DEVOIR SURVEILLE 5

Samedi 7 janvier 2017

Devoir Surveillé n°5 – ECS1

Durée : 2h Calculatrice interdite.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire l'usage d'aucun document : seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Exercice 1

Démontrer que les deux ensembles suivants sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ et en déterminer une base :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a+b-c \\ a+b+2c \\ c \end{pmatrix}, (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

$$G = \left\{ M \in M_2(\mathbb{R}) \mid \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} M = M \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\}$$

Exercice 2

Soit $\alpha > 0$. On étudie dans cette partie la suite $(y_n)_n$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall n \geq \alpha, \qquad y_n = \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)^n.$$

1a. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geq 1 + x$.

1b. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq \alpha$, $y_n \leq e^{-\alpha}$.

2. On pose $\forall x > \alpha$, $f(x) = x \ln\left(1 - \frac{\alpha}{x}\right)$.

2a. A l'aide des accroissements finis appliqués à la fonction $t \to \ln t$, montrer que :

$$\forall x > \alpha, \quad \frac{\alpha}{x} \leq \ln x - \ln(x - \alpha) \leq \frac{\alpha}{x - \alpha}$$

2b. A l'aide du 2a, prouver que la fonction f est croissante sur $]\alpha; +\infty[$.

2c. Justifier que $\lim\limits_{t \to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$ et en déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

2d. Dresser le tableau de variations de f sur $]\alpha; +\infty[$.

3a. Exprimer, pour $n \geq \alpha$, y_n à l'aide de f. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n$.

3b. A l'aide de f, montrer que la que la suite $(y_n)_n$ est croissante.

Exo I.

Concours Blanc 01 – ECS1

Durée : 4h Calculatrice interdite.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire l'usage d'aucun document : seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Exercice 1.

Soit $s \in \mathbb{R}^*$ et A la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{s} & \frac{1}{s^2} & \frac{1}{s^3} \\ s & 0 & \frac{1}{s} & \frac{1}{s^2} \\ s^2 & s & 0 & \frac{1}{s} \\ s^3 & s^2 & s & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et déterminer une relation entre A^2, A et I_4, la matrice unité de $M_4(\mathbb{R})$.
2. Montrer que A est inversible et donner la matrice A^{-1}.

Partie A.
3. Montrer qu'il existe deux suites de réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que pour tout entier naturel n on a
$$A^n = a_n I_4 + b_n A \ ,$$
et déterminer les relations entre a_{n+1}, a_n, b_n d'une part et b_{n+1}, a_n, b_n d'autre part.
4. Reconnaitre en (b_n) une suite de référence et l'expliciter en fonction de n.
5. En déduire a_n pour tout entier naturel n.

Partie B.
6. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 2X - 3$, pour $n \in \mathbb{N}$.
7. En déduire à nouveau une expression de A^n, pour n entier naturel.

Exercice 2.

Cet exercice est composé de deux parties indépendantes.

Partie I.
On considère la suite de polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $T_0(X) = 1$, $T_1(X) = 1 - 2X$ puis pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$T_{n+2}(X) = 2(1-2X)T_{n+1}(X) - T_n(X).$$
On pose de plus $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = T_n(-1)$.

1. Déterminer le polynôme T_2 ainsi que les réels v_0, v_1 et v_2.
2. Reconnaitre la suite (v_n) et en déduire une expression de v_n en fonction de n.
3. Prouver que pour tout entier naturel n, $v_n \in \mathbb{N}^*$.
4. Pour tout entier naturel n, déterminer le degré de T_n ainsi que son coefficient dominant.

Partie II.
Soit $E = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(X+1) + XP'(X) = 3P(X)\}$.
6. Le polynôme X^3 est-il un élément de E ?
7. Prouver que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
8. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme non nul de degré n. Déterminer le degré et le coefficient dominant du polynôme $P(X+1) + XP'(X)$. En déduire que les polynômes non nuls de E sont de degré 2.
9. En déduire une famille génératrice de E. Cette famille est-elle une base de E ?

Exo II.

Exercice 2 :

Partie I : Fonction génératrice

Etant donné une variable aléatoire discrète finie X telle que $X(\Omega) \subset [\![0,n]\!]$, on appelle fonction génératrice de X la fonction polynôme G_X définie par : $\forall\, t \in \mathbb{R}\,,\quad G_X(t) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X=k)\,.\,t^k$

1) On suppose dans cette question seulement que $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\,[\![1,n]\!]\,)$.
   a) Montrer que $\forall\, t \in \mathbb{R}\,,\ G'_X(t) = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k\,t^{k-1}$. En déduire $G_X{}'(1)$
   b) Calculer, pour tout $t \in \mathbb{R}\,,\ G''_X(t)$. En déduire que $G''_X(1) = \dfrac{n^2-1}{3}$

2) On revient au cas d'une variable X quelconque avec $X(\Omega) \subset [\![0,n]\!]$.
   a) Calculer $G_X(1)$
   b) Déterminer, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $G'_X(t)$. En déduire que $G'_X(1) = \mathbb{E}(X)$
   c) Déterminer, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $G''_X(t)$
   Donner une variable aléatoire Y, à exprimer en fonction la variable X, telle que $\mathbb{E}(Y) = G''_X(1)$
   d) En déduire que $V(X) = G'_X(1)\left[\,1 - G'_X(1)\right] + G''_X(1)$

3) On suppose dans cette question seulement que $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\,[\![1,n]\!]\,)$.
   A l'aide de ce qui précède, retrouver les valeurs de $\mathbb{E}(X)$ et de $V(X)$ données en cours.

4) On suppose dans cette question seulement que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$
   a) Montrer que G_X est donnée par : $\forall\, t \in \mathbb{R}\,,\quad G_X(t) = (\,\alpha\, t + \beta\,)^n$ avec $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ à préciser.
   b) En déduire $G'_X(t)$ et $G''_X(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$
   c) A l'aide des formules établies au 1) calculer $\mathbb{E}(X)$ et $V(X)$ (retrouvant ainsi des résultats connus)

Partie II : Loi hypergéométrique

Dans cette partie, on considère une urne contenant n boules noires et b boules blanches (avec $2 \le b \le n$)
On suppose que ces boules sont numérotées (de 1 à n pour les noires et de $n+1$ à $n+b$ pour les blanches)
On tire successivement sans remise r boules (avec r entier tel que $1 \le r \le n$ et $1 \le r \le b$)
On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues à l'issue des r tirages.

