux lancers $j-1$ et j".
   (a) Expliciter B_2, B_3 et B_4.
   (b) Expliciter alors B_{2j} et B_{2j+1} pour $j \geq 1$.
   (c) En déduire leur probabilité.

Exercice 2:

Soient $p_1, p_2 \in]0,1[$. On considère deux pièces de monnaie notées A_1 et A_2. Pour la pièce A_1 (resp. A_2), la probabilité d'obtenir face est p_1 (resp. p_2). On effectue une succession de lancers selon la règle suivante :

- pour le premier lancer, on choisit une pièce au hasard, et on la lance.
- pour le n^{ie} lancer (avec $n \geq 2$), on utilise la pièce A_1 si le lancer $n-1$ a donné face, et la pièce A_2, si le lancer $n-1$ a donné pile.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on introduit les événements F_n "le n^{ie} lancer a donné face", et on pose $u_n = P(F_n)$.

1. Exprimer u_1 en fonction de p_1 et p_2, puis u_2 en fonction de u_1 (et p_1, p_2).
2. Montrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = (p_1 - p_2)u_n + p_2$.
3. Donner l'expression générale de u_n en fonction de n et u_1, puis préciser la limite u de la suite (u_n).
4. Donner une condition nécessaire et suffisante sur p_1 etp_2 pour que $u = \frac{1}{2}$.

Devoir à la maison 5   à rendre le jeudi 24 novembre

Exercice 3:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On effectue $2n$ lancers indépendants d'une pièce truquée où la probabilité d'obtenir pile est $p \in]0,1[$.

1. Déterminer Ω et introduire des événements élémentaires liés à l'expérience.
2. On introduit pour tout $i \in [\![1, 2n]\!]$ l'événement A_i " on obtient pile pour la première fois au lancer i", ainsi que l'événement A_0 "on n'obtient aucun pile".
   (a) Calculer $P(A_i)$ pour tout $i \in [\![0, 2n]\!]$. *On pensera à distinguer le cas* $i = 0$.
   (b) Vérifier par le calcul que $\sum_{i=0}^{2n} P(A_i) = 1$. Comment aurait-on pu faire sinon ?
3. On introduit pour tout $j \in [\![2, 2n]\!]$ l'événement B_j "pour la première fois, on obtient deux résultats identiques aux lancers $j-1$ et j".
   (a) Expliciter B_2, B_3 et B_4.
   (b) Expliciter alors B_{2j} et B_{2j+1} pour $j \geq 1$.
   (c) En déduire leur probabilité.

Exercice 4:

Soient $p_1, p_2 \in]0,1[$. On considère deux pièces de monnaie notées A_1 et A_2. Pour la pièce A_1 (resp. A_2), la probabilité d'obtenir face est p_1 (resp. p_2). On effectue une succession de lancers selon la règle suivante :

- pour le premier lancer, on choisit une pièce au hasard, et on la lance.
- pour le n^{ie} lancer (avec $n \geq 2$), on utilise la pièce A_1 si le lancer $n-1$ a donné face, et la pièce A_2, si le lancer $n-1$ a donné pile.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on introduit les événements F_n "le n^{ie} lancer a donné face", et on pose $u_n = P(F_n)$.

1. Exprimer u_1 en fonction de p_1 et p_2, puis u_2 en fonction de u_1 (et p_1, p_2).
2. Montrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = (p_1 - p_2)u_n + p_2$.
3. Donner l'expression générale de u_n en fonction de n et u_1, puis préciser la limite u de la suite (u_n).
4. Donner une condition nécessaire et suffisante sur p_1 etp_2 pour que $u = \frac{1}{2}$.

Exo II.

Exo III. Dans cet exercice, on considère la fonction f définie comme suit : $f(0) = 1$, et pour tout x non nul de $]-\infty, 1]$,

$$f(x) = \frac{-x}{(1-x)\ln(1-x)}.$$

1. Montrer que f est continue sur $]-\infty, 1[$.
2. On admet que $\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2}\alpha(x)$ pour $-1 < x < 1$, avec $\lim\limits_{x\to 0} \alpha(x) = 1$. Montrer que f est dérivable en 0, puis vérifier que $f'(0) = \frac{1}{2}$.
3. a. Montrer que f est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0,1[$, puis calculer $f'(x)$ pour tout réel x élément de $]-\infty, 0[\cup]0,1[$.
   b. Déterminer le signe de la quantité $\ln(1-x)+x$ lorsque x appartient à $]-\infty, 1[$, puis en déduire les variations de f.
   c. Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition, puis dresser son tableau de variation.
4. a. Etablir que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, il existe un seul réel de $[0,1[$, noté u_n, tel que $f(u_n) = n$ et donner la valeur de u_1.
   b. Montrer que la suite (u_n) converge et que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$.

Exo IV. Pour tout entier naturel n, on pose

$$u_n = \prod_{k=0}^{n}\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) = (1+1)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\dots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$$

1. Donner les valeurs de u_0, u_1 et u_2, sous forme d'entiers ou de fractions simplifiées.
2. a. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a $u_n \geqslant 2$.
   b. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n puis en déduire les variations de la suite (u_n).
3. a. Etablir que, pour tout réel x strictement supérieur à -1, on a $\ln(1+x) \leqslant x$.
   b. En déduire, pour tout entier naturel n, un majorant de $\ln(u_n)$.
4. En utilisant les questions précédentes, montrer que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ, élément de $[2,\mathrm{e}^2]$.
5. On se propose dans cette question d'étudier la convergence de la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n}(\ell - u_k).$$

   a. Justifier que la suite $(\ln(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que l'on a

$$\ln(\ell) = \lim_{K\to\infty}\sum_{k=0}^{K}\ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)$$

   b. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a

$$\ln\frac{\ell}{u_n} = \lim_{K\to\infty}\sum_{k=n+1}^{K}\ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)$$

   c. Vérifier, en utilisant le résultat de la question 3a), que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leqslant \ln\frac{\ell}{u_n} \leqslant \frac{1}{2^n}$$

   d. Déduire de la question précédente que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leqslant \ell - u_n \leqslant \ell\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{2^n}}\right)$$

e. Justifier que, pour tout réel x, on a $1 - \mathrm{e}^{-x} \leqslant x$. En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leqslant \ell - u_n \leqslant \frac{\ell}{2^n}$$

Sommer la relation précédente et conclure quand à la convergence de la suite (S_n)

Exercice 3

1. Déterminer le comportement local lorsque x tend vers 0 de
$$f(x) = 2\Big(\frac{\sin(11x)\tan(10x)}{1-\cos x} + \frac{e^{3x^2}-1}{\big(\ln(1+x)\big)^2}\Big)\frac{\sqrt{1+3x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}.$$
2. Déterminer le comportement local lorsque x tend vers 1 de
$$g(x) = \Big\{\cos\Big(\frac{\pi x}{2}\Big) + \sin\Big(\frac{\pi x}{2}\Big)\Big\}^{\frac{1}{x-1}}.$$

Exercice 4

Soit
$$f(x) = \Big(\frac{x}{x-1}\Big)^{x-1} - \Big(\frac{x+1}{x}\Big)^{x+1}.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de la fonction f.
2. Montrer que f est impaire sur $\mathscr{D}$.
3. Prolonger f par continuité aux points 1 et -1.
4. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

Exercice 5

Pour tout $n \geqslant 1$, on considère la fonction polynomiale P_n définie sur $\mathbb{R}$ par
$$P_n(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x^2 + x - 1.$$

1. a) Soit $n \geqslant 1$. Montrer que P_n possède une unique racine strictement positive notée α_n.
   b) Calculer α_2.
2. a) Montrer que $\forall n \geqslant 1,\ P_n(\alpha_{n+1}) < 0$. En déduire le sens de variation de la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$.
   b) Démontrer que la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ converge. On note ℓ sa limite. Justifier que $\ell < 1$.
   c) Démontrer que la suite $({\alpha_n}^n)_{n\geqslant 1}$ tend vers 0.
   d) En simplifiant l'expression de $P_n(x)$ lorsque $x \neq 1$, déterminer ℓ.

