DEVOIR SURVEILLE 6

Mathématique **ECS 1**

25 janvier 2014

Devoir surveillé 6.

Veillez à bien justifier vos réponses : un exercice bien traité rapporte des points, un exercice traité de façon non rigoureuse ne rapporte pas de points.

Soignez votre écriture et votre rédaction, faites des phrases complètes et $\boxed{\text{encadrez vos résultats.}}$

Le malus de 2 points pour les copies mal rédigées sera appliqué.
La durée de l'épreuve est de 4 heures.
Aucune sortie avant la fin de l'épreuve.
Les calculatrices ne sont pas autorisées.

Si, au cours de l'épreuve, vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez le sur votre copie et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous êtes amenés à prendre.

Ce sujet comporte deux exercices et un problème.

Exercice 1. Pour tout réel $x \geq 0$, on pose $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x - \ln(x)} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = -1 \end{cases}$

On rappelle qu'une fonction f définie dans un voisinage de x_0 est dérivable à droite en x_0 lorsque la limite $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe et est finie. Dans ce cas, cette limite est notée $f'_d(x_0)$ et s'appelle nombre dérivé à droite de f en x_0.

(1) Montrer que pour tout $x > 0 : x - \ln(x) > 0$

(2) **(a)** Montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$.

(b) Montrer que f est dérivable (à droite) en 0 et que $f'_d(0) = 0$.

(3) **(a)** Etudier la dérivabilité de f et calculer $f'(x)$ pour tout x où cela a un sens.

(b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

(c) Dresser le tableau de variations de f.

(4) Etudier le signe de $f(x)$.

(5) Pour tout réel x élément de $\mathbb{R}^+$ on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$

(a) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ puis étudier ses variations.

(b) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \displaystyle\int_1^x \frac{\ln t}{t} dt$.

(c) En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} \displaystyle\int_1^x \frac{\ln t}{t - \ln t} dt$ puis $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$.

Exercice 2. Dans cet exercice, on recherche toutes les fonctions continues $f :]0, +\infty[\longrightarrow]0, +\infty[$ vérifiant les deux propriétés suivantes :

$$(\star) \text{ pour tout } x > 0,\ f \circ f \circ f(x) + 2x = f(3x)$$
$$(\star\star) \lim_{x \to +\infty} (f(x) - x) = 0$$

On considère donc une telle fonction f.

(1) En utilisant $(\star)$, montrer que pour tout $y > 0$, $f(y) \geq \dfrac{2}{3} y$

(2) Soit $x > 0$ et $k \in \mathbb{R}$. Montrer que si $f(x) \geq kx$ alors $f(x) \geq \dfrac{(k^3 + 2)}{3} x$

(3) On considère la suite $(k_n)_{n \geq 1}$ définie en posant $k_1 = \frac{2}{3}$ et pour tout entier $n \geq 1$, $k_{n+1} = \dfrac{k_n^3 + 2}{3}$.

Montrer que pour tout réel $x > 0$ et tout entier $n \geq 1$, $f(x) \geq k_n x$.

(4) Dans cette question, on étudie la suite $(k_n)_{n \geq 1}$.

Exo I.

Exercice 2. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs telle que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{a_n}$ converge.

Le but de cet exercice est de prouver que la série de terme gégéral $u_n = \frac{n}{a_1 + a_2 \cdots + a_n}$ et que de plus

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \leq 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}$$

(1) Un exemple. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = n(n+1)$.

(a) Etablir que $\frac{1}{a_n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. En déduire que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{a_n}$ converge et donner sa somme.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer $u_n = \frac{n}{a_1 + a_2 \cdots + a_n}$ en fonction de n.

(c) Etablir la convergence de la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ et donner sa somme.

(d) Vérifier l'inégalité attendue.

(2) Un autre exemple. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = n!$

(a) Ecrire (sur votre copie) une fonction Scilab *fact* d'un entier n et calculant $n!$:

```
function f=fact(n)
.
.
.
endfunction
```

(b) Compléter (à recopier sur votre copie) le script Scilab suivant demandant un entier n et renvoyant la valeur de u_n en utilisant la fonction précédente.

```
n=input('Entrez un entier n : ')

s=0;
.
.
.
u=n/s;

disp(u)
```

(c) Etablir la convergence de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{a_n}$ et donner sa somme.

(d) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leq \frac{1}{(n-1)!}$

(e) En déduire que la série de terme général u_n converge et que $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \leq 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}$

(3) Cas général.