1) Préciser $X(\Omega)$ (justifier votre réponse)

2) a) Pour $(k,\ell) \in (\mathbb{N}^*)^2$ avec $1 \le k \le \ell$, on pose $A(k,\ell) = \ell\,(\ell-1)\,(\ell-2) \times ... \times (\ell-k+1) = \prod_{j=0}^{k-1}(\ell - j)$
   Montrer que $A(k,\ell) = k!\,\binom{c}{k}$ avec c entier à préciser en fonction de ℓ et de k.
   b) Justifier que $\mathbb{P}(X=0) = \dfrac{A(r,n)}{A(r,n+b)}$ puis écrire $\mathbb{P}(X=0)$ comme quotient de deux coefficients binomiaux

3) Soit $k \in X(\Omega)$
   a) Montrer que $\mathbb{P}(X=k) = \dfrac{\binom{r}{k}\,A(i,b)\,A(j,n)}{A(r,n+b)}$ avec i,j entiers à préciser en fonction de k , b et n
   b) En déduire que $\forall\, k \in X(\Omega)\,,\ \mathbb{P}(X=k) = \dfrac{\dbinom{b}{k}\dbinom{n}{x}}{\dbinom{y}{r}}$ avec x,y entiers à préciser en fonction de k , b et n
   On dit que X suit une loi hypergéométrique et on note $X \hookrightarrow \mathcal{H}(n+b,r,p)$ (où $p = \frac{b}{n+b}$)

Exo III.

4) En utilisant la loi hypergéométrique, démontrer la formule de Van der Monde :

$$\sum_{k=0}^{r} \binom{b}{k}\binom{n}{r-k} = \binom{n+b}{r}$$

(Cette formule pourra être librement utilisée dans la suite de l'exercice)

5) Dans cette question, on désigne par G_X la fonction génératrice de X.

a) Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}\,,\, G'_X(t) = \dfrac{b}{\binom{n+b}{r}} \displaystyle\sum_{i=0}^{r-1} \binom{b-1}{i}\binom{n}{\alpha} t^i$ avec α entier à préciser en fonction de r, b et i.

b) A l'aide des résultats établis dans la partie I, montrer que $\mathbb{E}(X) = \dfrac{b\,r}{n+b}$

6) En s'inspirant de ce qui précède, montrer que $G''_X(1) = \dfrac{b\,(b-1)\,r\,(r-1)}{d\,(d-1)}$

(avec d entier à préciser en fonction de r , b et i)

7) On considère le polynôme $P(X) = (b-1)(r-1)(X+b) + (X+b-1)(X+b-rb)$

a) Calculer $P(0)$ et $P(r-b)$

b) En déduire l'écriture factorisée de $P(X)$

8) A l'aide de ce qui précède, montrer que $V(X) = \dfrac{n\,r\,b\,(n+b-r)}{(n+b)^2\,(n+b-1)}$

(On pourra écrire $V(X)$ sous forme d'un quotient puis faire apparaitre $P(n)$ au numérateur)

Partie III : Applications

Dans cette partie, on considère encore une urne contenant n boules noires et b boules blanches (avec n et b deux entiers ≥ 2) On suppose que ces boules sont numérotées (de 1 à n pour les noires et de $n+1$ à $n+b$ pour les blanches) On tire désormais successivement sans remise b boules

Pour tout entier $i \in [\![1, b]\!]$, on pose $Y_i = \begin{cases} 1 & \text{si au } i^{ieme} \text{ tirage on obtient une blanche} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

De plus, pour tout $i \in [\![1, b]\!]$, on définit $S_i = Y_1 + Y_2 + ... + Y_i$

1) Donner la loi de Y_1. Préciser son espérance et sa variance.

2) A l'aide du s.c.e. $\{\,(Y_1 = 0)(Y_1 = 1)\,\}$ montrer que $\mathbb{P}(Y_2 = 1) = \dfrac{b}{n+b}$. En déduire la loi de Y_2 et $\mathbb{E}(Y_2)$

3) Soit i entier fixé de $[\![1, b]\!]$. En donnant une interprétation de S_i, justifier, à l'aide de ce qui précède, que :

$$\forall\, k \in [\![0, i]\!]\ ,\ \mathbb{P}(S_i = k) = \frac{\dbinom{b}{k}\dbinom{n}{i-k}}{\dbinom{b+n}{i}}$$

4) Soit $i \in [\![2, b]\!]$

a) Pour $k \in [\![0, i-1]\!]$, déterminer $\mathbb{P}_{(S_{i-1}=k)}(Y_i = 1)$

b) En déduire que $\mathbb{P}(Y_i = 1) = \dfrac{b}{(n+b-i+1)\binom{n+b}{i-1}} \displaystyle\sum_{k=0}^{i-1} \binom{n}{i-1-k}\binom{b-1}{k}$

c) A l'aide de la formule de Van der Monde, montrer que $\mathbb{P}(Y_i = 1) = \dfrac{b}{n+b}$

5) On désigne par Y le nombre de blanches obtenues au cours des b tirages.

a) Exprimer Y à l'aide des $(Y_i)_{1\leq i\leq b}$. En déduire $\mathbb{E}(Y)$

b) En justifiant quer Y suit une loi dont on connait l'espérance, retrouver $\mathbb{E}(Y)$ puis donner $V(Y)$

Exo IV.

Exercice 1 *Intégrales de Wallis.* — Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $W_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\cos t)^n \,\mathrm{d}t$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. A l'aide d'une intégration par parties dans W_{n+2} montrer que $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$.

2. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, W_{2n} = \dfrac{(2n)!}{(2^n \times n!)^2} \times \dfrac{\pi}{2}$.