Exercice 6

L'espace étant rapporté à un repère orthonormal, on considère les ensembles $\mathscr{S}_1$, $\mathscr{S}_2$, $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ définis par les équations cartésiennes

$$\mathscr{S}_1 :\ x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y - 4z = 8 \qquad \mathscr{P}_1 :\ 2x + 3y + z = 15$$
$$\mathscr{S}_2 :\ x^2 + y^2 + z^2 - 4y - 8z = 16 \qquad \mathscr{P}_2 :\ 2x + 5y + 4z = 26$$

1. a) Montrer que $\mathscr{S}_1$ est une sphère et préciser son centre Ω_1 et son rayon R_1.
   b) Montrer que Ω_1 appartient au plan $\mathscr{P}_1$.
   c) Quelle est la nature de $\mathscr{S}_1 \cap \mathscr{P}_1$? On précisera le centre et le rayon de $\mathscr{S}_1 \cap \mathscr{P}_1$.
2. Déterminer de même la nature de $\mathscr{S}_2 \cap \mathscr{P}_2$.
3. a) Soient Δ_1 la droite passant par Ω_1 et orthogonale au plan $\mathscr{P}_1$ et Δ_2 la droite passant par Ω_2 et orthogonale au plan $\mathscr{P}_2$. Montrer que Δ_1 et Δ_2 s'intersectent en un point noté Ω_0 dont on précisera les coordonnées.
   b) Calculer la distance d_1 de Ω_0 à $\mathscr{P}_1$ et la distance d_2 de Ω_0 à $\mathscr{P}_2$.
   c) Montrer qu'il existe une sphère $\mathscr{S}_0$ contenant $\mathscr{S}_1 \cap \mathscr{P}_1$ et $\mathscr{S}_2 \cap \mathscr{P}_2$. On précisera son centre et son rayon R_0.

Exo V.

On pourra au besoin utiliser que $\mathrm{e}^u = 1 + u\alpha(u)$ avec $\lim\limits_{u\to 0} \alpha(u) = 1$,
que $(1+u)^\beta = 1 + \beta u \alpha(u)$ avec $\lim\limits_{u\to 0} \alpha(u) = 1$
que $\frac{1}{1-u} = 1 + u\alpha(u)$ avec $\lim\limits_{u\to 0} \alpha(u) = 1$
ou que $\ln(1+u) = u\alpha(u)$ avec $\lim\limits_{u\to 0} \alpha(u) = 1$

CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLE 1

Exo I.

Corrigé 2016

Exercice 1 ....

1) a) • La fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et de classe C^1 en tant que quotient (bien défini) de fonctions de classe C^1.

Pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$, on a : $f'(x) = \dfrac{-xe^{-x} - e^{-x}}{x^2} = -\dfrac{e^{-x}(1+x)}{x^2}$.

Comme e^{-x} est strictement positif pour tout x, et comme x et $(1+x)$ sont aussi strictement positifs (car x est dans $\mathbb{R}_+^*$), on a : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) < 0$.

Ceci prouve que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

- $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} e^{-x} = 1$ donc $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

On a donc le tableau de variation suivant :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
f	$+\infty$ $\searrow$	0

b) Par récurrence.

• Pour $n = 0$, le terme u_0 est bien défini (par l'énoncé) et il vaut 1 donc il est strictement positif.

• Si l'on suppose, pour un entier naturel n fixé, que u_n est bien défini et que $u_n > 0$, alors on peut appliquer la fonction f à u_n, ce qui définit correctement u_{n+1}, et comme de plus, f arrive dans $\mathbb{R}_+^*$, on a $u_{n+1} = f(u_n) > 0$.

• Conclusion :

$$\boxed{\text{Chaque terme de la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est parfaitement défini et strictement positif}}$$

2) En lisant le script de gauche, on constate que $u_5 \leq 0{,}00001$, mais en lisant celui de droite, on constate cette fois que $u_6 \geq 100\,000$.

On peut conjecturer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge, et plus hardiment, que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} = 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} u_{2n} = +\infty}$$

Exo II.

Concours d'admission sur classes préparatoires
Option scientifique

RAPPORT DU JURY
ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
2016

Présentation de l'épreuve :

• L'épreuve comportait, comme d'habitude, trois exercices et un problème, ce qui permettait de juger les candidats sur une partie conséquente du programme des classes préparatoires.
• Le sujet balayait largement le programme en donnant, comme d'habitude, une place importante aux probabilités (troisième exercice et problème).
La diversité des thèmes abordés a permis à tous les candidats de s'exprimer et de montrer leurs compétences, ne serait-ce que sur une partie du programme.
• Dans l'ensemble, les correcteurs ont trouvé le sujet bien adapté au public concerné, ne comportant pas trop de parties particulièrement difficiles, mais quelques questions où seuls les bons candidats ont pu tirer leur épingle du jeu en montrant leur capacité à mener un calcul compliqué à son terme ainsi que leur faculté à raisonner sur des situations abstraites.

Description du sujet :

L'exercice 1 proposait l'étude de la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$, où f désignait la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{x}$. La deuxième question demandait d'interpréter des commandes `Scilab` dont l'affichage laissait penser que la suite était divergente
• Cet exercice, jugé facile par les correcteurs, a permis à tous les candidats, ou presque, de gagner quelques points.
• Notons tout de même que quelques candidats ont des problèmes pour le calcul de la dérivée de f ou pour citer correctement les conditions d'application du théorème de la bijection (ce dernier étant énoncé « comme en terminale »).

L'exercice 2, portant sur la partie algèbre linéaire du programme, proposait d'établir que si un endomorphisme *f* de $\mathbb{R}^n$ annulait un polynôme vérifiant $P(0)=0$ et $P'(0)\neq 0$, alors on avait :

$$\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(f)\oplus \mathrm{Im}(f)$$

On commençait par étudier deux exemples puis le cas général pour finir.

• Cet exercice, assez théorique, a permis aux candidats les mieux formés de parfaitement faire la différence. Toutefois, les correcteurs ont pu mesurer à quel point les connaissances de très nombreux candidats sont fragiles, concernant les objets liés au cours d'algèbre linéaire (cours pas maîtrisé pour certains).

• Beaucoup de candidats ont écrit $(f-Id)^2 \in \mathrm{Ker}(f)$, ce qui n'a aucun sens.

L'exercice 3 portant sur les parties "estimation" et "fonctions de deux variables" du programme, avait pour objectif d'estimer conjointement l'espérance et la variance d'une variable aléatoire suivant une loi normale.

• Cet exercice a été abordé avec des fortunes diverses, certains candidats n'ayant visiblement que très peu de connaissances sur cette partie portant exclusivement sur le programme de seconde année. C'est l'exercice le moins bien réussi de cette épreuve.

• De très nombreux candidats sont rapidement submergés par les calculs de dérivées partielles, certains, assez nombreux, ignorant tout des propriétés des fonctions exponentielle et logarithme.

• Le jury rappelle que les notations de Monge et le signe de $rt-s^2$ ne sont plus au programme de mathématiques des classes préparatoires ECS.

