

DEVOIR SURVEILLE 4

Partie III

On considère la fonction G définie sur $\mathbb{R}_+$ par $G(x) = \int_x^{2x} f(t) dt$.

1. Justifier que G est bien définie sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ puis calculer G' .
2. Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, (1 - e^{-x}) \ln 2 \leq G(x) \leq \ln 2$. En déduire la limite de $G(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
3. Montrer que G réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur un intervalle J à déterminer.
4. Déterminer l'ensemble K des points en lesquels G^{-1} est dérivable.

Problème 2 — Ce problème est composé de deux parties totalement indépendantes.

On se propose de modéliser la participation d'une équipe à deux épreuves du jeu « fort Boyard ».
Dans toute le problème, N désigne un entier naturel non nul.

Partie I

Dans la première épreuve du jeu, une candidate est dans une salle où sont disposées $(N + 1)$ jarres opaques numérotées de 0 à N . Pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, la jarre numéro k contient k clés et $(N - k)$ scorpions.

L'équipe effectue N lancers indépendants d'une pièce donnant « pile » avec probabilité $p \in [0, 1]$. La candidate pioche ensuite au hasard un objet dans la jarre dont le numéro correspond au nombre de « piles » obtenus. Par exemple, si on a obtenu quatre « piles » au cours de ces N lancers, la candidate pioche dans la jarre n° 4.

On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de « piles » obtenus lors des N lancers et Y la variable aléatoire qui vaut 1 si la candidate pioche une clé et 0 si elle pioche un scorpion.

- a) Reconnaître la loi de probabilité de la variable aléatoire X . Donner l'espérance $E(X)$ et la variance $V(X)$.
- b) En utilisant la formule de Koenig-Huygens, calculer la valeur de $E(X^2)$.

2. a) Justifier que, pour tout $k \in \llbracket 0, N \rrbracket$, $P_{[X=k]}(Y = 1) = \frac{k}{N}$.

- b) En déduire, en utilisant le système complet d'événements $([X = k])_{k \in \llbracket 0, N \rrbracket}$, que $P(Y = 1) = \frac{E(X)}{N}$.
- c) Donner la loi de Y et son espérance.

3. On admet que l'espérance de XY est donnée par $E(XY) = \sum_{k=1}^N kP(X = k \cap Y = 1)$.

- a) En utilisant la formule précédente montrer que $E(XY) = \frac{E(X^2)}{N}$.
- b) En déduire la valeur de la quantité $E(XY) - E(X)E(Y)$ en fonction du paramètre p .

Partie II

Dans la seconde épreuve, trois gobelets opaques sont disposés sur un tonneau servant de table de jeu. Deux petites clés sont cachées sous deux des gobelets. Le candidat effectue une série de N essais. A chaque essai, il choisit l'un des trois gobelets au hasard. Si le gobelet est vide, on mélange à nouveau les gobelets. Si le gobelet choisi dissimule une clé, le candidat remporte la clé : celle-ci est enlevée de la table de jeu et on mélange à nouveau les gobelets.

Pour tout $n \in \llbracket 1, N \rrbracket$, on note Y_n la variable aléatoire égale au nombre de clés encore présentes sur la table de jeu à l'issue du n^{e} tirage (on convient que $Y_0 = 2$).

On notera pour tout $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$ l'événements C_k : « Lors du k^{e} essai le gobelet choisi dissimule une clé. »

1. Donner la loi de probabilité de Y_1 .
2. Quelles sont les valeurs possibles de Y_n dans le cas où n est supérieur ou égal à 2 ?
3. Calculer pour tout entier $n \in \llbracket 1, N \rrbracket$, $P(Y_n = 2)$.
4. On pose pour $n \in \llbracket 1, N \rrbracket$, $u_n = P(Y_n = 1)$.
 - a) Rappeler la valeur de u_1 et montrer que $u_2 = \frac{2}{3}$.
 - b) A l'aide du système complet d'événements lié à la variable Y_n , montrer : $\forall n \in \llbracket 2, N-1 \rrbracket, u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{2}{3^{n+1}}$.
 - c) En déduire : $\forall n \in \llbracket 2, N \rrbracket, u_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{2}{3^n}$. Cette relation reste-t-elle valable lorsque $n = 1$?
 - d) Déduire des résultats précédents $P(Y_n = 0)$ pour tout $n \in \llbracket 1, N \rrbracket$.
5. Pour tout entier $n \in \llbracket 1, N \rrbracket$, calculer l'espérance de Y_n .
6. On note Z la variable aléatoire égale au numéro de l'essai « éliminant » la dernière clé de la table de jeu (on convient que Z vaut $N + 1$ s'il reste encore au moins une clé sur la table à l'issue des N essais).
 - a) Donner $Z(\Omega)$.
 - b) Soit $k \in \llbracket 2, N \rrbracket$. Exprimer l'événement $[Z = k]$ en fonction des variables Y_k et Y_{k-1} .
 - c) En déduire la loi de Z .

- (c) En déduire les expressions de a_n et b_n en fonction de n .

Exercice 4. Quelques limites matricielles.

Partie 1.

On rappelle que :

$$\sum_{k=1}^N \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix} \text{ est la matrice } \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^N a_k & \sum_{k=1}^N b_k \\ \sum_{k=1}^N c_k & \sum_{k=1}^N d_k \end{pmatrix}$$

et on désigne par I_2 la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Pour tout réel non nul t , on pose

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & t \\ -\frac{1}{t} & -1 \end{pmatrix}.$$

- (1) A quelle condition sur s et t , l'égalité $A_t A_s = A_s A_t$ est-elle vérifiée ?
- (2) Calculer $(A_t + A_s)^2$
- (3) Montrer que $(A_t + A_s)^{2n} = (-1)^n \frac{(s-t)^{2n}}{(st)^n} I_2$.
- (4) On dit qu'une suite de matrices $\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$ converge vers une matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ lorsque

$$\lim a_n = a, \quad \lim b_n = b, \quad \lim c_n = c, \quad \lim d_n = d$$

et on note alors : $\lim \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

On pose pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,

$$M_n = \sum_{k=1}^n (A_t + A_{2t})^{2k}.$$

Etudier $\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n$.