3. a) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = (n+1)W_{n+1}W_n$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite constante. Que vaut cette constante ?

b) En déduire la valeur de W_{2n+1} pour tout entier n.

Exercice 2 — On considère la fonction g définie par $g(x) = \displaystyle\int_x^{2x} e^{-t^2} \,\mathrm{d}t$.

1. Justifier que g est bien définie sur $\mathbb{R}$ et montrer que g est impaire.
Indication : Ecrire l'intégrale $g(-x)$ puis faire un changement de variable simple dans l'intégrale obtenue.

2. Montrer que g est de classe C^1, puis calculer $g'(x)$.

3. a) Etablir que pour tout réel $x > 1$, $\quad xe^{-4x^2} \leq g(x) \leq xe^{-x^2}$.

b) En déduire l'existence ainsi que la valeur de la limite de g en $+\infty$.

c) Dresser le tableau de variation de g. On précisera $g(0)$ (ainsi que les limites de g en $+\infty$ et $-\infty$).

Exercice 3 *Inégalité de Cauchy-Schwarz.* — Soient f et g deux fonctions continues et non nulles sur $[a,b]$.

1. Justifier que $P : \lambda \in \mathbb{R} \mapsto \displaystyle\int_a^b (\lambda f(x) + g(x))^2 \,\mathrm{d}x$ est un trinôme du second degré en la variable réelle λ. Que dire du signe de P ? *(On pourra utiliser la linéarité de l'intégrale ...)*

2. En déduire l'inégalité $\left(\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leq \left(\displaystyle\int_a^b f(x)^2\,\mathrm{d}x\right)\left(\displaystyle\int_a^b g(x)^2\,\mathrm{d}x\right)$. *(On pourra calculer un discriminant ...)*

3. On suppose que f et g vérifient l'égalité ci-dessus. $\left(\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 = \left(\displaystyle\int_a^b f(x)^2\,\mathrm{d}x\right)\left(\displaystyle\int_a^b g(x)^2\,\mathrm{d}x\right)$.

a) Que peut-on en déduire quant au trinôme P ?

b) En déduire alors que f et g sont proportionnelles.

Exo V.

CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLE 5

Exercice 1

Démontrer que les deux ensembles suivants sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ et en déterminer une base :

$$F=\left\{\begin{pmatrix} a+b-c \\ a+b+2c \\ c \end{pmatrix}, (a,b,c)\in\mathbb{R}^3\right\}$$

$$G=\left\{M\in M_2(\mathbb{R}) \mid \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} M = M\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\right\}$$

- $F=\left\{\begin{pmatrix} a+b-c \\ a+b+2c \\ c \end{pmatrix}, (a,b,c)\in\mathbb{R}^3\right\}=\left\{a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+c\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, (a,b,c)\in\mathbb{R}^3\right\}$

  $$=vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)=vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

  L'espace F est donc un espace vectoriel (ensemble généré par une famille de vecteurs).

  Les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ étant non colinéaires, ils sont libres et forment donc une base de F.

- Soit $M=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ une matrice de $M_2(\mathbb{R})$.

  $$M\in G \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

  $$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2a+c & 5a+3c \\ 2b+d & 5b+3d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2a+5b & 2c+5d \\ a+3b & c+3d \end{pmatrix}$$

  $$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a+c=2a+5b \\ 5a+3c=2c+5d \\ 2b+d=a+3b \\ 5b+3d=c+3d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=5b \\ \cancel{c=5(d-a)} \\ b=d-a \\ \cancel{5b=c} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=5b \\ d=a+b \end{cases}$$

  (résolution du système à l'aide de deux paramètres).

  Ainsi, $M=\begin{pmatrix} a & 5b \\ b & a+b \end{pmatrix}=a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $G=vect\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)$: la famille

génératrice $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ est constituée de deux vecteurs générateurs non colinéaires, donc ils forment une base de l'espace vectoriel G.

Exo I.

Exercice 2.

Partie I. On considère la suite de polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $T_0(X)=1$, $T_1(X)=1-2X$ puis pour tout $n\in\mathbb{N}$, $T_{n+2}(X)=2(1-2X)T_{n+1}(X)-T_n(X)$. On pose de plus $\forall n\in\mathbb{N}$, $v_n=T_n(-1)$.

1. Déterminer le polynôme T_2 ainsi que les réels v_0, v_1 et v_2. On a $T_2(X)=2(1-2X)T_1(X)-T_0(X)=2(1-2X)(1-2X)-1=8X^2-8X+1$. Par conséquent $v_0=1$, $v_1=3$ et $v_2=17$.

2. Reconnaitre la suite (v_n) et en déduire une expression de v_n en fonction de n. Evaluons la relation en $X=-1$, on obtient : $v_{n+2}=6v_{n+1}-v_n \Leftrightarrow v_{n+2}-6v_{n+1}+v_n=0$; (v_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2. La méthode développée précédemment (exo 1) donne alors :

$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad v_n=\frac{1}{2}\left(3-\sqrt{8}\right)^n+\frac{1}{2}\left(3+\sqrt{8}\right)^n$$

3. Prouver que pour tout entier naturel n, $v_n\in\mathbb{N}^*$.

- Pour tout entier n, v_n est non nul comme somme de deux entiers strictements positifs.
- A l'aide d'une récurrence double et de la relation $v_{n+2}=6v_{n+1}-v_n$, on montrerait alors immédiatement que $v_n\in\mathbb{N}$ (je vous le laisse !).