(a) Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, que l'on rappellera, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$(1 + 2 + \cdots + n)^2 \leq (a_1 + a_2 \cdots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{4}{a_2} + \cdots + \frac{n^2}{a_n} \right)$$

(b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{2n+1}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} \leq 4 \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right) \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{a_k^2}$$

(c) Par sommation, établir que

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{2n+1}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} \leq 4 \sum_{k=1}^{N} \frac{k}{a_k^2}$$

(d) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{2n+1}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$ converge.

(e) En déduire que la série de terme général $\dfrac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$ converge, puis l'inégalité attendue.

Exercice 3. Si P désigne un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ tel que $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} a_k X^k$, on note, pour toute matrice A de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, $P(A) = a_0 I_3 + a_1 A + \cdots + a_m A^m$, où I_3 désigne la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
On admet que, si P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$ et si A est une matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, alors : $(PQ)(A) = P(A)Q(A)$.
On se propose de déterminer explicitement le terme général de la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_2 = 1$ et la relation, valable pour tout n de $\mathbb{N}$,

$$u_{n+3} = 4u_{n+2} - 5u_{n+1} + 2u_n.$$

Pour ce faire, on pose, pour tout n de $\mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

(1) **(a)** Écrire la matrice A de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, indépendante de n, telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = AX_n$.

(b) Vérifier que $(A-I)^2(A-2I) = 0$.

(2) On considère le polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ défini par $P(X) = (X-1)^2(X-2)$.

(a) Justifier l'existence et 1'unicité d'un couple (Q_n, R_n) de $\mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}_2[X]$, tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ X^n = PQ_n + R_n$$

(b) Montrer que pour tout entier naturel n, il existe des réels a_n, b_n et c_n tels que :

$$R_n(X) = a_n + b_n(X-1) + c_n(X-1)^2.$$

(c) Établir que : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = 1,\ b_n = n$ et $c_n = 2^n - n - 1$.

(3) **(a)** Utiliser la question précédente pour écrire, pour tout n de $\mathbb{N}$, A^n comme combinaison linéaire de I, $A-I$ et $(A-I)^2$.

(b) Pour tout n de $\mathbb{N}$ donner la troisième ligne de la matrice A^n.

(4) **(a)** Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(b) En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}$, u_n en fonction de n.

Exercice 4. Un joueur lance n boules dans N cases numérotées de 1 à N. On suppose que les différents lancers sont indépendants et que la probabilité pour qu'une boule quelconque tombe dans une case donnée est $\dfrac{1}{N}$.
Une case peut contenir plusieurs boules.
Le gain est une fonction du nombre de cases atteintes. On étudie donc la variable aléatoire T_n égale au nombres de cases non vides à l'issue des n lancers.

1. Déterminer en fonction de n et de N les valeurs prises par T_n.
2. Donner les lois de T_1 et T_2.
3. Déterminer, lorsque $n \geq 2$, la probabilité des événements $[T_n = 1], [T_n = 2]$, $[T_n = n]$. (pour la dernière probabilité on distinguera deux cas $n > N$ et $n \leq N$).
4. A l'aide de la formule des probabilités totales, justifier l'égalité (I) suivante, pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$,
$$(I) \qquad P([T_{n+1} = k]) = \frac{k}{N} P([T_N = k]) + \frac{N-k+1}{N} P([T_n = k-1])$$
5. Afin de calculer l'espérance $E(T_n)$ de la variable T_n, on considère la fonction polynômiale G_n définie par :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G_n(x) = \sum_{k=1}^{n} P([T_n = k]) x^k$$

(4) Déterminer une base du noyau et une base de l'image de f.

(5) Soit k un entier de $[\![0, n]\!]$. Déterminer l'ensemble des polynômes P de $\mathbb{R}_n[X]$ tels que $f(P) = P_k$.

Exercice 3. Une personne envoie chaque jour un courrier électronique par l'intermédiaire de deux serveurs : le serveur A ou le serveur B.
L'univers Ω est l'ensemble des successions indéfinies de A ou B.
Pour $i \in \mathbb{N}^\star$, on note A_i l'événement « le serveur A est utilisé le i-ième jour » et B_i l'événement contraire.

Première partie.

Un jour donné, appelé le jour 1, on note les différents serveurs utilisée par l'ordinateur par une suite de lettres.