- (5) On pose pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P_n = \sum_{k=1}^n (A_k + A_{k+1})^2.$$

Etudier $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n$.

Partie 2.

Pour tout réel non nul t , on pose

$$B_t = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \text{ et } C_t = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{a}{t} \\ \frac{a}{t} & 1 \end{pmatrix}.$$

Dans cette partie, on s'intéresse à la limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} (C_n)^n$.

- (6) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}^*$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(B_t)^n = B_{nt}$. On pourra procéder par récurrence sur n .
- (7) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier l'existence d'un réel $\theta_n \in [0, 2\pi[$ vérifiant

$$\cos(\theta_n) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{a}{n})^2}} \text{ et } \sin(\theta_n) = \frac{a}{n\sqrt{1 + (\frac{a}{n})^2}}.$$

On pourra considérer le nombre complexe $1 + \frac{a}{n}i$.

- (8) Exprimer alors C_n en fonction de $\sqrt{1 + (\frac{a}{n})^2}$ et B_{θ_n} .
 - (9) Exprimer alors $(C_n)^n$ en indiquant ses coefficients en fonction de a, n et θ_n .
- On la donnera sous la forme

$$(C_n)^n = \lambda_n \begin{pmatrix} \cos(u_n) & -\sin(u_n) \\ \sin(u_n) & \cos(u_n) \end{pmatrix}$$

(10) On s'intéresse dans cette question à la limite : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \left(\frac{a}{n}\right)^2\right)^{\frac{n}{2}}$.

(a) Rappeler la limite $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln(1+u)}{u}$.

(b) Utiliser la limite précédente pour déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \left(\frac{a}{n}\right)^2\right)^{\frac{n}{2}}$.

(11) On s'intéresse dans cette question à la limite : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n\theta_n$.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $0 < \theta_n < \frac{\pi}{2}$.

(b) A l'aide de ses variations, étudier le signe de la fonction définie sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ par $g(x) = \sin(x) - x \cos(x)$.

(c) En étudiant la fonction définie définie sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ par $f(x) = \frac{x}{\sin(x)}$, montrer que pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$,

$$\sin(x) \leq x \leq \frac{\pi}{2} \sin(x).$$

(d) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \theta_n$.

(e) En utilisant la limite $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin(u)}{u}$, déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} n\theta_n$.

(12) En déduire la limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} (C_n)^n$

Concours blanc 1. Epreuve b.

Veillez à bien justifier vos réponses : un exercice bien traité rapporte des points, un exercice traité de façon non rigoureuse ne rapporte pas de points. Malus de 2 points pour les copies mal rédigées. La durée de l'épreuve est de 4 heures. Aucune sortie avant la fin de l'épreuve. Les calculatrices ne sont pas autorisées.

Si, au cours de l'épreuve, vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez le sur votre copie et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous êtes amenés à prendre.

Ce sujet comporte quatre exercices indépendants.

Exercice 1. Dans cet exercice, on admettra le résultat suivant :

Proposition. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels.
Si les suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers une même limite ℓ
alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ .

On considère pour tout $p \in \mathbb{N}$, les intégrales $I_p = \int_0^1 \frac{x^p}{1+x^2} dx$.

(1) Cette question a pour objet le calcul de I_0 . Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt.$$

- (a) Justifier la dérivabilité de g sur $\mathbb{R}$ et donnez l'expression de $g'(x)$.
 - (b) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = g(x) + g(-x)$.
Montrer que h est une fonction constante que l'on précisera. Qu'en déduisez vous sur la fonction g ?
 - (c) Soit maintenant la fonction f définie sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$ par $f(x) = g(\tan x)$. Justifier la dérivabilité de f et montrer que f' est une fonction constante à préciser. En déduire une expression simple pour $f(x)$.
 - (d) Déterminer la valeur de I_0 .
- (2) Relation de récurrence.
- (a) Calculer I_1 .
 - (b) Calculer $I_p + I_{p+2}$ en fonction de p .
 - (c) En déduire I_2 et I_3 .
- (3) Pour tout entier $n \geq 1$, on considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.
- On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$, $s_n = u_{2n}$ et $t_n = u_{2n+1}$.
- (a) Calculer $s_1, s_2, s_3, t_1, t_2, t_3$.
 - (b) Calculer $s_{n+1} - s_n$ et $t_{n+1} - t_n$ en fonction de n , et montrer que les suites $(s_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes.
 - (c) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.
- (4) En utilisant le résultat admis en début d'énoncé, montrer que la suite définie par $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, est convergente.
- (5) Etablir, pour tout entier $q \geq 1$, les égalités suivantes :
- (a) $u_q + 2(-1)^q I_{2q+1} = \ln 2$
 - (b) $v_q + (-1)^q I_{2q} = \frac{\pi}{4}$
- (6) Déterminer les limites des suites $(I_p)_{p \in \mathbb{N}}$, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- (7) A l'aide d'une intégration par parties, déterminer $\lim_{p \rightarrow +\infty} p I_p$.

CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLE 4

Exo I.

Par encadrement il vient donc $1 - \frac{u_n}{\ln(n+1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ i.e. $\frac{u_n}{\ln(n+1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ et donc $u_n \sim \ln(n+1)$.