4. Pour tout entier naturel n, déterminer le degré de T_n ainsi que son coefficient dominant.
Vu la relation suivie par T_n (et les premiers résultats), on propose que $P(n)$ « T_n est de degré n et de coefficient dominant $-2(-4)^{n-1}$ » pour $n\geq 1$. Menons une récurrence double :

- $P(1)$ et $P(2)$ sont vraies par définition de T_1 et T_2
- Supposons $P(n)$ et $P(n+1)$ vraies : $T_{n+2}(X)=2(1-2X)T_{n+1}(X)-T_n(X)$ et $\deg\big(2(1-2X)T_{n+1}(X)\big)=1+(n+1)=n+2$ et comme $\deg(T_n)=n$ on a bien $\deg(T_{n+2})=n+2$
  Enfin, le coefficient dominant est donc « amené » par le terme $2(1-2X)T_{n+1}(X)$ et il vaut donc $-4\times(coeff.\ dom.\ de\ T_{n+1})\overset{H.R.}{=}-4\times(-2(-4)^n)=-2(-4)^{n+1}$.

Partie II. Soit $E=\{P\in\mathbb{R}[X]\mid P(X+1)+XP'(X)=3P(X)\}$.
6. Le polynôme X^3 est-il un élément de E ? Non, puisqu'en posant $P=X^3$, on a

$$P(X+1)+XP'(X)=(X+1)^3+X(3(X+1)^2)=(X+1)^2(X+1+3X)\neq 3X^3$$

7. Prouver que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

- $E\subset\mathbb{R}[X]$, espace vectoriel de référence.
- Le polynôme nul vérifie la relation $P(X+1)+XP'(X)=3P(X)$ donc $E\neq\emptyset$.
- Soit $(P,Q)\in E^2,\lambda\in\mathbb{R}$: par linéarité de la dérivation,

$$(P+\lambda Q)(X+1)+X(P+\lambda Q)'(X)=\underbrace{P(X+1)+XP'(X)}_{3P(X)}+\lambda\underbrace{\big(Q(X+1)+XQ'(X)\big)}_{3Q(X)}$$
$$=3(P+\lambda Q)(X)$$

  E est bien stable par combinaison linéaire.

8. Soit $P\in\mathbb{R}[X]$ un polynôme non nul de degré n. Déterminer le degré et le coefficient dominant du polynôme $P(X+1)+XP'(X)$. En déduire que les polynômes non nuls de E sont de degré 2.
Soit $P\in\mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré n : $P(X)=\sum_{k=0}^{n}a_kX^k$ avec $a_n\neq 0$.

- La formule du binôme assure que $P(X+1)$ est de degré n et de coefficient dominant a_n.
- De plus, $XP'(X)=na_nX^n+\underset{deg<n}{Q}$ et donc $P(X+1)+XP'(X)=X^n(a_n+na_n)+\underset{deg<n}{S}$ est de degré n et de coefficient dominant $a_n(n+1)$.
- Si de plus $P\in E$ alors $P(X+1)+XP'(X)=3P(X)$ et on identifiant les coefficients dominants on trouve $a_n(n+1)=3a_n\Rightarrow n+1=3$ car $a_n\neq 0$ et donc on a bien $n=2$.

9. En déduire une famille génératrice de E. Cette famille est-elle une base de E ?
Soit donc $P=aX^2+bX+c$ un polynôme : $P\in E$ si et seulement si

$$P(X+1)+XP'(X)=3P(X)\Leftrightarrow a(X+1)^2+b(X+1)+c+X(2aX+b)=3aX^2+3bX+3c$$
$$\Leftrightarrow\cdots\Leftrightarrow X^2(3a)+X(2a+2b)+(a+b+c)=X^2(3a)+X(3b)+(3c)$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}2a+2b=3b\\a+b+c=3c\end{cases}\Leftrightarrow\cdots\Leftrightarrow\begin{cases}b=2a\\c=3a/2\end{cases},\qquad a\in\mathbb{R}$$

Ainsi, $E=\{aX^2+2aX+3a/2,\ a\in\mathbb{R}\}=vect(X^2+2X+3/2)$: un seul polynôme génére E, il est non nul donc il forme une base de E.

Exo II.

Exercice 3

On considère le $\mathbb{R}$ - espace vectoriel $E = M_{3,1}(\mathbb{R})$ des matrices colonnes à 3 lignes. On note 0_E la matrice nulle de E. Etant donné une matrice carrée $A \in M_3(\mathbb{R})$ on définit l'ensemble

$$F = \{X \in M_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 0_E\} .$$

On définit les matrices colonnes $U = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$ et $W = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$.

a. Montrer que F est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

- $F \subset E$, espace vectoriel de référence.
- $A \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0_E$ donc $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in F$ et F est non vide.
- Soit $(X, Y) \in F^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$: $A(X + \lambda Y) = \underbrace{AX}_{0} + \lambda \underbrace{AY}_{0} = 0$ donc $X + \lambda Y \in F$

Pour toute la suite de l'exercice, on prend $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

b. Déterminer une base de l'espace vectoriel F.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in F \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2z \\ y = -z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2z \\ -z \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad z \in \mathbb{R}$$

Ainsi$F = vect\left(\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$: un seul vecteur génère F, il est non nul donc il forme une base de F.

c. La famille (U, V, W) est-elle libre ? Soit a, b, c trois réels tels que $aU + bV + cW = 0$. On a

$$\begin{pmatrix} 2b + 6c \\ a - b + 2c \\ 2a - 5b - 5c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \begin{cases} a - b + 2c = 0 \\ 2b + 6c = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} :$$

ce dernier système n'est pas de Cramer donc le triplet $(0,0,0)$ n'est pas la seule solution. La famille est donc liée.

d. Déterminer une base de $G = vect(U, V, W)$.

- La famille (U, V, W) génère G par définition
- Dans la question précédente, en prenant par exemple $c = 1$, on montre que W est combinaison linéaire de U et V : on a alors $G = vect(U, V)$ (on peut enlever W)
- Les vecteurs U et V ne sont pas colinéaires, ils forment donc une famille libre (et génératrice) de G : ils forment donc une base de G.

e. Montrer que $F \subset G$. Vu que $F = vect\left(\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et que $G = vect(U, V)$, il suffit de montrer que $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est combinaison linéaire de U et V : en résolvant à nouveau un système, on trouve bien que

$$\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -V - 2U .$$

f. Ecrire un programme Scilab qui définisse la matrice A et qui calcule la matrice AU.