Le problème, portant sur le programme d'algèbre et de probabilité, proposait l'étude d'une chaîne de Markov à 4 états.

La dernière question proposait une simulation informatique de la situation.

• La plupart des candidats n'ont que peu abordé le problème, peut-être par manque de temps ou à cause d'une mauvaise gestion de leur temps. Cela dit, il n'est globalement pas très bien réussi par les candidats qui l'abordent.

• La justification de probabilités conditionnelles élémentaires (liées à un échange aléatoire de boules entre deux urnes) a paru insurmontable à de nombreux candidats.

Statistiques :

• Pour l'ensemble des 3758 candidats ayant composé, la moyenne obtenue à cette épreuve est égale à 11,073 sur 20 (sensiblement la même que l'année dernière) et l'écart type vaut 5,821 (très légèrement inférieur à celui de l'année dernière).

• 35,4% des candidats, contre 33,8% l'année dernière, ont une note strictement inférieure à 8 (parmi eux, 12,8% ont une note inférieure à 4).

• 22,1% des candidats ont une note comprise entre 8 et 12 (pourcentage sensiblement égal à celui de 2015 qui était de 21%).

• 25% des candidats ont une note supérieure ou égale à 16 (pourcentage inférieur de presque deux points à celui de 2015 qui était lui-même inférieur de deux points à celui de 2014).

Conclusion :

Comme l'an dernier, le niveau est très hétérogène et l'impression générale ressentie à la lecture des copies amène à penser que les questions les plus subtiles, qui demandent une compréhension fine de la théorie, quel que soit le domaine concerné, échappent à presque tous les candidats. Les meilleurs ont acquis des techniques et des réflexes mais ne comprennent pas forcément en profondeur ce qu'ils font. Le fossé entre les aspirations du programme et la réalisation sur le « terrain » semble s'être élargi, une fois encore, cette année, mais heureusement pas pour les bons et très bons candidats.

Les copies sont, dans l'ensemble, bien présentées et bien rédigées mais il reste, en assez grand nombre, des candidats qui rendent pratiquement un brouillon, proposent des copies sales et raturées, et truffent leur copie d'abréviations non officielles : les correcteurs n'apprécient pas du tout et n'ont alors aucune compassion pour ces candidats qui bien évidemment s'exposent à des sanctions.

Un nombre non négligeable de candidats restent adeptes des réponses floues : il faut savoir que ce type de réponse est sanctionné et que l'absence d'argument ou le manque de précision rend la réponse irrecevable.
La mauvaise maîtrise des techniques de base et des calculs élémentaires reste une constante et semble même s'aggraver pour un nombre non négligeable de candidats. Il serait bien que les futurs candidats investissent un peu de leur temps sur ces deux points.

Il semble que l'investissement en informatique ait été un peu plus intense que les années précédentes, ce qui est très bon signe (le langage Scilab semblant plaire aux candidats) puisqu'il y avait, comme d'habitude, pas mal de points à glaner sur ces questions, et ceci sans y passer énormément de temps.

Rappelons, comme d'habitude, que l'honnêteté, la simplicité, la précision et la rigueur sont des vertus attendues par tous les correcteurs sans exception, et qu'une bonne réponse est toujours une réponse construite rigoureusement.

Corrigé du devoir maison 5

Exercice 1 :

1. Ω={liste de $2n$ coordonnées avec P ou F}={P,F}^{2n} et $\forall i \in [\![1,2n]\!]$, P_i (resp F_i) "le i^e lancer donne pile (resp. face)".
2. (a) $A_0 = F_1 \cap F_2 \cap ... \cap F_{2n}$; $A_1 = P_1$ et plus généralement, pour $i \in [\![1,n]\!]$, $A_i = F_1 \cap ... \cap F_{i-1} \cap P_i$. Lancers indépendants, $P(A_0) = P(F_1) \times ... \times P(F_{2n}) = (1-p)^{2n}$, et de même pour tout $i \in [\![1,2n]\!]$, $P(A_i) = (1-p)^{i-1}p$.

   (b) Attention, on ne peut pas remplacer $P(A_i)$ avant d'avoir séparé le cas $i = 0$ car expressions différentes !
   $\sum\limits_{i=0}^{2n} P(A_i) = P(A_0) + \sum\limits_{i=1}^{2n} P(A_i)$ (relation de Chasles) $= (1-p)^{2n} + \sum\limits_{i=1}^{2n}(1-p)^{i-1}p = (1-p)^{2n} + p\sum\limits_{j=0}^{2n-1}(1-p)^j$
   $= (1-p)^{2n} + p\frac{1-(1-p)^{2n}}{1-(1-p)}$ [car $1-p \neq 1$] $= (1-p)^{2n} + 1 - (1-p)^{2n} = 1$ (puisque $1-(1-p) = p$).
   Sinon, remarquer que la famille $(A_i)_{i\in[\![0,2n]\!]})$ est un s.c.e. puisque les événements A_i sont deux à deux incompatibles et que $\bigcup\limits_{i=0}^{2n} A_i = \Omega$ d'où (cours), $\sum\limits_{i=0}^{2n} P(A_i) = 1$.
3. (a) $B_2 = [P_1 \cap P_2] \cup [F_1 \cap F_2]$, $B_3 = [P_1 \cap F_2 \cap F_3] \cup [F_1 \cap P_2 \cap P_3]$ et $B_4 = [P_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4] \cup [F_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap F_4]$.

   (b) Plus généralement, il y a alternance de P et F jusqu'aux deux derniers lancers, et pour savoir si quand on commence par P on finit par P ou F, il faut connaître la parité de j d'où la distinction entre $2j$ et $2j+1$.
   Enfin, attention de bien respecter la convention des "...", et de mettre suffisamment d'événements !
   $B_{2j} = [P_1 \cap F_2 \cap ... \cap P_{2j-3} \cap F_{2j-2} \cap P_{2j-1} \cap P_{2j}] \cup [F_1 \cap P_2 \cap ... \cap F_{2j-3} \cap P_{2j-2} \cap F_{2j-1} \cap F_{2j}]$ et
   $B_{2j+1} = [F_1 \cap P_2 \cap ... \cap F_{2j-1} \cap P_{2j} \cap P_{2j+1}] \cup [P_1 \cap F_2 \cap ... \cap P_{2j-1} \cap F_{2j} \cap F_{2j+1}]$

   (c) Les lancers sont indépendants, et chaque événement B est une réunion de deux événements incompatibles, d'où $P(B_{2j}) = P(P_1)P(F_2)...P(P_{2j-1})P(P_{2j}) + P(F_1)P(P_2)...P(F_{2j-1})P(F_{2j}) = p^{j+1}(1-p)^{j-1} + (1-p)^{j+1}p^{j-1}$.
   De même, $P(B_{2j+1}) = p^{j+1}(1-p)^j + p^j(1-p)^{j+1}$.