(On a même $u_n \sim \ln(n)$, ceci car $\ln(n+1) \sim \ln n$; en effet $\frac{\ln(n+1)}{\ln n} = \frac{\ln(n(1+\frac{1}{n}))}{\ln n} = \frac{\ln n + \ln(1+\frac{1}{n})}{\ln n} = 1 + \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$)

Partie III

On considère la fonction G définie sur $\mathbb{R}_+$ par $G(x) = \int_x^{2x} f(t) dt$.

1. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on sait que f est continue sur $[x, 2x]$ donc $\int_x^{2x} f(t) dt$ est bien définie.

f étant continue sur $\mathbb{R}_+$, on peut à bon droit en considérer une primitive F sur $\mathbb{R}_+$.

Par définition de l'intégrale, on a alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $G(x) = [F(t)]_x^{2x} = F(2x) - F(x)$.

Aussi sait-on que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ (en tant que primitive d'une fonction continue) de sorte que par composition puis différence, la fonction G est elle-même de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$.

Par la propriété de dérivation des fonctions composées, on a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $G'(x) = 2F'(2x) - F'(x) = 2f(2x) - f(x)$.

Ainsi, si $x > 0$ on a donc $G'(x) = 2 \frac{1-e^{-2x}}{2x} - \frac{1-e^{-x}}{x} = \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x}$. Pour $x = 0$, on a $G'(0) = 2f(0) - f(0) = 1$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a, pour tout $t \in [x, 2x]$, $0 \leq e^{-t} \leq e^{-x}$ donc $1 \geq 1 - e^{-t} \geq 1 - e^{-x}$ et $\frac{1}{t} \geq f(t) \geq (1 - e^{-x}) \frac{1}{t}$.

Par croissance de l'intégrale (et puisque $x \leq 2x$), $\int_x^{2x} \frac{1}{t} dt \geq G(x) \geq (1 - e^{-x}) \int_x^{2x} \frac{1}{t} dt$.

On a donc $[\ln t]_x^{2x} \geq G(x) \geq (1 - e^{-x}) [\ln t]_x^{2x}$, i.e. $(\ln(2x) - \ln x) \geq G(x) \geq (1 - e^{-x})(\ln(2x) - \ln x)$ et donc $\ln 2 \geq G(x) \geq (1 - e^{-x}) \ln 2$.

Puisque $1 - e^{-x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 2$, on en déduit par encadrement que $G(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ln 2$.

3. On applique le théorème de la bijection :

- On sait que G est continue (car de classe C^1) sur $\mathbb{R}_+$.

- Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $G'(x) = \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x} = e^{-x} \frac{1 - e^{-x}}{x} > 0$. Ainsi G est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

- Aux bornes de $[0, +\infty[$, on a $G(0) = \int_0^0 f(t) dt = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = \ln 2$.

Le théorème de la bijection assure que G réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $J = [G(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} G(x)] = [0, \ln 2[$.

4. Vu que G est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, pour tout point $y = G(x) \in J$, on sait d'après le cours que G^{-1} est dérivable en y si et seulement $G'(x) \neq 0$. Or pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $G'(x) > 0$. Par conséquent G^{-1} est dérivable sur J entier.

Problème 2 — Partie I

1. a) X compte le nombre de piles obtenus au cours de N lancers indépendants. La probabilité d'obtenir pile à chaque lancer étant p . Ainsi $X \hookrightarrow \mathcal{B}(N, p)$ et, selon le cours, $E(X) = Np$ et $V(X) = Np(1-p)$.

b) D'après la formule de Koenig-Huygens, $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ donc $E(X^2) = V(X) + E(X)^2 = Np(1-p) + N^2p^2 = Np(1-p + Np)$.

2. a) Sachant $[X = k]$, la candidate pioche dans l'urne k qui contient k clés et $N - k$ scorpions. On est en situation d'équiprobabilité donc $P_{[X=k]}(Y = 1) = \frac{k}{N}$.

b) Le système complet d'événements $([X = k])_{k \in \llbracket 0, N \rrbracket}$ est formé d'événements de probabilités non nulles.

Par la formule des probabilités totales, on a $P(Y = 1) = \sum_{k=0}^N P_{[X=k]}(Y = 1)P(X = k) = \sum_{k=0}^N \frac{k}{N} P(X = k) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^N kP(X = k) = \frac{1}{N} E(X)$ (ceci car $X(\Omega) = \llbracket 0, N \rrbracket$)

c) On a $Y(\Omega) = \{0, 1\}$ et, d'après la question précédente (et la valeur de $E(X)$), on a $P(Y = 1) = \frac{E(X)}{N} = \frac{Np}{N} = p$.
Donc $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ et $E(Y) = p$.

3. a) En utilisant la formule de l'énoncé, on a

$$E(XY) = \sum_{k=1}^n kP(X = k \cap Y = 1) = \sum_{k=1}^n kP_{[X=k]}(Y = 1)P(X = k) = \sum_{k=1}^n k \frac{k}{N} P(X = k) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^n k^2 P(X = k) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^n k^2 P(X = k).$$

On reconnaît la formule donnant le moment d'ordre deux de X , qui donne donc $E(XY) = \frac{E(X^2)}{N}$.

b) Utilisant la question précédente et les valeurs trouvées pour $E(X^2)$ et $E(Y)$ on obtient $E(XY) - E(X)E(Y) = p(1-p + Np) - Np \times p = p(1-p)$.