Par exemple, dans la console SciLab :

$A = [0\ 1\ 1\ ; 1 - 1\ \ 1\ ; 1 - 2\ \ 0]$
$U = [0; 1; 2]$
$A * U$

Problème (d'après EML E 89)

Soit $f(x) = \sqrt{\frac{x}{2-x}}$, I son ensemble de définition et C sa courbe représentative.

1a. Déterminer I. f est définie pour $x \neq 2$ et $\frac{x}{2-x} \geq 0$ donc … $I = [0;2[$.

1b. Etudier la continuité de f sur I puis la dérivabilité de f sur I. *On précisera la tangente au point d'abscisse* 1.

- f est continue sur I comme composée de fonctions continues sur I
- f est dérivable sur $]0;2[$ (pas en 0 donc) car $x \to \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0;+\infty[$.
- Sur $]0;2[$: $f'(x) = \frac{\left(\frac{x}{2-x}\right)'}{2\sqrt{\frac{x}{2-x}}} = \frac{2}{2(2-x)^2\sqrt{\frac{x}{2-x}}}$: ainsi, $T_1 : y = 1 + (x-1) = x$

1c. Dresser le tableau de variations complet de f. $f' > 0$ donc f croît sur I.

1d. Démontrer que $\forall x \in I$, $f(x) \geq x$. Etudier le cas d'égalité. Sur I, $x \geq 0$ donc

$$f(x) \geq x \Leftrightarrow \left(f(x)\right)^2 \geq x^2 \Leftrightarrow \frac{x}{2-x} \geq x^2 \Leftrightarrow \frac{x\left(1 - x(2-x)\right)}{2-x} \geq 0 \overset{2-x\geq 0}{\Leftrightarrow} x(x^2 - 2x + 1) \geq 0$$

et la dernière inégalité est vraie puisque $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$. La première l'est aussi par équivalence.
Enfin, $f(x) \geq x \Leftrightarrow x(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x \in \{0;1\}$.

1e. Démontrer que f réalise une bijection de I sur un intervalle J à préciser. Dresser alors le tableau de variations complet de f^{-1}.

- f est continue, strictement croissante sur I donc elle définit une bijection de I sur $f(I) = [0;+\infty[$.
- f^{-1} a les mêmes variations que f donc on a

x	0	$+\infty$
$f^{-1}(x)$	0	$\nearrow$ 2

1f. Tracer C dans un repère orthonormé, après avoir tracé ses tangentes remarquables et la droite $D : y = x$.

2a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution sur I, notée x_n.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $n \in \mathbb{R}^+$ donc par définition d'une bijection l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution sur I, notée x_n et on a $x_n \in [0;2[$.

2b. Déterminer x_0 et x_1.

- x_0 est la solution de $f(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x}{2-x}} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ donc $x_0 = 0$.
- x_1 est la solution de $f(x) = 1 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x}{2-x}} = 1 \Leftrightarrow x = 1$ donc $x_1 = 1$.

2c. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n < x_{n+1}$. Pour tout n on a $n < n+1$ càd $f(x_n) < f(x_{n+1})$: la fonction f étant croissante strictement, on en déduit que $x_n < x_{n+1}$.

2d. En déduire que la suite converge et déterminer sa limite. La suite est croissante, majorée par 2 d'après le 2a donc elle converge vers un réel $L \in [0;2]$.
Or $f(u_n) = n \Leftrightarrow u_n = f^{-1}(n)$, et donc $u_n \to 2$.

3b. Compléter la courbe précédemment tracée avec la courbe représentant f^{-1}.
Dans un repère orthonormé, les courbes représentant des bijections réciproques sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$. Il s'agit donc d'effectuer une symétrie de la courbe C par rapport à la droite d'équation $y = x$.

3b. Déterminer f^{-1} et étudier sa dérivabilité sur son domaine.

- Soit $x \in [0;2[$, $y \in J$:

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = \sqrt{\frac{x}{2-x}} \Leftrightarrow y^2 = \frac{x}{2-x} \Leftrightarrow 2y^2 - y^2x = x \Leftrightarrow x(1+y^2) = 2y^2 \Leftrightarrow x = \frac{2y^2}{1+y^2}$$

  Ainsi, $f^{-1}(x) = \frac{2x^2}{1+x^2}$.
- Cette fonction est bien dérivable sur J comme quotient de fonctions dérivables à dénominateurs non nul.

4. On considère la suite définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

4a. Recopier et compléter l'algorithme suivant afin qu'il affiche le terme de rang N de la suite, $N \in \mathbb{N}$.

```
function y=f(x)
        y = sqrt (x/(2-x))
endfunction

u = 0.5
for k=1:N
        u = f(u)
end
disp(u)
```

4b. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0;1]$. Récurrence sans difficultés.

4c. Prouver que u converge et déterminer sa limite.

- D'après le 4a, $u_n \in I$ donc d'après le 1d appliqué à $x = u_n$: $f(u_n) - u_n \geq 0$.
  La suite (u_n) est croissante
- Elle est majorée par 1 d'après le 4a donc elle converge vers $L \in [0;1]$
- f étant continue sur $[0;1]$, le théorème du point fixe donne $L = f(L) \Leftrightarrow L \in \{0;1\}$.
  Comme la suite est croissante de premier terme $\frac{1}{2}$, on a forcément $L = 1$.

4d. Proposer un script SciLab qui affiche le premier n tel que $|1 - u_n| < 0.01$

$n = 0$; $u = 1/2$
$while\ (|1-u|) \geq 0.01$
        $u = sqrt\left(u/(2-u)\right)$
        $n = n + 1$
end
$disp(u)$

avec $A = \begin{pmatrix} u(0) & v(0) \\ u'(0) & v'(0) \end{pmatrix}$. On a $u(0)v'(0) - u'(0)v(0) = W(u,v) = 1$. On en déduit que A est inversible. ainsi $A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(0) \\ f'(0) \end{pmatrix}$ admet une unique solution ③

Il existe donc $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $r(0) = 0$ et $r'(0) = 0$.