Exercice 2 :

1. Soit A_1 (resp. A_2) l'événement "la pièce A_1 (resp. A_2) est choisie pour le premier lancer ". Alors (A_1, A_2) est un s.c.e., et d'après la formule des probabilités totales, $u_1 = P(F_1) = P(A_1)P_{A_1}(F_1) + P(A_2)P_{A_2}(F_1) = \frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{2}p_2$.
   Pour u_2, remarquer que le 2e lancer ne dépend que du premier lancer (et pas du choix de la pièce pour le premier lancer) donc utiliser la formule des probabilités totales avec le s.c.e (P_1, F_1) : $u_2 = P(F_2) = P(F_1)P_{F_1}(F_2) + P(P_1)P_{P_1}(F_2) = u_1 \times p_1 + (1-u_1) \times p_2$ (car sachant F_1, on utilise la pièce A_1 pour le 2e lancer ...) d'où $u_2 = (p_1 - p_2)u_1 + p_2$.
2. Plus généralement, pour $n \geq 1$, on applique la formule des probabilités totales au s.c.e. (P_n, F_n) et à l'évt F_{n+1} : $u_{n+1} = P(F_{n+1}) = P(F_n)P_{F_n}(F_{n+1}) + P(P_n)P_{P_n}(F_{n+1}) = u_n \times p_1 + (1-u_n) \times p_2 = u_n(p_1 - p_2) + p_2$.
3. On reconnaît une suite arithmético-géométrique et on résout $\alpha = (p_1 - p_2)\alpha + p_2 \Leftrightarrow \alpha(1 - p_1 + p_2) = p_2 \Leftrightarrow \alpha = \frac{p_2}{1-p_1+p_2}$ **car** $1 - p_1 + p_2 \neq 0$ (puisque $p_1 < 1$ et $p_2 > 0$ impliquent $1 - p_1 + p_2 > 0$).
   On sait alors que la suite $(u_n - \alpha)$ est géometrique de raison $p_1 - p_2$, et de premier terme $u_1 - \alpha$ d'où : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n - \alpha = (p_1 - p_2)^{n-1}(u_1 - \alpha)$ et finalement $u_n = (p_1 - p_2)^{n-1}(u_1 - \alpha) + \alpha \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha$, car $-1 < p_1 - p_2 < 1$.
4. $u = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{2} \Leftrightarrow p_2 = \frac{1}{2}(1 - p_1 + p_2) \Leftrightarrow p_1 + p_2 = 1$.

Exo III.

EDHEC : projet 1

Option ES

Corrigé
EDHEC 2009

Exercice 1 ....

1) Comme $x < 1$, on a $1-x > 0$, ce qui garantit que $\ln(1-x)$ existe.
De plus, sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, 1[$, on a : $(1-x)\ln(1-x) \neq 0$.
Dès lors, la fonction f est continue sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, 1[$ en tant que quotient à dénominateur non nul de fonctions continues sur ces intervalles.
Il reste à étudier la continuité de f en 0.

Pour tout x non nul de $]-\infty, 1[$, on a $f(x) = \dfrac{-x}{(1-x)\ln(1-x)}$ et on sait que $\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\ln(1+u)}{u} = 1$. On en déduit, en posant $u = -x$, que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1-x)}{-x} = 1$, d'où en inversant : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-x}{\ln(1-x)} = 1$.

Comme $\lim\limits_{x\to 0}(1-x) = 1$, on obtient finalement : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$, ce qui est bien la valeur de $f(0)$ proposée par l'énoncé. La fonction f est bien continue en 0.
Conclusion :

$$\boxed{f \text{ est continue sur }]-\infty, 1[.}$$

2) a) Ici aussi, le cours assure que $\ln(1+u) \underset{0}{=} u - \dfrac{u^2}{2} + o(u^2)$.

On peut remplacer u par $-x$ qui tend vers 0 lorsque x tend vers 0, et on trouve :

$$\boxed{\ln(1-x) \underset{0}{=} -x - \frac{x^2}{2} + o(x^2).}$$

b) Pour vérifier que f est dérivable en 0, on cherche la limite de $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ lorsque x tend vers 0.

Exo IV.

Ici, on a : $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{\dfrac{-x}{(1-x)\ln(1-x)}-1}{x} = \dfrac{-x-(1-x)\ln(1-x)}{x(1-x)\ln(1-x)}$.

En remplaçant $\ln(1-x)$ par son développement limité au numérateur, on trouve :

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \underset{0}{=} \frac{-x-(1-x)(-x-\frac{x^2}{2}+o(x^2))}{x(1-x)\ln(1-x)} \underset{0}{=} \frac{-x^2+\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x(1-x)\ln(1-x)}.$$

En simplifiant, on obtient : $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} \underset{0}{=} \dfrac{-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x(1-x)\ln(1-x)}$

Lorsque x tend vers 0, le numérateur est équivalent à $-\dfrac{x^2}{2}$ et le dénominateur est équivalent à $x\times 1\times(-x) = -x^2$. On en conclut que : $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{2}$.

$\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ tend donc vers $\dfrac{1}{2}$ lorsque x tend vers 0, ce qui prouve que :

$$\boxed{f \text{ est dérivable en 0 et } f'(0) = \frac{1}{2}.}$$

3) a) La fonction f est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, 1[$ en tant que quotient à dénominateur non nul de fonctions dérivables sur ces intervalles et on a :

$f'(x) = \dfrac{-(1-x)\ln(1-x)+x(-\ln(1-x)-1)}{(1-x)^2(\ln(1-x))^2}$. En regroupant les logarithmes, on obtient :

$$\boxed{\forall x\in]-\infty, 0[\cup]0, 1[, f'(x) = -\frac{\ln(1-x)+x}{(1-x)^2(\ln(1-x))^2}.}$$

b) Posons $g(x) = \ln(1-x) + x$. La fonction g est dérivable sur $]-\infty, 1[$ et on a :

$g'(x) = \dfrac{-1}{1-x} + 1 = \dfrac{-x}{1-x}$.

Sur $]-\infty, 1[$, $1-x$ est strictement positif donc $g'(x)$ est du signe de $-x$.

La fonction g est donc croissante sur $]-\infty, 0]$ et décroissante sur $[0, 1[$.

Comme $g(0) = 0$, on en déduit que g a pour maximum 0 en 0, ce qui montre que la fonction g est négative.

$$\boxed{\forall x\in]-\infty, 1[, \ln(1-x) + x \leq 0.}$$

Comme $f'(x) = -\dfrac{g(x)}{(1-x)^2(\ln(1-x))^2}$, alors $f'(x)$ est du signe contraire de $g(x)$ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, 1[$, ceci prouve que $f'(x)$ est strictement positif (puisque g ne s'annule qu'en 0).
En se souvenant que $f'(0) > 0$, on a finalement : $\forall x \in]-\infty, 1[, f'(x) > 0$.

$$\boxed{f \text{ est strictement croissante sur }]-\infty, 1[.}$$

c) On a $f(x) = \dfrac{-x}{(1-x)\ln(1-x)}$, donc, au voisinage de $-\infty$, $f(x) \sim \dfrac{1}{\ln(1-x)}$.
Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln(1-x) = +\infty$, ceci montre que :

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0.}$$

Par ailleurs, on sait que $\lim\limits_{\substack{> \\ u\to 0}} u\ln(u) = 0^-$ donc, en posant $u = 1-x$, on trouve :
$\lim\limits_{\substack{< \\ x\to 1}} (1-x)\ln(1-x) = 0^-$. Comme $\lim\limits_{\substack{< \\ x\to 1}} (-x) = -1$, on obtient finalement :

$$\boxed{\lim_{\substack{< \\ x\to 1}} f(x) = +\infty.}$$

On a le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		1
$f'(x)$		+	½	+	
f	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

4) a) La fonction f est continue sur $]-\infty, 1[$ et strictement croissante, c'est donc une bijection de $]-\infty, 1[$ vers $]0, +\infty[$. Ainsi, si n est un entier naturel non nul, donc élément de $]0, +\infty[$, l'équation $f(x) = n$ possède une seule solution, notée u_n, élément de $]-\infty, 1[$.
De plus, $f(0) = 1$ et $f(u_n) = n$ donc $f(0) \leq f(u_n)$ et, par croissance de f, on conclut que $u_n \geq 0$.
Ceci prouve que, pour tout entier naturel n non nul, il existe un unique réel u_n de $[0, 1[$ tel que :
$f(u_n) = n$.
Par définition, on a $f(u_1) = 1$ et comme $f(0) = 1$, on conclut par unicité de u_1, que $u_1 = 0$.

b) On a $f(u_{n+1}) = n+1$ et $f(u_n) = n$ donc $f(u_{n+1}) > f(u_n)$.
Par croissance de f, on conclut que : $u_{n+1} > u_n$.
Ainsi, la suite (u_n) est croissante et, comme elle est majorée par 1, elle est convergente.
On sait que $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x) = +\infty$, on a donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{-1}(x) = 1$ et, en particulier, $\lim\limits_{n\to+\infty} f^{-1}(n) = 1$.
Comme $u_n = f^{-1}(n)$, on en déduit donc :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 1.}$$

Exercice 2 ....