Par exemple, la suite AABBBA . . . signifie que les deux premiers jours l'ordinateur a choisi le serveur A, les jours 3. 4 et 5 il a choisi le le serveur B, et le jour 6 le serveur A.
Dans cet exemple, on dit que l'on a une première série de longueur 2 et une deuxième série de longueur 3 (Ce qui est également le cas de la série BBAAAB . . .)

On note L_1 la longueur de la première série et L_2 la longueur de la deuxième série.
Ainsi,pour $k \geq 1$, l'événement $[L_1 = k]$ est rśalisé si pendant les k premiers jours, c'est le même serveur qui a été choisi et le jour suivant l'autre serveur.

On suppose désormais que le serveur A est choisi avec une probabililité $p \in]0, 1[$ et le serveur B est choisi avec probabilité $q = 1 - p$.

Les choix des serveurs sont supposés indépendants les uns des autres.

(1) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Exprimer l'évènement $[L_1 = k]$ en fonction des A_i et B_i pour $1 \leq i \leq k$.

(2) En déduire $P([L_1 = k])$ pour $k \geq 1$.

(3) Vérifier par le calcul que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} P([L_1 = k]) = 1$.

(4) Montrer que L_1 admet une espérance et la calculer.

(5) Soient $n \geq 1,\ k \geq 1$ deux entiers naturels. Calculer $P([L_1 = k] \cap [L_2 = n])$. En déduire $P([L_2 = n])$.

(6) Montrer que L_2 admet une espérance et la calculer.

(7) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. A partir d'un jour donné, que l'on appelera le jour 1, on note N_n le nombre de fois où l'ordinateur choisit le serveur A pendant les n premiers jours. Pour $j \in [\![1, n]\!]$, calculer $P(N_n = j)$.

(8) On note maintenant T_1 le numéro du jour où pour la première fois le serveur A est choisi et T_2 le numéro du jour où pour la deuxième fois le serveur A est choisi.

(a) Pour $k \geq 1$, calculer $P(T_1 = k)$.

(b) Montrer que pour tout $\ell \geq 2, P(T_2 = \ell) = (\ell - 1)p^2q^{\ell-2}$

Deuxième partie.

(1) Montrer que pour tout réel x on a $1 - x \leq \mathrm{e}^{-x}$.

(2) On considère dans cette question une suite $(E_i)_{i\in\mathbb{N}^\times}$ d'événements indépendants. On suppose que la série de terme général $P(E_i)$ diverge.

Soit $k \in \mathbb{N}^\times$ fixé. Pour $n \geq k$, on note $C_n = \displaystyle\bigcup_{k\leq i\leq n} E_i = E_k \cup \cdots \cup E_n$.

(a) Justifier : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=k}^{n} P(E_i) = +\infty$.

(b) Montrer que $P(C_n) = 1 - \displaystyle\prod_{i=k}^{n} P(\overline{E_i})$ puis, en utilisant **1.**, que $P(C_n) \geq 1 - \mathrm{e}^{-\sum_{i=k}^{n} P(E_i)}$. En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P(C_n) = 1$

(c) Comparer pour l'inclusion les événements C_n et C_{n+1}. Que peut-on en déduire pour $P(\displaystyle\bigcup_{i=k}^{+\infty} C_i)$?

(d) Justifier que

$$\bigcup_{i=k}^{+\infty} E_i = \bigcup_{n=k}^{+\infty} C_n$$

et en déduire que

$$P(\bigcup_{i=k}^{+\infty} E_i) = 1$$

(3) En considérant les événements E_n « le serveur A est choisi aux $(2n)$-ième et au $(2n+1)$-ième jours», montrer que la probabilité que le serveur A soit choisi deux jours de suite, après n'importe quel jour, vaut 1.

Exercice 3

Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^4$, on considère les cinq vecteurs

$$u_1 = (1; -1; 0; 2), \qquad u_2 = (0; 1; 3; 0), \qquad u_3 = (1; -4; -2; 0),$$

$$u_4 = (0; 4; 5; 2) \qquad \text{et} \qquad u_5 = (3; -5; 1; 4).$$

On note F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par la famille $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$.