Partie II

- A l'issue du premier essai il reste une ou deux clés sur le tonneau (suivant que le gobelet choisi ait ou non dissimulé une clé) : $Y(\Omega) = \{1, 2\}$. De plus :
 - $[Y = 1] = C_1$ et, par équiprobabilité, $P(Y = 1) = P(C_1) = \frac{2}{3}$.
 - De même, $P(Y = 2) = P(\overline{C}_1) = \frac{1}{3}$.
- Si au moins deux essais ont été effectués, il est possible d'avoir obtenu deux, une ou aucune clé. Ainsi, pour $n \geq 2$, $Y_n(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.
- $[Y_n = 2]$ signifie que l'on n'a obtenu de clé à aucun des n essais : $[Y_n = 2] = \overline{C}_1 \cap \overline{C}_2 \cap \dots \cap \overline{C}_n$.
Par la formule des probabilités composées : $P(Y_n = 2) = P(\overline{C}_1)P_{\overline{C}_1}(C_2) \times \dots \times P_{\overline{C}_1 \cap \dots \cap \overline{C}_{n-1}}(\overline{C}_n)$.
Or $P(\overline{C}_1) = \frac{1}{3}$. De plus, pour $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$, sachant $\overline{C}_1 \cap \dots \cap \overline{C}_{k-1}$, il y a encore deux clés sur le tonneau donc $P_{\overline{C}_1 \cap \dots \cap \overline{C}_{k-1}}(\overline{C}_k) = \frac{1}{3}$.
On a donc $P(Y_n = 2) = (\frac{1}{3})^n$.
- a) On a vu en 1. que $u_1 = P(Y_1 = 1) = \frac{2}{3}$.
 $[Y_2 = 1]$ signifie qu'une seule clé à été obtenue au cours des deux premiers essais : $[Y_2 = 1] = (C_1 \cap \overline{C}_2) \cup (\overline{C}_1 \cap C_2)$, il s'agit d'une réunion de deux événements incompatibles donc :
 $P(Y = 2) = P(C_1 \cap \overline{C}_2) + P(\overline{C}_1 \cap C_2) = P(C_1)P_{C_1}(\overline{C}_2) + P(\overline{C}_1)P_{\overline{C}_1}(C_2) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$.
 $(P_{C_1}(\overline{C}_2) = \frac{2}{3}$ car sachant C_1 il y deux gobelets vides sur les trois au deuxième essai).
 b) Pour $n \in \llbracket 2, N-1 \rrbracket$, on sait que $([Y_n = 0], [Y_n = 1], [Y_n = 2])$ est un système complet d'événements de probabilités nulles. Ainsi, par la formule des probabilités totales :
 $u_{n+1} = P(Y_{n+1} = 1) = P_{[Y_n=0]}(Y_{n+1} = 1)P(Y_n = 0) + P_{[Y_n=1]}(Y_{n+1} = 1)P(Y_n = 1) + P_{[Y_n=2]}(Y_{n+1} = 1)P(Y_n = 2)$.
 Aussi, au $n+1$ tirage :
 - Sachant $[Y_n = 0]$, il n'y a plus de clé sur la table donc $P_{[Y_n=0]}(Y_{n+1} = 1) = 0$.
 - Sachant $[Y_n = 1]$, il y a une seule clé sur la table et $[Y_{n+1} = 1]$ est réalisé si on choisit l'un des deux gobelets vides (sur les trois) donc $P_{[Y_n=1]}(Y_{n+1} = 1) = \frac{2}{3}$.
 - Sachant $[Y_n = 2]$, il y a deux clés sur la table $[Y_{n+1} = 1]$ est réalisé si on choisit l'un des deux gobelets qui contiennent une clé donc $P_{[Y_n=2]}(Y_{n+1} = 1) = \frac{2}{3}$.
 Par conséquent $u_{n+1} = 0 + \frac{2}{3}P(Y_n = 1) + \frac{2}{3}P(Y_n = 2) = \frac{2}{3}u_n + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}u_n + \frac{2}{3^{n+1}}$.
 c) Par récurrence (finie) sur n , montrons : $\forall n \in \llbracket 2, N \rrbracket, u_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{2}{3^n}$.
 • Pour $n = 2$, on a vu que $u_2 = \frac{2}{3}$ et on a $2\left(\frac{2}{3}\right)^2 - \frac{2}{3^2} = \frac{8}{9} - \frac{2}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$.
 • Pour $n \in \llbracket 2, N-1 \rrbracket$, supposons que l'on ait $u_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{2}{3^n}$.
 Alors $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{2}{3^{n+1}} = \frac{2}{3}\left(2\left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{2}{3^n}\right) + \frac{2}{3^{n+1}} = 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - \frac{2}{3^{n+1}} + \frac{2}{3^{n+1}}$, ce que l'on voulait.
 On a donc $\forall n \in \llbracket 2, N \rrbracket, u_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{2}{3^n}$.
 Lorsque $n = 1$, on a vu que $u_1 = \frac{2}{3}$ et $2\left(\frac{2}{3}\right)^1 - \frac{2}{3^1} = \frac{4}{3} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$ donc la relation est encore vraie.
 d) Pour $n \geq 2$, $Y_n(\Omega) = \{0, 1, 2\}$, donc on sait par le cours que $P(Y_n = 0) + P(Y_n = 1) + P(Y_n = 2) = 1$ d'où
 $P(Y_n = 0) = 1 - P(Y_n = 1) - P(Y_n = 2) = 1 - \left(2\left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{2}{3^n}\right) - \frac{1}{3^n} = 1 - 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{1}{3^n}$.
 La formule obtenue est encore vraie pour $n = 1$ puisque $1 - 2\left(\frac{2}{3}\right)^1 + \frac{1}{3^1} = 0 = P(Y_1 = 0)$.
 5. On a $E(Y_n) = 0 \times P(Y_n = 0) + 1 \times P(Y_n = 1) + 2 \times P(Y_n = 2)$ (formule qui est aussi vraie pour $n = 1$).
 Ainsi $E(Y_n) = u_n + 2 \times \frac{1}{3^n} = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{2}{3^n} + \frac{2}{3^n} = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n$.
 6. a) Au plus tôt, la dernière clé peut être obtenue au deuxième essai. Au plus tard, il reste encore au moins une clé sur la table à l'issue des N essais. Par suite $Z(\Omega) = \llbracket 2, N+1 \rrbracket$.
 b) Soit $k \in \llbracket 2, N \rrbracket$. $[Z = k]$ signifie qu'il n'y a plus de clé sur la table après le k ème essai et qu'il n'en restait qu'une après le $k-1$ ème : $[Z = k] = [Y_{k-1} = 1] \cap [Y_k = 0]$.
 c) Pour $k \in \llbracket 2, N \rrbracket$, on a $P(Z = k) = P(Y_{k-1} = 1)P_{[Y_{k-1}=1]}(Y_k = 0) = u_{k-1}P_{[Y_{k-1}=1]}(C_k) = u_{k-1} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\left(2\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} - \frac{2}{3^{k-1}}\right) = \frac{2^k - 2}{3^k}$.
 $[Z = N+1]$ signifie qu'il reste au moins une clé sur la table à l'issue du N ème essai donc $[Z = N+1] = [Y_N = 0]$ et
 $P(Z = N+1) = 1 - \left(1 - 2\left(\frac{2}{3}\right)^N + \frac{1}{3^N}\right) = 2\left(\frac{2}{3}\right)^N - \frac{1}{3^N}$