1) a) L'énoncé rappelle que : $\forall k\in\mathbb{N}$, $(Z > k) = (X > k) \cap (Y > k)$ et, comme les variables X et Y sont indépendantes, on en déduit :
$\forall k\in\mathbb{N}$, $P(Z > k) = P(X > k)\, P(Y > k)$.
De plus, les variables aléatoires X et Y suivent toutes deux la loi géométrique de paramètre p donc : $P(X > k) = P(Y > k) = \sum\limits_{i=k+1}^{+\infty} q^{i-1}p$.

En posant $j = i-k-1$, on obtient : $P(X > k) = P(Y > k) = \sum\limits_{j=0}^{+\infty} q^{j+k}p = q^k p\sum\limits_{j=0}^{+\infty} q^j$,

d'où : $P(X > k) = P(Y > k) = q^k p\dfrac{1}{1-q} = q^k$.
On pouvait obtenir plus rapidement ce résultat en modélisant la loi de X par un temps d'attente du premier succès lors d'épreuves indépendantes où la probabilité d'obtenir le succès est égale à p. Dès lors, l'événement $(X > k)$ signifie que l'on n'obtient que des échecs pendant les k premières épreuves, ce qui donne le résultat par indépendance).
On conclut alors :

$$\boxed{\forall k\in\mathbb{N}^*,\ P(Z > k) = q^{2k}.}$$

b) Par définition de "≥", on a : $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $(Z \geq k) = (Z > k) \cup (Z = k)$.
Les événements $(Z > k)$ et $(Z = k)$ étant incompatibles, on en déduit :
$\forall k\in\mathbb{N}^*$, $P(Z \geq k) = P(Z > k) + P(Z = k)$.
Comme Z est à valeurs entières, on a de plus : $(Z \geq k) = (Z > k-1)$ et on peut alors écrire : $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $P(Z > k-1) = P(Z > k) + P(Z = k)$.
En conclusion, on a bien :

$$\boxed{\forall k\in\mathbb{N}^*,\ P(Z = k) = P(Z > k-1) - P(Z > k).}$$

c) En remplaçant $P(Z > k)$ par q^{2k} et $P(Z > k-1)$ par q^{2k-2}, on a :
$\forall k\in\mathbb{N}^*$, $P(Z = k) = q^{2k-2} - q^{2k} = q^{2k-2}(1-q^2) = (q^2)^{k-1}(1-q^2)$.

Concours **EDHEC** **2009**
Classes Préparatoires

RAPPORT DE CORRECTION
MATHEMATIQUES
Option Economique

Présentation de l'épreuve :
• L'épreuve comportait, comme d'habitude, trois exercices et un problème, ce qui permettait de juger les candidats sur la presque totalité des connaissances exigées en classe préparatoire.
Le sujet balayait largement le programme des deux années et proposait dans chaque exercice des questions fines et difficiles qui ont permis aux très bons candidats de se mettre en valeur.
Les correcteurs ont trouvé le sujet abordable (mis à part l'exercice 2 et la deuxième partie du problème) et sélectif : les bons et très bons candidats pouvaient facilement faire la différence, notamment en traitant les questions techniques de l'exercice 1, l'exercice 2 et surtout le la deuxième partie du problème, tandis que les candidats de niveau moyen pouvaient tout de même tirer leur épingle du jeu en traitant, au moins en partie, les exercices 1 et 3 ainsi que le début du problème, ce qui leur permettait de montrer qu'ils avaient travaillé sérieusement les mathématiques. Quelques correcteurs signalent qu'un nombre non négligeable de candidats ont eu le temps de traiter l'essentiel.

• L'exercice 1 avait pour objectif d'étudier une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, notée f, puis d'étudier la suite (u_n) définie par $f(u_n) = n$.
• L'exercice 2 se fixait pour but d'étudier des variables aléatoires construites sur une variable aléatoire géométrique.
• L'exercice 3, où l'on considérait une variable aléatoire X de densité f, nulle sur $]-\infty, 0[$, continue et strictement positive sur $[0, +\infty[$, se proposait de montrer que la fonction g définie par $g(x) = \begin{cases} -f(x)\ln(1-F(x)) \text{ si } x \geq 0 \\ 0 \text{ si } x < 0 \end{cases}$ est aussi une fonction densité.
• Le problème, portant sur le programme d'algèbre linéaire, étudiait dans sa première partie l'application f qui à toute fonction polynomiale P associe $f(P) = P'' - 5P' + 6P$, et, dans sa deuxième partie, l'application g, qui à toute fonction réelle u de classe C^∞ associait la fonction définie par $f(u) = u'' - 5u' + 6u$.

Statistiques :
Pour l'ensemble des 3312 candidats ayant composé, la moyenne (sur 20) obtenue à cette épreuve est égale à 9,99 et l'écart-type vaut 5,78.

38 % des candidats ont une note strictement inférieure à 8 (43 % d'entre eux ayant une note inférieure à 4).
21 % des candidats ont une note comprise entre 8 et 12.
18 % des candidats ont une note supérieure ou égale à 16.

Analyse des copies :
Les correcteurs constatent encore une fois que les candidats semblent en majorité s'être préparés sérieusement et tous les exercices sont abordés dans presque toutes les copies.
Ils notent que les candidats ont des connaissances mais que la rigueur fait souvent défaut dans la rédaction de leurs démonstrations (notamment en oubliant de citer les hypothèses permettant d'appliquer un théorème ou une propriété du cours).

Il semble que l'écriture négligée ait gêné (voire agacé) de nombreux correcteurs, sans parler de l'orthographe qui est bien loin de s'améliorer. Dans l'ensemble, on observe une nette baisse de la qualité de présentation et de rédaction : les futurs candidats doivent y faire attention sous peine de sanctions.

Les copies sont, pour la plus grande part honnêtes (une majorité de candidats précisent clairement qu'ils admettent le résultat d'une question non traitée), mais les correcteurs ont constaté (comme d'habitude) que lorsque les résultats sont donnés par l'énoncé, de trop nombreux candidats trichent en essayant de faire croire qu'ils ont prouvé le résultat demandé : qu'ils sachent que ceci est vite repéré et sévèrement sanctionné.

Le nombre de copies faibles (note inférieure à 8) est en augmentation de 7 % par rapport à l'année dernière.

L'exercice 1 montre que beaucoup de candidats maîtrisent, et c'est tant mieux, les notions de base en analyse, bien qu'un nombre non négligeable d'entre eux se trompent en dérivant une fonction somme toute classique, en établissant des limites pourtant faciles et, bien sûr, en voulant établir la dérivabilité de cette fonction en 0 à l'aide d'un développement limité.