Rq: On peut déterminer concrètement en résolvant $\begin{cases} au(0) + bv(0) = f(0) & L_1 \\ au'(0) + bv'(0) = f'(0) & L_2 \end{cases}$

- $v'(0).L_1 - v(0)L_2$: $a(u(0)v'(0) - v(0)u'(0)) = f(0)v'(0) - v(0)f'(0)$
  On en déduit : $-a = f(0)v'(0) - v(0)f'(0) \Rightarrow a = v(0)f'(0) - f(0)v'(0)$
- $u'(0)L_1 - u(0)L_2$: $(u'(0)v(0) - u(0)v'(0))b = u'(0)f(0) - u(0)f'(0)$
  On en déduit : $-b = u'(0)f(0) - u(0)f'(0) \Rightarrow b = u(0)f'(0) - u'(0)f(0)$

7b) F étant un sous espace vectoriel, on en déduit que $r \in F$
(r est une combinaison linéaire d'éléments de F)
de plus $r(0) = r'(0) = 0$. Par 6), il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tq $r = \alpha u$.
On en déduit que $f - au - bv = \alpha u \Rightarrow f = (a+\alpha)u + bv \Rightarrow \boxed{f \in Vect(u,v)}$

8) • On a prouvé que (u,v) est une famille libre de F.
• Si $f \in F$ alors $f \in Vect(u,v)$. On en déduit que $F \subset Vect(u,v)$
Or $(u,v) \in F^2$. Donc toute combinaison linéaire de u et de v est de F puisque F est un sous espace vectoriel. Donc $Vect(u,v) \subset F$.
ainsi $F = Vect(u,v)$: On peut dire que (u,v) est une famille génératrice de F
On a donc prouvé que $\boxed{(u,v) \text{ est une base de } F}$

9) Soit $f \in F$. Par 8), il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $f = au + bv$.
$f \in G \Leftrightarrow au(0) + bv(0) = 0 \Leftrightarrow au(0) = 0 \Leftrightarrow a = 0$ (car $u(0) \neq 0$) (et $v(0) = 0$)
On en déduit que $f \in G \Leftrightarrow f = bv$ où $b \in \mathbb{R}$.
On peut donc en conclure que $\boxed{G = Vect(v).}$
Cela prouve que G est un sous espace vectoriel de F
et (v) est une famille génératrice. Or $v \neq$ fct nulle.
En effet si $\forall x \in \mathbb{R}, v(x) = 0$ alors $v'(x) = 0$ et donc $u(x)[\Phi(x) - \Phi(0)] + \frac{1}{u(x)} = 0 \ \forall x \in$
On a donc pour $x = 0$: $\frac{1}{u(0)} = 0$. Absurde.
Comme (v) est une fonction non nulle, c'est une famille libre.
On en déduit que $\boxed{(v) \text{ est une base de } G.}$

Rq: On aurait pu prouver que G est un sev de F en utilisant la définition :
• $x \mapsto 0$ est un élément de G car c'est un élément de F (F est un sev) qui s'annule en 0
• Soit $(f,g) \in G^2$; $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. $h = \lambda f + \mu g \in F$ car F est un sev et $f \in F, g \in F$
enfin $h(0) = \lambda f(0) + \mu g(0) = \lambda 0 + \mu 0 = 0$. donc $h \in G$ d'où G stable par C.L.

Exo III.

et du type : $(x_1, x_2, \dots, x_r)$: On en déduit $\boxed{\mathbb{P}(X=0) = \dfrac{A(r,n)}{A(r,n+b)}}$

$\uparrow n \quad \uparrow n-1 \quad \dots \quad \uparrow n-(r-1)$ choix

On a vu que $A(r,n) = r!\binom{n}{r}$ et $A(r,n+b) = r!\binom{n+b}{r} \Rightarrow \boxed{\mathbb{P}(X=0) = \dfrac{\binom{n}{r}}{\binom{n+b}{r}}}$

II3a) $(X=k)$ est réalisé lorsque l'on obtient k boules blanches au cours des r tirages successifs sans remise.

Pour fabriquer une liste qui réalise $(X=k)$, il faut

→ choisir l'emplacement des boules blanches $\binom{r}{k}$ choix

→ Remplissage des k places destinées aux blanches.
place 1 : b choix place 2 : $b-1$ choix ... place k : $b-(k-1)$
On a donc au total $b(b-1)\dots(b-k+1) = A(k,b)$ choix

→ Choix de l'emplacement des boules noires : 1 choix

→ Remplissage des $r-k$ places destinées aux boules noires
place 1 : n choix place 2 : $n-1$ choix, .. place $r-k$: $n-(r-k-1)$ choix
On a donc au total $n(n-1)\dots(n-(r-k)+1) = A(r-k,n)$ choix

On en déduit : $\boxed{\mathbb{P}(X=k) = \dfrac{\binom{r}{k} A(k,b)A(r-k,n)}{A(r,n+b)}}$

II3b) Avec la relation du II2a), $\mathbb{P}(X=k) = \dfrac{\binom{r}{k} \times k!\binom{b}{k} \times (r-k)!\binom{n}{r-k}}{r!\binom{n+b}{r}}$

Or $\dfrac{\binom{r}{k} k!(r-k)!}{r!} = 1$. On en déduit $\boxed{\mathbb{P}(X=k) = \dfrac{\binom{b}{k}\binom{n}{r-k}}{\binom{n+b}{r}}} \Rightarrow \begin{cases} y = n+b \\ x = r-k \end{cases}$

II4) Nous avons, puisque $X(\Omega) = \{0,\dots r\}$, $\sum_{k=0}^{r} \mathbb{P}(X=k) = 1$.