(a) Montrer que, pour tout entier n , $u_{n+1} = -3u_n - 1$.

Pour tout entier naturel n ,

$$\begin{aligned} u_{n+1} + 3u_n &= (-1)^{n+1}b_{n+1} + 3(-1)^nb_n \\ &= (-1)^{n+1}(a_n + 2b_n) + 3(-1)^nb_n \\ &= (-1)^{n+1}(3b_n + (-1)^n) + 3(-1)^nb_n \\ &= 3b_n((-1)^{n+1} + (-1)^n) + (-1)^{2n+1} \\ &= -1. \end{aligned}$$

(b) On pose, pour tout entier n , $v_n = u_n + \frac{1}{4}$. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique et on exprimera v_n en fonction de n .

Pour tout entier naturel n ,

$$v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{1}{4} = -3u_n - 1 + \frac{1}{4} = -3u_n - \frac{3}{4} = -3\left(u_n + \frac{1}{4}\right)$$

donc la suite (v_n) est géométrique et

$$v_n = (-3)^nv_0 = (-3)^n\left(b_0 + \frac{1}{4}\right) = \frac{(-3)^n}{4}.$$

(c) En déduire les expressions de a_n et b_n en fonction de n .

On a donc : pour tout entier naturel n ,

$$b_n = (-1)^nu_n = (-1)^n\left(v_n - \frac{1}{4}\right) = (-1)^n\left(\frac{(-3)^n}{4} - \frac{1}{4}\right) = \frac{3^n - (-1)^n}{4}$$

et

$$a_n = b_n + (-1)^n = \frac{3^n - (-1)^n}{4} + (-1)^n = \frac{3^n + 3(-1)^n}{4}$$

Exercice 4. Quelques limites matricielles.

Partie 1.

On rappelle que :

$$\sum_{k=1}^N \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix} \text{ est la matrice } \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^N a_k & \sum_{k=1}^N b_k \\ \sum_{k=1}^N c_k & \sum_{k=1}^N d_k \end{pmatrix}$$

et on désigne par I_2 la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Pour tout réel non nul t , on pose

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & t \\ -\frac{1}{t} & -1 \end{pmatrix}.$$

(1) A quelle condition sur s et t , l'égalité $A_tA_s = A_sA_t$ est-elle vérifiée?

D'une part

$$A_tA_s = \begin{pmatrix} 1 & t \\ -\frac{1}{t} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & s \\ -\frac{1}{s} & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{t}{s} & s - t \\ -\frac{1}{t} + \frac{1}{s} & 1 - \frac{s}{t} \end{pmatrix}$$

et

$$A_sA_t = \begin{pmatrix} 1 & s \\ -\frac{1}{s} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ -\frac{1}{t} & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{s}{t} & t - s \\ -\frac{1}{s} + \frac{1}{t} & 1 - \frac{t}{s} \end{pmatrix}$$

donc $A_tA_s = A_sA_t$ si et seulement si $\begin{cases} 1 - \frac{t}{s} = \frac{s}{t} \\ -\frac{1}{t} + \frac{1}{s} = -\frac{1}{s} + \frac{1}{t} \\ s - t = t - s \end{cases} = \begin{cases} \frac{s}{t} \\ -\frac{1}{s} + \frac{1}{t} \\ t - s \end{cases}$ c'est à dire si et seulement si $t = s$.

(2) Calculer $(A_t + A_s)^2$

$$(A_t + A_s)^2 = \begin{pmatrix} 2 & s+t \\ -\frac{1}{t} - \frac{1}{s} & -2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 4 - \frac{(s+t)^2}{st} & 0 \\ 0 & 4 - \frac{(s+t)^2}{st} \end{pmatrix}$$

Or $4 - \frac{(s+t)^2}{st} = -\frac{(s-t)^2}{st}$ donc

$$(A_t + A_s)^2 = -\frac{(s-t)^2}{st} I_2.$$

(3) Montrer que $(A_t + A_s)^{2n} = (-1)^n \frac{(s-t)^{2n}}{(st)^n} I_2$.

De l'égalité $(A_t + A_s)^2 = -\frac{(s-t)^2}{st} I_2$, il vient

$$(A_t + A_s)^{2n} = \left(-\frac{(s-t)^2}{st} \right)^n (I_2)^n = (-1)^n \frac{(s-t)^{2n}}{(st)^n} I_2.$$

(4) On dit qu'une suite de matrices $\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$ converge vers une matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ lorsque

$$\lim a_n = a, \quad \lim b_n = b, \quad \lim c_n = c, \quad \lim d_n = d$$

et on note alors : $\lim \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

On pose pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,

$$M_n = \sum_{k=1}^n (A_t + A_{2t})^{2k}.$$

Etudier $\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n$.