L'exercice 2 a, dans l'ensemble, été très mal traité par presque tous les candidats à la grande surprise des correcteurs qui pensaient que le calcul de $P(X > k)$ lorsque X suit la loi géométrique de paramètre p devait être à la portée d'une majorité de candidats, ce qui n'a pas été le cas.

L'exercice 3, relativement bien réussi, a tout de même révélé certaines failles sérieuses dans les connaissances de nombreux candidats sur les intégrales impropres.

Le problème a montré que trop peu de candidats sont capables de manipuler les notions d'algèbre linéaire dans un cadre un peu différent de ce qui se pratique d'habitude.

Voici une liste des quelques fautes, omissions et imprécisions les plus fréquentes (chacune d'entre elles a été trouvée sur un nombre significatif de copies) commises cette année:

5) a) $(x+y)^2 - 4xy = x^2 + 2xy + y^2 - 4xy = x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2 \geq 0$.
On a donc :

$$\boxed{(x+y)^2 \geq 4xy}$$

b) On a $f(x, y) = \dfrac{(x+y)^2}{x\,y}$.

Comme $(x+y)^2 \geq 4xy$, en divisant par $x\,y > 0$, on obtient : $f(x, y) \geq 4$. De plus l'égalité $f(x, x) = 4$ prouve que :

$$\boxed{f \text{ admet sur }]\,0, +\infty\,[^2 \text{ un minimum global égal à 4 en tous les couples } (x, x)}$$

6) La fonction g est bien définie sur $]\,0, +\infty\,[^2$, et on a successivement :
$\forall (x, y) \in\,]\,0, +\infty\,[^2$, $g(x, y) = 2\ln(x + y) - \ln(x) - \ln(y)$.

$g(x, y) = \ln(x + y)^2 - \ln(x\,y) = \ln \dfrac{(x+y)^2}{x\,y} = \ln(f(x, y))$.

Comme, pour tout couple (x, y) de $]\,0, +\infty\,[^2$, on a $f(x, y) \geq 4$, on en déduit, par croissance de la fonction logarithme népérien sur $]\,0, +\infty\,[$, que $\ln(f(x, y)) \geq \ln(4)$.
Pour finir :

$$\boxed{\forall (x, y) \in\,]\,0, +\infty\,[^2,\ g(x, y) \geq 2\ln(2)}$$

Exercice 2 ....

1) $u_0 = \displaystyle\prod_{k=0}^{0}(1+\frac{1}{2^k}) = 1 + 1 = 2$.

$u_1 = \displaystyle\prod_{k=0}^{1}(1+\frac{1}{2^k}) = (1 + 1)(1 + \frac{1}{2}) = 3$.

$u_2 = \displaystyle\prod_{k=0}^{2}(1+\frac{1}{2^k}) = (1 + 1)(1 + \frac{1}{2})(1 + \frac{1}{4}) = 3 \times \frac{5}{4} = \frac{15}{4}$.

2) a) On sait que $u_0 = 2$ et, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, u_n est le produit de facteurs tous plus grands que 1, dont le premier vaut 2.
Pour conclure :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq 2}$$

Remarque : on pouvait aussi établir ce résultat par récurrence.

b) Pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = \displaystyle\prod_{k=0}^{n+1}(1+\frac{1}{2^k})$.

En mettant de côté le facteur correspondant à $k = n+1$, on obtient :

$u_{n+1} = (1 + \dfrac{1}{2^{n+1}})\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(1+\frac{1}{2^k}) = (1 + \frac{1}{2^{n+1}})\,u_n$.

On en déduit que : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{2^{n+1}}\,u_n$. Comme $\dfrac{1}{2^{n+1}} > 0$ et comme $u_n \geq 2 > 0$, on a :

$u_{n+1} - u_n > 0$.

Exo V.

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est croissante}}$$

3) a) On pose, pour tout réel x strictement supérieur à -1, $g(x) = \ln(1+x) - x$.
La fonction g est définie et dérivable sur $]-1, +\infty[$ et on a :
$g'(x) = \dfrac{1}{1+x} - 1 = \dfrac{-x}{1+x}$.
On a donc : $g'(x) > 0$ sur $]-1, 0[$ et $g'(x) < 0$ sur $]0, +\infty[$.
La fonction g admet donc un maximum global en 0 et ce maximum vaut $g(0) = 0$.
Ceci prouve que , pour tout x supérieur strictement à -1, on a : $g(x) \leq 0$.
On a donc bien :

$$\boxed{\forall x \in]-1, +\infty[,\ \ln(1+x) \leq x}$$

b) Comme $u_n = \prod_{k=0}^{n}(1+\frac{1}{2^k}) > 0$, on a : $\ln u_n = \sum_{k=0}^{n}\ln(1+\frac{1}{2^k})$.

D'après la question précédente, $\ln(1+\frac{1}{2^k}) \leq \frac{1}{2^k}$, d'où : $\ln u_n \leq \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}$.

Comme $\frac{1}{2} \neq 1$, on a : $\ln u_n \leq \dfrac{1-(\frac{1}{2})^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}$.

On en conclut alors que : $\ln u_n \leq 2(\ 1-(\frac{1}{2})^{n+1}\ )$, ce qui démontre, en majorant encore un peu que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \ln u_n \leq 2}$$

4) Par croissance de la fonction exponentielle, on a : $u_n \leq e^2$. Ceci prouve que la suite (u_n) est majorée. Comme de plus, elle est croissante, on en déduit que :

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ converge}}$$

Comme $2 \leq u_n \leq e^2$, on a, après passage à la limite : $2 \leq \ell \leq e^2$.

5) a) On sait que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ strictement positif, donc par continuité de la fonction logarithme népérien en ℓ, on en conclut que la suite $(\ln(u_n))$ converge vers $\ln(\ell)$.
Pour tout entier naturel n, on a : $\ln(u_n) = \sum_{k=0}^{n}\ln(1+\frac{1}{2^k})$ donc en passant à la limite :

$\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(u_n) = \sum_{k=0}^{+\infty}\ln(1+\frac{1}{2^k})$.

Comme la fonction "ln" est continue, on sait que : $\ln(\lim\limits_{n\to+\infty} u_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \ln(u_n)$.
Ceci s'écrit :

$$\boxed{\ln(\ell) = \sum_{k=0}^{+\infty}\ln(1+\frac{1}{2^k})}$$

b) On a : $\ln(\frac{\ell}{u_n}) = \ln(\ell) - \ln(u_n) = \sum_{k=0}^{+\infty}\ln(1+\frac{1}{2^k}) - \sum_{k=0}^{n}\ln(1+\frac{1}{2^k})$.

On obtient donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \ln(\frac{\ell}{u_n}) = \sum_{k=n+1}^{+\infty}\ln(1+\frac{1}{2^k})}$$

c) Comme $\ln(1 + \frac{1}{2^k}) \geq 0$, on a tout de suite : $\forall n \in \mathbb{N}, \ln(\frac{\ell}{u_n}) \geq 0$ (somme de termes positifs). D'autre part, $\ln(1 + \frac{1}{2^k}) \leq \frac{1}{2^k}$ donc :

$\sum_{k=n+1}^{+\infty}\ln(1+\frac{1}{2^k}) \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{2^k}$.

Comme $-1 < \frac{1}{2} < 1$, on a : $\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n+1}} \times \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n}$. Au final, on a bien :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \ln(\frac{\ell}{u_n}) \leq \frac{1}{2^n}}$$

d) En appliquant la fonction exponentielle, croissante sur $\mathbb{R}$, à l'encadrement précédent, on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq \frac{\ell}{u_n} \leq e^{\frac{1}{2^n}}$.