On en déduit : $\sum_{k=0}^{r} \dfrac{\binom{b}{k}\binom{n}{r-k}}{\binom{n+b}{r}} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{\binom{n+b}{r}} \sum_{k=0} \binom{b}{k}\binom{n}{r-k} = 1$

On a bien $\boxed{\sum_{k=0}^{r} \binom{b}{k}\binom{n}{r-k} = \binom{n+b}{r}}$ (c'est la formule de Van der Monde)

II5a) $\forall t \in \mathbb{R}$, nous avons vu que $G_X'(t) = \sum_{k=0}^{r} k\,\mathbb{P}(X=k).t^{k-1} = 0 + \sum_{k=1}^{r} k\,\mathbb{P}(X=k).t^{k-1}$

D'où $G_X'(t) = \sum_{k=1}^{r} \dfrac{k\binom{b}{k}\binom{n}{r-k}}{\binom{n+b}{r}} t^{k-1} = \dfrac{1}{\binom{n+b}{r}} \sum_{1 \le k \le r} k\binom{b}{k}\binom{n}{r-k} t^{k-1}$ Or $\binom{b}{k} = \dfrac{b}{k}\binom{b-1}{k-1}$ (pour $k \geq 1$)

On en déduit : $G_X'(t) = \dfrac{b}{\binom{n+b}{r}} \sum \binom{b-1}{k-1}\binom{n}{r-k} t^{k-1} \underset{(i=k-1)}{=} \dfrac{b}{\binom{n+b}{r}} \sum_{i=0}^{r-1} \binom{b-1}{i}\binom{n}{r-1-i} t^i$

d'où $G_X'(t) = \dfrac{b}{\dots} \sum^{r-1} \binom{b-1}{i}\binom{n}{r-1-i} t^i$ (et $\alpha = r-1-i$)

Partie III

7

1) $Y_1 = 1$ si B au 1er tirage et 0 sinon. C'est une variable de Bernoulli avec proba succès $= \frac{b}{n+b}$

d'où $\boxed{Y_1 \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{b}{n+b}\right) \quad \text{et } E(Y_1)=\frac{b}{n+b} \quad V(Y_1)=\frac{bn}{(n+b)^2}}$

2) $\{(Y_1=0)(Y_1=1)\}$ est un sce donc d'après la formule des probas totales :

$$P(Y_2=1)=P(Y_1=0\cap Y_2=1)+P(Y_1=1\cap Y_2=1) = P(Y_1=0)\,P_{(Y_1=0)}(Y_2=1)+P(Y_1=1)\,P_{(Y_1=1)}(Y_2=1)$$

avec $P_{(Y_1=0)}(Y_2=1)$ = proba d'avoir une B dans l'urne $\begin{vmatrix} b\ B \\ n-1\ N\end{vmatrix} = \boxed{\frac{b}{n+b-1} = P_{(Y_1=0)}(Y_2=1)}$

et $P_{(Y_1=1)}(Y_2=1)$ = proba d'avoir une B dans l'urne $\begin{vmatrix} b-1\ B\\ n\ N\end{vmatrix} = \boxed{\frac{b-1}{n+b-1} = P_{(Y_1=1)}(Y_2=1)}$

d'où $P(Y_2=1)=\frac{n}{n+b}\cdot\frac{b}{n+b-1}+\frac{b}{n+b}\cdot\frac{b-1}{n+b-1}=\frac{b(n+b-1)}{(n+b)(n+b-1)}=\frac{b}{n+b}$ d'où $\boxed{P(Y_2=1)=\frac{b}{n+b}}$

or $Y_2(\Omega)=\{0,1\}$ donc Y_2 suit une loi de Bernoulli d'où $\boxed{Y_2 \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{b}{n+b}\right) \text{ et } E(Y_2)=\frac{b}{n+b}}$

3) $S_i = Y_1+Y_2+\dots+Y_i$ = nbre de B obtenues au cours des i premiers tirages

on effectue ici i tirages sans remise donc on peut utiliser les résultats du II avec $r=i$

d'après II 3b) $\boxed{S_i \hookrightarrow \mathcal{H}\left(n+b,\ i,\ \frac{b}{n+b}\right)}$ ainsi $\boxed{\begin{array}{l} S_i(\Omega)=[\![0,i]\!] \\ \text{et } \forall k\in[\![0,i]\!]\ P(S_i=k)=\dfrac{\binom{b}{k}\binom{n}{i-k}}{\binom{n+b}{i}} \quad (\text{ici } r=i)\end{array}}$

4a) Pour $k\in[\![0,i-1]\!]$ fixé on a:

$P_{(S_{i-1}=k)}(Y_i=1)$ = proba d'avoir une B au $i^{\text{ème}}$ tirage dans une urne du type : $\begin{vmatrix} b-k\ B \\ \alpha\ N\end{vmatrix}$

{ on a enlevé k B. de l'urne donc il reste $b-k$ blanches
on a tiré $i-1$ boules dont k B et $i-1-k$ Noires donc il reste $\alpha = n-(i-1-k)$ noires
et on a : $\alpha+b-k = n-(i-1-k)+b-k = n+b-i+1$ boules dans l'urne

D'où $\boxed{P_{(S_{i-1}=k)}(Y_i=1)=\frac{b-k}{n+b-i+1}}$ $\left(= \frac{\text{nbre blanches}}{\text{nbre boules}}\right)$

4b) on utilise alors la formule des probas totales avec le sce $\{(S_{i-1}=0)(S_{i-1}=1)\dots(S_{i-1}=i-1)\}$

on a : $P(Y_i=1)=\sum_{k=0}^{i-1}P(S_{i-1}=k\cap Y_i=1)=\sum_{k=0}^{i-1}P(S_{i-1}=k)\cdot P_{(S_{i-1}=k)}(Y_i=1)$

$$=\sum_{k=0}^{i-1}\frac{\binom{b}{k}\binom{n}{i-1-k}}{\binom{n+b}{i-1}}\cdot\frac{b-k}{n+b-i+1}$$ (d'après 4a) et 3) utilisée en remplaçant "i" par "$i-1$")

or ici $k<i\le b$ donc $b-k\neq 0$ et $\binom{b}{k}\cdot(b-k)=\frac{b!}{k!(b-k)!}(b-k)=\frac{b!}{k!(b-k-1)!}=\frac{b\cdot(b-1)!}{k!(b-1-k)!}$

donc $\forall k\in[\![0,i-1]\!]$ $\binom{b}{k}(b-k)=b\cdot\binom{b-1}{k}$

D'où $P(Y_i=1)=\sum_{k=0}^{i-1}\frac{b\binom{b-1}{k}\binom{n}{i-1-k}}{\binom{n+b}{i-1}(n+b-i+1)} = \boxed{\frac{b}{(n+b-i+1)\binom{n+b}{i-1}}\cdot\sum_{k=0}^{i-1}\binom{b-1}{k}\binom{n}{i-1-k} = P(Y_i}$

Exo IV.

puis différence, la fonction g est elle même de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
Par la propriété de dérivation des fonctions composées, on a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$g'(x) = 2F'(2x) - F'(x) = 2f(2x) - f(x) = 2e^{-(2x)^2} - e^{-x^2} = 2e^{-4x^2} - e^{-x^2}$.