D'après ce qui précède, $(A_t + A_{2t})^{2k} = (-1)^n \frac{t^{2k}}{(2t^2)^k} I_2 = \frac{(-1)^k}{2^k} I_2$ donc

$$M_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{2^k} I_2 = \left(\sum_{k=1}^n \left(\frac{-1}{2} \right)^k \right) I_2.$$

Or $\sum_{k=1}^n \left(\frac{-1}{2} \right)^k = -\frac{1}{2} \left(\frac{1 - (-\frac{1}{2})^n}{1 + \frac{1}{2}} \right) = -\frac{1}{3} \left(1 - (-\frac{1}{2})^n \right)$ et $\lim \left(\frac{-1}{2} \right)^n = 0$ donc

$$\lim M_n = -\frac{1}{3} I_2.$$

(5) On pose pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P_n = \sum_{k=1}^n (A_k + A_{k+1})^2.$$

Etudier $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n$.

Toujours d'après la question (3), $(A_k + A_{k+1})^2 = \frac{-1}{k(k+1)} I_2$ donc

$$P_n = \left(-\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \right) I_2.$$

Or $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$ et $\lim \frac{1}{n+1} = 0$ donc

$$\lim P_n = -I_2$$

Partie 2.

Pour tout réel non nul t , on pose

$$B_t = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \text{ et } C_t = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{a}{t} \\ \frac{a}{t} & 1 \end{pmatrix}.$$

Dans cette partie, on s'intéresse à la limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} (C_n)^n$.

- (6) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}^*$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(B_t)^n = B_{nt}$. On pourra procéder par récurrence sur n .
Soit $t \in \mathbb{R}^*$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $\mathcal{P}_n$ la propriété : « $(B_t)^n = B_{nt}$ »

— Pour $n = 1$, l'égalité est claire : $B_t = B_t$!

— Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}_n$ est vraie. Montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

On a

$$(B_t)^{n+1} = (B_t)^n \times B_t = B_{nt} \times B_t = \begin{pmatrix} \cos nt & -\sin nt \\ \sin nt & \cos nt \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

Or

$$\begin{pmatrix} \cos nt & -\sin nt \\ \sin nt & \cos nt \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos nt \cos t - \sin nt \sin t & -\cos nt \sin t - \sin nt \cos t \\ \sin nt \cos t + \cos nt \sin t & \cos nt \cos t - \sin nt \sin t \end{pmatrix}$$

et d'après les formules de trigonométrie, on obtient

$$(B_t)^{n+1} = \begin{pmatrix} \cos(n+1)t & -\sin(n+1)t \\ \sin(n+1)t & \cos(n+1)t \end{pmatrix} = B_{(n+1)t}$$

Ainsi, la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est donc vraie dès que $\mathcal{P}_n$ est vraie.

— D'après le principe de récurrence sur $\mathbb{N}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(B_t)^n = B_{nt}$.

- (7) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier l'existence d'un réel $\theta_n \in [0, 2\pi[$ vérifiant

$$\cos(\theta_n) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{a}{n}\right)^2}} \text{ et } \sin(\theta_n) = \frac{a}{n\sqrt{1 + \left(\frac{a}{n}\right)^2}}.$$

On pourra considérer le nombre complexe $1 + \frac{a}{n}i$.

Le nombre complexe $1 + \frac{a}{n}i$ est non nul : appelons θ_n son argument dans $[0, 2\pi[$. La forme trigonométrique de ce nombre complexe est donc

$$1 + \frac{a}{n}i = \sqrt{1 + \left(\frac{a}{n}\right)^2} (\cos \theta_n + i \sin \theta_n)$$

ce qui donne après identification des parties réelles et imaginaires :

$$\sqrt{1 + \left(\frac{a}{n}\right)^2} \cos \theta_n = 1 \text{ et } \sqrt{1 + \left(\frac{a}{n}\right)^2} \sin \theta_n = \frac{a}{n}$$

d'où les égalités demandées.

- (8) Exprimer alors C_n en fonction de $\sqrt{1 + \left(\frac{a}{n}\right)^2}$ et B_{θ_n} .

On a

$$C_n = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{a}{n} \\ \frac{a}{n} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{1 + \left(\frac{a}{n}\right)^2} \cos \theta_n & -\sqrt{1 + \left(\frac{a}{n}\right)^2} \sin \theta_n \\ \sqrt{1 + \left(\frac{a}{n}\right)^2} \sin \theta_n & \sqrt{1 + \left(\frac{a}{n}\right)^2} \cos \theta_n \end{pmatrix} = \sqrt{1 + \left(\frac{a}{n}\right)^2} \times B_{\theta_n}$$

- (9) Exprimer alors $(C_n)^n$ en indiquant ses coefficients en fonction de a, n et θ_n .

On la donnera sous la forme

$$(C_n)^n = \lambda_n \begin{pmatrix} \cos(u_n) & -\sin(u_n) \\ \sin(u_n) & \cos(u_n) \end{pmatrix}$$

Le calcul précédent donne

$$(C_n)^n = \left(1 + \left(\frac{a}{n}\right)^2\right)^{\frac{n}{2}} (B_{\theta_n})^n = \left(1 + \left(\frac{a}{n}\right)^2\right)^{\frac{n}{2}} B_{n\theta_n} = \left(1 + \left(\frac{a}{n}\right)^2\right)^{\frac{n}{2}} \begin{pmatrix} \cos n\theta_n & -\sin n\theta_n \\ \sin n\theta_n & \cos n\theta_n \end{pmatrix}$$

- (10) On s'intéresse dans cette question à la limite : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \left(\frac{a}{n}\right)^2\right)^{\frac{n}{2}}$.

- (a) Rappeler la limite $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln(1+u)}{u}$.

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln(1+u)}{u} = 1.$$

(b) Utiliser la limite précédente pour déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \left(\frac{a}{n}\right)^2\right)^{\frac{n}{2}}$.