En inversant (tout est strictement positif), on trouve : $e^{-\frac{1}{2^n}} \leq \frac{u_n}{\ell} \leq 1$.

En multipliant les trois membres par $-\ell < 0$, on a : $-\ell \leq -u_n \leq -\ell\, e^{-\frac{1}{2^n}}$.

Enfin, en ajoutant ℓ, on a bien :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \ell - u_n \leq \ell(1-e^{-\frac{1}{2^n}})}$$

e) On pose : $h(x) = e^{-x} + x - 1$.

La fonction h est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $h'(x) = -e^{-x} + 1$.

$h'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 > e^{-x} \Leftrightarrow 0 > -x \Leftrightarrow x > 0$.

On a donc : $h'(x) > 0$ sur $]0, +\infty[$ et $h'(x) < 0$ sur $]-\infty, 0[$.

La fonction h admet donc un minimum global en 0 et ce minimum vaut $h(0) = 0$.

Ceci prouve que, pour tout réel x, on a : $h(x) \geq 0$.

Ceci s'écrit : $e^{-x} + x - 1 \geq 0$, et on a bien :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, 1 - e^{-x} \leq x}$$

Remarque : on pouvait citer la convexité de la fonction exponentielle qui garantit que : $\forall u \in \mathbb{R}, e^u \geq 1 + u$, puis poser $u = -x$.

D'après ce qui précède, on peut écrire : $1-e^{-\frac{1}{2^n}} \leq \frac{1}{2^n}$.

En multipliant par $\ell > 0$, on obtient : $\ell\,(1-e^{-\frac{1}{2^n}}) \leq \frac{\ell}{2^n}$. Avec le résultat de la question 5c), on a finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq \ell - u_n \leq \frac{\ell}{2^n}}$$

Comme la série de terme général $\frac{\ell}{2^n}$ est convergente (c'est une série géométrique de raison $\frac{1}{2}$ élément de $]-1, 1[$), le critère de comparaison pour les séries à termes positifs permet de conclure :

$$\boxed{\text{La série de terme général } (\ell - u_n) \text{ converge}}$$

Exercice 3 ....

1) a) La fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$ (elle coïncide avec la fonction nulle sur $]-1, 1[$ et elle est bien définie sur $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$ en tant que quotient dont le dénominateur ne s'annule pas).

• L'ensemble de définition de f est donc bien centré en 0.
• Pour tout réel x de $]-1, 1[$, $-x \in\ ]-1, 1[$ donc on a $f(-x) = 0 = f(x)$.
• Pour tout réel x de $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$, $-x \in\ ]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$ et on a :

$f(-x) = \frac{1}{2(-x)^2} = \frac{1}{2x^2} = f(x)$.

Conclusion :

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est paire}}$$

b) • La fonction f est bien définie sur $]-\infty, -1]$ et sur $[1, +\infty[$ comme fraction rationnelle de dénominateur strictement positif, f est donc positive sur ces deux intervalles. Comme de plus, elle est nulle sur $]-1, 1[$, alors f est positive.

• La restriction de f est continue sur $]-\infty, -1]$ et sur $[1, +\infty[$ en tant que fraction rationnelle bien définie. De plus, la restriction de f est nulle sur $]-1, 1[$, donc continue sur $]-1, 1[$.
La fonction f est donc continue sur $\mathbb{R}$, sauf peut-être en -1 et en 1.

• Pour tout réel A supérieur ou égal à 1 :

$$\int_1^A f(x)\,dx = \int_1^A \frac{1}{2x^2}\,dx = \left[\frac{1}{2x}\right]_1^A = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{A}\right).$$

Comme $\lim\limits_{A\to+\infty} \frac{1}{A} = 0$, on en conclut, par définition d'une intégrale convergente, que $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{2}$.

Concours **EDHEC** **2010**

Classes Préparatoires

MATHEMATIQUES

Concours d'admission sur classes préparatoires
Option économique

Présentation de l'épreuve :

• L'épreuve comportait, comme d'habitude, trois exercices et un problème, ce qui permettait de juger les candidats sur une partie conséquente du programme des classes préparatoires.
Le sujet balayait largement le programme en donnant une place importante aux probabilités (premier exercice et problème).
La diversité des thèmes abordés a permis à tous les candidats de s'exprimer et de montrer leurs compétences, ne serait-ce que sur une partie du programme. Dans l'ensemble, les correcteurs ont trouvé ce sujet sélectif, d'un niveau abordable, mais laissant encore plus d'initiative aux candidats que par le passé. Il a permis de bien apprécier les connaissances et les capacités à raisonner des candidats, ce qui est le premier but d'un texte de concours.

• L'exercice 1 proposait l'étude d'une fonction de 2 variables réelles dont l'étude locale en les points critiques ne permettait pas de conclure à la présence d'un extremum, mais pour laquelle l'utilisation d'une inégalité relativement élémentaire à établir garantissait la présence d'un minimum global.

• L'exercice 2 étudiait une suite (u_n) définie comme un produit, puis proposait de montrer la convergence de la série de terme général $\ell - u_n$, où ℓ désigne la limite de la suite (u_n).

• L'exercice 3 avait pour but de déterminer la loi de la variable aléatoire $Y = \ln|X|$, où X était une variable aléatoire suivant une loi donnée par l'énoncé, de support $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$. Une simulation informatique de la loi exponentielle de paramètre 1 était proposée en fin d'exercice (cette loi était bien sûr celle qu'il fallait trouver pour Y).

• Le problème, portant sur le programme d'algèbre linéaire et de probabilités, avait pour objectif d'étudier une suite de variables aléatoires discrètes attachée à une suite d'expériences aléatoires pour lesquelles une simulation informatique était proposée.

Statistiques :

Pour l'ensemble des 3482 candidats ayant composé, la moyenne obtenue à cette épreuve est égale à 10,38 sur 20 et l'écart type vaut 5,15.

36 % des candidats ont une note strictement inférieure à 8 (dont presque un tiers ont une note inférieure à 4). Le nombre de copies très faibles (note inférieure à 4) est en diminution de 5 % par rapport à l'année dernière.
26 % des candidats ont une note comprise entre 8 et 12.
17 % des candidats ont une note supérieure ou égale à 16.

Analyse des copies :

L'exercice 1 a révélé que peu de candidats sont vraiment bien préparés aux notions du programme vues vers la fin de l'année, mais aussi que certains (trop) ne connaissent pas les notions élémentaires de calcul vues au collège…

L'exercice 2 a révélé qu'en analyse, les candidats savent, en majorité, traiter les questions classiques, mais sont capables de commettre des fautes inattendues : fautes de calcul sur les fractions, justifications maladroites ou complètement fausses d'inégalités classiques (comme $\ln(1+x) \leq x$ pour tout x plus grand que -1).

L'exercice 3, montre que beaucoup de candidats maîtrisent mal l'étude d'une variable à densité fonction d'une autre, notamment en ne s'intéressant pas à son support en tout premier, ce qui donne lieu à des discussions peu rigoureuses pour conclure.

Le problème a, en ce qui concerne sa partie d'algèbre linéaire, été correctement traité mais on sent que certains candidats ont des habitudes (appliquant des recettes) et que si on les oblige à travailler sur un schéma différent de celui qu'ils connaissent, ils se perdent.
La partie probabilités laisse encore plus perplexe : peu de candidats ont réellement su analyser correctement la description de l'expérience aléatoire qui leur était proposée.