3. a) Soit $x \in]1, +\infty[$. Notons que $x < 2x$ donc on est en droit d'utiliser la propriété de croissance de l'intégrale sur le segment $[x, 2x]$. Ceci étant dit, observons maintenant que la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ (elle est en effet dérivable, de dérivée $f'(x) = -2xe^{-2x^2} \leq 0$ si $x \geq 0$). Par conséquent, pour tout $t \in [x, 2x]$, on a $f(2x) \leq f(t) \leq f(x)$.
En intégrant cette inégalité pour t variant de x à $2x$, il vient $f(2x)\displaystyle\int_x^{2x} \mathrm{d}t \leq \int_x^{2x} f(t)\,\mathrm{d}t \leq f(x)\int_x^{2x} \mathrm{d}t$
(on rappelle que $f(x)$ et $f(2x)$ sont des constantes par rapport à la variable d'intégration t).
On a donc $f(2x) \times (2x - x) \leq g(x) \leq f(x) \times (2x - x)$ c'est à dire $xe^{-4x^2} \leq g(x) \leq xe^{-x^2}$.

b) On a $xe^{-4x^2} = \dfrac{x}{e^{4x^2}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées. Pour la même raison $xe^{-x^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Par le théorème d'encadrement, $g(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

c)
- *Limites de g.* On a montré que $g(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Aussi, puisque g est impaire, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = -g(-x)$.
Par composition (en posant $u = -x$), g admet une limite en $-\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\lim_{u\to+\infty} g(u) = -0 = 0$.
- *Valeur en 0.* g étant impaire $g(0) = 0$.
- *Sens de variation.* On a vu que g est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $g'(x) = 2e^{-4x^2} - e^{-x^2} = e^{-x^2}(2e^{-3x^2} - 1)$.
Ainsi $g'(x)$ est du signe de $2e^{-3x^2} - 1$. Or on a :
$2e^{-3x^2} - 1 > 0 \iff e^{-3x^2} > \frac{1}{2} \underset{\text{croissance de ln}}{\iff} -3x^2 > -\ln 2 \iff x^2 < \frac{\ln 2}{3} \iff -\sqrt{\frac{\ln 2}{3}} \leq x \leq \sqrt{\frac{\ln 2}{3}}$

Les variations de g sont ainsi données par

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{\ln 2}{3}}$		0		$\sqrt{\frac{\ln 2}{3}}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$			0			$-$	
g	0	$\searrow$	$g(-\sqrt{\frac{\ln 2}{3}})$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$g(\sqrt{\frac{\ln 2}{3}})$	$\searrow$	0

Exercice 3 *Inégalité de Cauchy-Schwarz.* — Soient f et g deux fonctions continues et non nulles sur $[a, b]$.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a, par identité remarquable puis linéarité de l'intégrale,
$$P(\lambda) = \int_a^b (\lambda^2(f(x))^2 + 2\lambda f(x)g(x) + (g(x))^2)\,\mathrm{d}x = \left(\int_a^b (f(x))^2\,\mathrm{d}x\right) \times \lambda^2 + 2\left(\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right) \times \lambda + \left(\int_a^b (g(x))^2\,\mathrm{d}x\right).$$
Ainsi $P(\lambda)$ est de forme $P(\lambda) = \alpha\lambda^2 + \beta\lambda + \gamma$ avec $\alpha = \displaystyle\int_a^b (f(x))^2\,\mathrm{d}x$, $\beta = 2\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ et $\gamma = \int_a^b (g(x))^2\,\mathrm{d}x$.

Par ailleurs en revenant à la définition de $P(\lambda)$, on a $P(\lambda) = \displaystyle\int_a^b (\lambda f(x) + g(x))^2\,\mathrm{d}x \geq 0$, ceci par positivité de l'intégrale (la fonction que l'on intègre est un carré donc c'est une fonction positive).

2. En résumé le trinôme du second degré P est toujours positif donc il s'annule au plus une fois (il ne peut avoir deux racines distinctes car sinon il changerait de signe ce qui n'est pas le cas). Par conséquent son discriminant Δ est négatif ou nul. Or on a $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 4\left(\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 - 4\left(\int_a^b f(x)^2\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b g(x)^2\,\mathrm{d}x\right)$. Ecrivant que $\Delta \leq 0$, on obtient le résultat voulu.

3. a) On suppose ici que f et g vérifient $\left(\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 = \left(\int_a^b f(x)^2\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b g(x)^2\,\mathrm{d}x\right)$. D'après ce que l'on vient de dire, on a donc $\Delta = 0$ ce qui signifie que P possède une racine (double).

b) Appelons k la racine double de P. L'égalité $P(k) = 0$ s'écrit donc, par la définition initiale de P, $\displaystyle\int_a^b (kf(x) + g(x))^2\,\mathrm{d}x = 0$.
La fonction $x \mapsto (kf(x) + g(x))^2$ est donc une fonction continue sur $[a, b]$, positive sur ce segment et d'intégrale nulle. Le cours nous apprend qu'il s'agit de la fonction nulle. On a donc $(kf + g)^2 = 0$ et donc $kf + g = 0$ c'est à dire $g = -kf$. Les fonctions g et f sont donc proportionnelles

Exo V.

%item