On étudie $\frac{n}{2} \ln \left(1 + \left(\frac{a}{n}\right)^2\right)$:

$$\frac{n}{2} \ln \left(1 + \left(\frac{a}{n}\right)^2\right) = \frac{a^2}{2n} \frac{\ln \left(1 + \left(\frac{a}{n}\right)^2\right)}{\left(\frac{a}{n}\right)^2}.$$

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a}{n} = 0$, par composition de limites avec la précédente, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(1 + \left(\frac{a}{n}\right)^2\right)}{\left(\frac{a}{n}\right)^2} = 1$ et par opérations sur les limites,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2} \ln \left(1 + \left(\frac{a}{n}\right)^2\right) = 0$$

donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \left(\frac{a}{n}\right)^2\right)^{\frac{n}{2}} = 1.$$

(11) On s'intéresse dans cette question à la limite : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n\theta_n$.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $0 < \theta_n < \frac{\pi}{2}$.

D'après la question (7) :

$$\cos \theta_n > 0, \sin \theta_n > 0 \text{ et } \theta_n \in]0, 2\pi[$$

Or sur l'intervalle $[0, 2\pi[$, la fonction $\sin$ est strictement positive sur $]0, \pi[$, et la fonction $\cos$ est strictement positive sur $[0, \frac{\pi}{2}[\cup] \frac{3\pi}{2}, 2\pi[$, donc $\theta_n \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

(b) A l'aide de ses variations, étudier le signe de la fonction définie sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ par $g(x) = \sin(x) - x \cos(x)$.

La fonction g est dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ comme somme et produit de fonctions dérivables et

$$g'(x) = \cos x - \cos x + x \sin x = x \sin x.$$

La dérivée g' est strictement positive sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ donc g est strictement croissante. Puisque $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$, la fonction g est strictement positive sur $]0, \frac{\pi}{2}[$.

(c) En étudiant la fonction définie sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ par $f(x) = \frac{x}{\sin(x)}$, montrer que pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$,

$$\sin(x) \leq x \leq \frac{\pi}{2} \sin(x).$$

La fonction définie sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ par $f(x) = \frac{x}{\sin(x)}$ est dérivable comme quotient défini de fonctions dérivables et

$$\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[, f'(x) = \frac{\sin x - x \cos x}{(\sin x)^2}.$$

La stricte positivité de la fonction g assure donc que f est strictement croissante sur $]0, \frac{\pi}{2}[$. Puisque $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = \frac{\pi}{2}$, pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$,

$$1 \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{\pi}{2}$$

c'est à dire encore

$$\sin(x) \leq x \leq \frac{\pi}{2} \sin(x).$$

(d) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \theta_n$.

Puisque $\theta_n \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on a

$$\sin(\theta_n) \leq \theta_n \leq \frac{\pi}{2} \sin(\theta_n)$$

et d'après la question (7),

$$\frac{a}{n\sqrt{1+(\frac{a}{n})^2}} \leq \theta_n \leq \frac{\pi a}{2n\sqrt{1+(\frac{a}{n})^2}}.$$

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a}{n\sqrt{1+(\frac{a}{n})^2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi a}{2n\sqrt{1+(\frac{a}{n})^2}} = 0$, le théorème de convergence par encadrement donne alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \theta_n = 0$.

(e) En utilisant la limite $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin(u)}{u}$, déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} n\theta_n$.

D'après la question (7), $\sin \theta_n = \frac{a}{n\sqrt{1+(\frac{a}{n})^2}}$ donc $\frac{\theta_n}{\sin \theta_n} = \frac{a}{n\theta_n \sqrt{1+(\frac{a}{n})^2}}$ donc

$$n\theta_n = \frac{a}{\frac{\sin \theta_n}{\theta_n}} \sqrt{1 + \left(\frac{a}{n}\right)^2}.$$

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \theta_n = 0$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin \theta_n}{\theta_n} = 1$ et par opérations sur les limites :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n\theta_n = a.$$

(12) En déduire la limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} (C_n)^n$

Des résultats précédents, on tire

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (C_n)^n = \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix}.$$

Exercice 5 (d'après Bac C, 1983). Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt.$$

- (1) Expliquez pourquoi g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donnez l'expression de $g'(x)$.

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme primitive de la fonction continue $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$. Par conséquent,

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

- (2) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = g(x) + g(-x)$.

- (a) Expliquez pourquoi h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donnez l'expression de $h'(x)$.

La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme et composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = g'(x) - g'(-x) = 0$$

- (b) En déduire que h est une fonction constante que l'on précisera. Qu'en déduisez vous sur la fonction g ?

Comme h' est nulle sur $\mathbb{R}$, la fonction h est constante sur $\mathbb{R}$ donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = h(0) = 2g(0) = 0$$

et par conséquent

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(-x) = -g(x)$$

ce qui montre que la fonction g est impaire.

- (3) Soit maintenant la fonction f définie sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ par $f(x) = g(\tan x)$.

- (a) Expliquez pourquoi la fonction f est dérivable et donnez l'expression de $f'(x)$. En remarquant que $f(0) = 0$, déterminez alors une expression simple pour $f(x)$.

La fonction f est dérivable sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ comme composée de fonctions dérivables et

$$\forall x \in] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, f'(x) = (1 + \tan^2 x)g'(\tan x) = (1 + \tan^2 x) \times \frac{1}{1 + \tan^2 x} = 1.$$

On en déduit que, pour tout réel $x \in] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$,

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt = g(0) + \int_0^x 1 dt = x.$$

- (b) On pose $I = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt$. A l'aide de la question précédente, déterminez la valeur de I .

On remarque que $I = g(1)$ et d'après ce qui précède $g(1) = f(\tan \frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4}$ donc $I = \frac{\pi}{4}$.