Les copies sont en grande majorité honnêtes, les candidats précisant clairement qu'ils admettent le résultat d'une question non traitée.
Cela dit, il faut noter cette année encore que certaines copies sont mal présentées : résultats mal mis en valeur (ni encadrés, ni même soulignés), numérotation des questions non respectée, etc.
Comme l'année dernière, les correcteurs ont constaté que lorsque les résultats sont donnés par l'énoncé, certains candidats sont prêts à tout pour faire croire qu'ils ont prouvé le résultat demandé : qu'ils sachent que ceci est sanctionné très sévèrement et qu'aucun correcteur n'est dupe.
Certains correcteurs demandent donc s'il est possible d'établir un malus qui serait attribué aux copies mal présentées et/ou malhonnêtes : la question est à l'étude.

Voici une liste des quelques fautes, omissions et imprécisions les plus fréquentes (chacune d'entre elles ayant été trouvée sur un nombre significatif de copies) commises cette année :

Exercice 1

• Il est faux d'écrire que, comme $x^2 = y^2$, alors on a : $x = y$.
• Il n'est pas question de justifier la classe C^2 d'une fonction de deux variables en citant les applications $x \mapsto \frac{1}{x}$ et $y \mapsto \frac{1}{y}$. Dans le cas présent, il fallait citer $(x, y) \mapsto \frac{1}{x}+\frac{1}{y}$, et si possible, sans omettre de signaler que les dénominateurs sont différents de 0 sur $]0,+\infty[^2$.

• Une définition mal comprise : l'inégalité « $\forall (x,y) \in]0,+\infty[^2, f(x,y) \geq 4$ » ne prouve pas que la fonction f possède un minimum global égal à 4 sur $]0,+\infty[^2$, mais seulement que 4 est un minorant de f sur $]0,+\infty[^2$.
• Le scandale : trop de candidats ne savent pas montrer que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, (x+y)^2 \geq 4xy$.

Exercice 2.
• Il n'est vraiment pas bien d'écrire qu'une suite bornée converge toujours…
• Presque tous les candidats semblent ignorer qu'un majorant ne doit pas dépendre de la variable : ayant obtenu $\ln(u_n) \leq 2 - \dfrac{1}{2^n}$, on ne peut pas qualifier le membre de droite de majorant de $\ln(u_n)$.
• Une faute assez fréquente : ayant obtenu $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n}{2^{n+1}}$, de nombreux candidats n'ont pas cité la positivité de u_n pour déduire la croissance de la suite (u_n).
• La majorité des candidats passent à la limite avant d'avoir établi la convergence des suites en jeu.
• L'horreur : pour certains candidats, le logarithme d'un produit est égal au produit des logarithmes !

Exercice 3
• Il n'est vraiment pas bien de manipuler des intégrales impropres avant d'en avoir établi la convergence.
• Il n'est pas correct de citer l'imparité de la fonction $t \mapsto tf(t)$ pour affirmer que $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,dt = 0$. Dans le cas présent, cette dernière intégrale était divergente.
• Il est impardonnable d'enchaîner ce qui suit : $x < 0$ donc $-x < 0$ donc $e^{-x} < 1$ donc $1 - e^{-x} < 0$. Seul le deuxième "donc" est correct !
• Il faut éviter d'écrire l'égalité suivante : $\int_1^{+\infty} f(t)dt = \int_1^A f(t)dt$, même en ajoutant ensuite « lorsque A tend vers $+\infty$ ».

Problème
• Trop de candidats oublient, après avoir trouvé $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Vect}(e_2 - e_3)$, de préciser que le vecteur $e_2 - e_3$ est non nul afin de conclure que $(e_2 - e_3)$ est une base de $\mathrm{Ker} f$.
• Il faut absolument éviter de procéder à des opérations élémentaires sur les colonnes d'une matrice, ce n'est pas au programme.
• Le must que l'on s'attend toujours à voir, et que l'on a vu sur un certain nombre de copies : trouver $\dim \mathrm{Ker}\, f = 4$ et $\dim \mathrm{Im} f = 5$, alors que f désigne un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, ce qui prouve la confusion qui règne dans l'esprit de certains candidats.

Conclusion :
Le niveau moyen semble en hausse par rapport à l'année dernière, il y a beaucoup moins de copies très faibles ("seulement" 82 copies ont moins de 2 sur 20).
Rappelons, comme d'habitude, que l'honnêteté, la simplicité, la précision et la rigueur sont des vertus attendues par tous les correcteurs sans exception, et qu'une bonne réponse est toujours une réponse construite rigoureusement.

Exercice 4

Soit $f(x) = \left(\dfrac{x}{x-1}\right)^{x-1} - \left(\dfrac{x+1}{x}\right)^{x+1}$.

1. *Déterminer l'ensemble de définition* $\mathscr{D}$ *de la fonction* f.

   On a
$$f(x) = \exp\left\{(x-1)\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)\right\} - \exp\left\{(x+1)\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)\right\},$$
   donc
$$\begin{aligned}\big(f(x) \text{ définie}\big) &\iff \left(\frac{x}{x-1} > 0 \quad \text{et} \quad \frac{x+1}{x} > 0\right) \\ &\iff \big(x \in]-\infty;0[\cup]1;+\infty[\quad \text{et} \quad x \in]-\infty;-1[\cup]0;+\infty[\big) \\ &\iff \big(x \in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[\big),\end{aligned}$$
   donc
$$\boxed{\mathscr{D} =]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[.}$$

2. *Montrer que* f *est impaire sur* $\mathscr{D}$.

   L'ensemble de définition $\mathscr{D}$ est centré en 0. De plus, pour tout $x \in \mathscr{D}$, on a
$$\begin{aligned}f(-x) &= \left(\frac{-x}{-x-1}\right)^{-x-1} - \left(\frac{-x+1}{-x}\right)^{-x+1} \\ &= \left(\frac{x}{x+1}\right)^{-x-1} - \left(\frac{x-1}{x}\right)^{-x+1} \\ &= \left(\frac{x+1}{x}\right)^{x+1} - \left(\frac{x}{x-1}\right)^{x-1} \\ &= -f(x),\end{aligned}$$
   donc
$$\boxed{f \text{ est impaire sur } \mathscr{D}.}$$

3. *Prolonger* f *par continuité aux points* 1 *et* -1.

   On a
$$f(x) = \underbrace{\exp\left\{(x-1)\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)\right\}}_{=\varphi(x)} - \underbrace{\exp\left\{(x+1)\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)\right\}}_{=\psi(x)}.$$
   Le second terme ne conduit pas à une forme indéterminée lorsque x tend vers 1 et l'on a
$$\lim_{x\to 1^+} \psi(x) = \mathrm{e}^{2\ln 2} = 4.$$
   Pour le premier terme, on pose $x = 1+h$ avec $h \longrightarrow 0^+$ de sorte que
$$\varphi(1+h) = \exp\left\{h\ln\left(\frac{1+h}{h}\right)\right\} = \exp\{h\ln(1+h) - h\ln h\}.$$
   Or $\lim_{h\to 0^+} h\ln(1+h) = 0$ et $\lim_{h\to 0^+} h\ln h = 0$ d'après le critère des croissances comparées, donc
$$\lim_{h\to 0^+} \varphi(1+h) = \mathrm{e}^0 = 1.$$
   Il s'ensuit que
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1 - 4 = -3.$$
   Comme f est impaire, on a
$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = 3.$$
   En définitive,
$$\boxed{f \text{ se prolonge par continuité en 1 et } -1 \text{ en posant } f(1) = -3 \text{ et } f(-1) = 3.}$$

Exo VI.