- (4) Pour tout entier naturel n , on considère les intégrales suivantes :

$$I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n dt \text{ et } J_n = \int_0^1 t^2(1-t^2)^n dt.$$

- (a) Exprimer I_{n+1} en fonction de I_n et J_n .

$$I_{n+1} = \int_0^1 (1-t^2)^{n+1} dt = \int_0^1 (1-t^2)^n (1-t^2) dt = \int_0^1 (1-t^2)^n dt - \int_0^1 t^2(1-t^2)^n dt = I_n - J_n$$

- (b) A l'aide d'une intégration par parties, établir, pour tout entier naturel n , la relation

$$I_{n+1} = 2(n+1)J_n$$

(on pourra remarquer que $t^2(1-t^2)^n = t \times t(1-t^2)^n$).

On pose $u(t) = t$ et $v(t) = -\frac{(1-t^2)^{n+1}}{2(n+1)}$: les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$. Le théorème d'intégration par parties donne :

$$\begin{aligned} J_n &= \int_0^1 t^2(1-t^2)^n dt = \int_0^1 u(t)v'(t) dt \\ &= [u(t)v(t)]_0^1 - \int_0^1 u'(t)v(t) dt \\ &= \int_0^1 \frac{(1-t^2)^{n+1}}{2(n+1)} dt \end{aligned}$$

d'où on tire $I_{n+1} = 2(n+1)J_n$.

(c) Etablir alors une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n .

Des relations obtenues en (a) et (b), on obtient, pour tout entier n ,

$$I_{n+1} = I_n - \frac{1}{2(n+1)} I_{n+1} \text{ soit } I_{n+1} = \frac{2(n+1)}{2n+3} I_n$$

(d) Montrer alors que, pour tout entier naturel n ,

$$I_n = 2^n \times \frac{n!}{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n+1)}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{P}_n$ la propriété « $I_n = 2^n \times \frac{n!}{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n+1)}$ ».

— Puisque $I_0 = 1$, la formule proposée est vraie pour $n = 0$.

— Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}_n$ est vraie. D'après la relation de récurrence

$$I_{n+1} = \frac{2(n+1)}{2n+3} I_n = \frac{2(n+1)}{2n+3} \times 2^n \times \frac{n!}{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n+1)}$$

donc

$$I_{n+1} = 2^{n+1} \times \frac{(n+1)!}{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n+1)(2n+3)}.$$

Ainsi, $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie dès que $\mathcal{P}_n$ est vraie.

— D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = 2^n \times \frac{n!}{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n+1)}$$

(5) On définit une suite (u_n) par $u_0 = 1$, $u_1 = 1 + \frac{1}{1 \times 3}$ et pour tout entier naturel $n \geq 2$, on pose

$$u_n = 1 + \frac{1}{1 \times 3} + \frac{2!}{1 \times 3 \times 5} + \cdots + \frac{n!}{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n+1)}$$

(a) En utilisant le résultat de la question (4d), montrer que

$$u_n = 2 \int_0^1 h_n(t) dt.$$

où h_n est la fonction définie sur $[0, 1]$ par $h_n(t) = \frac{1 - \left(\frac{1-t^2}{2}\right)^{n+1}}{1+t^2}$.

D'après le résultat précédent, et par linéarité de l'intégrale

$$u_n = \sum_{k=0}^n \frac{I_k}{2^k} = \sum_{k=0}^n \int_0^1 \frac{(1-t^2)^k}{2^k} dt = \int_0^1 \sum_{k=0}^n \left(\frac{1-t^2}{2}\right)^k dt.$$

Pour tout $t \in \llbracket 0, 1 \rrbracket$, $0 \leq \frac{1-t^2}{2} \leq \frac{1}{2} < 1$ donc

$$u_n = \int_0^1 \frac{1 - \left(\frac{1-t^2}{2}\right)^{n+1}}{1+t^2} dt = 2 \int_0^1 \frac{1 - \left(\frac{1-t^2}{2}\right)^{n+1}}{1+t^2} dt = 2 \int_0^1 h_n(t) dt.$$

(b) Etablir, pour tout $t \in [0, 1]$, l'encadrement

$$0 \leq \frac{\left(\frac{1-t^2}{2}\right)^{n+1}}{1+t^2} \leq \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Pour tout réel $t \in [0, 1]$, $0 \leq \frac{1-t^2}{2} \leq \frac{1}{2}$ donc $0 \leq \left(\frac{1-t^2}{2}\right)^{n+1} \leq \frac{1}{2^{n+1}}$ et $0 \leq \frac{1}{1+t^2} \leq 1$. Comme tous les membres de ces encadrements sont positifs, on obtient en multipliant membre à membre,

$$0 \leq \frac{\left(\frac{1-t^2}{2}\right)^{n+1}}{1+t^2} \leq \frac{1}{2^{n+1}}.$$

- (c) On pose $v_n = 2I - u_n$ où I désigne l'intégrale de la question (3b). Après avoir exprimé $v_n = 2I - u_n$ sous forme intégrale, déduire de (b) un encadrement pour la suite (v_n) .

La définition de (v_n) donne

$$v_n = 2 \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt - \int_0^1 \frac{1 - (\frac{1-t^2}{2})^{n+1}}{1+t^2} dt = \int_0^1 \frac{(\frac{1-t^2}{2})^{n+1}}{1+t^2} dt$$

et la positivité de l'intégrale et l'encadrement obtenu en (b) entraînent

$$0 \leq v_n \leq \frac{1}{2^{n+1}}$$

- (d) Déterminer alors la limite de la suite (v_n) , puis celle de la suite (u_n) .

Puisque $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{n+1}} = 0$, le théorème de convergence par encadrement s'applique à la suite (v_n) et on a $\lim v_n = 0$, ce qui entraîne $\lim u_n = 2I = \frac{\pi}{2}$.