1. Quelle est la dimension de F ? À quel type de sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ a-t-on affaire ? La famille $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$ est-elle génératrice de $\mathbb{R}^4$?
2. Extraire une famille libre (la plus grande possible) de $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$ et la compléter en une base de $\mathbb{R}^4$. En déduire un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^4$.
3. Donner une représentation paramétrique de F comportant le moins de paramètres possible.
4. Déterminer $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : ax + by + cz + dt = 0\}$ (autrement dit tels que $ax + by + cz + dt = 0$ soit une équation cartésienne de F).
5. Soit $v = (a, b, c, d)$ où a, b, c, d ont été déterminés à la question précédente. On note D la droite vectorielle engendrée par v.
   a) Montrer que F et D sont en somme directe.
   b) Montrer que F et D sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice 4

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer les valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ pour lesquelles $\operatorname{rang}(A - \lambda I_3) < 3$. *On indiquera les opérations effectuées sur les lignes.*
2. a) Résoudre le système linéaire $(A - 4I_3)X = 0$ où X est le vecteur colonne dont les coordonnées x, y et z sont les inconnues du système.
   Préciser la dimension ainsi qu'une base du sous-espace des solutions.
   b) Résoudre de même le système $(A - 3I_3)X = 0$. *On choisira x et y comme paramètres !*
   Préciser la dimension ainsi qu'une base du sous-espace des solutions.
3. On considère les vecteurs v_1, v_2 et v_3 de $\mathbb{R}^3$ donnés par

$$v_1 = (1; 1; 1), \qquad v_2 = (1; 0; 1), \qquad v_3 = (0; 1; 1)$$

   et l'on note P la matrice de la famille de vecteurs (v_1, v_2, v_3) dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   a) Démontrer que (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
   b) Déterminer l'inverse de P.
   c) Calculer $D = P^{-1}AP$.

Exercice 5

Écrire, en langage SCILAB, une fonction `Qsuite` de la variable `n` qui calcule les `n` premiers termes de la Q-suite de Hofstadter définie par récurrence par

$$Q(1) = Q(2) = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \geqslant 3, \quad Q(n) = Q\big(n - Q(n-1)\big) + Q\big(n - Q(n-2)\big).$$

Exo II.

Devoir libre 6.

Exercice 1. Soit a un nombre réel strictement positif.

(1) On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ telle que $u_0 = a$ et, pour tout $n \geq 0$,

$$u_{n+1} = \frac{u_n^2}{1+u_n^2}.$$

Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.

Soit b un nombre réel strictement positif. On considère maintenant la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ telle que $v_0 = a, v_1 = b$ et pour tout $n \geq 1$,

$$v_{n+1} = \frac{v_n^2}{1+v_n v_{n-1}}.$$

(2) On suppose dans cette question que v_n est croissante et que $v_n \longrightarrow \infty$. Montrer que $\dfrac{v_{n+1}v_{n-1}}{v_n} \longrightarrow +\infty$ lorsque $n \to \infty$. En remarquant que

$$v_{n+1} + v_n^2\left(\frac{v_{n+1}v_{n-1}}{v_n} - 1\right) = 0,$$

aboutir à une contradiction.

(3) Montrer que la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ n'est pas croissante (on pourra raisonner par l'absurde).

(4) Montrer que la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ converge vers une limite qu'on déterminera.

Exercice 2. Dans l'espace vectoriel $\mathbf{R}^3$, on considère les trois triplets $u_1 = (1,0,1)$, $u_2 = (-1,0,1)$ et $u_3 = (1,1,1)$.

(1) Montrer que (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

(2) Calculer les coordonnées du vecteurs $v_3 = (2,-3,1)$ dans cette base.

Exercice 3. Soit F et G les sev de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ définis comme suit :

$$F = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right), \quad G = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)$$

Démontrer que F et G sont supplémentaire dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 4. Soit f la fonction définie sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ par $f(x) = \dfrac{1}{\cos x}$.

On admet que la fonction f est indéfiniment dérivable sur $[0, \frac{\pi}{4}]$.
On note $f^{(0)} = f$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f^{(n)}$ est la dérivée n^{e} de la fonction f.
Ainsi, $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = f''$, etc.

(1) Calculer, pour $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$, les dérivées $f'(x)$ et $f''(x)$ et montrer qu'elles s'écrivent sous la forme

$$f'(x) = \frac{P_1(\sin x)}{\cos^2(x)} \text{ et } f''(x) = \frac{P_2(\sin x)}{\cos^3(x)}$$

où P_1 et P_2 sont deux polynômes à déterminer.

(2) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, il existe un polynôme P_n tel que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$,

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin x)}{\cos^{n+1}(x)}$$

(3) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P_{n+1} = (1-X^2)P_n' + (n+1)XP_n$$

En déduire le polynôme P_3.

(4) Déterminer, pour tout entier naturel n non nul, le degré et le coefficient dominant du polynôme P_n.

Exo III.

CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLE 6

Mathématique **ECS 1**

25 janvier 2014

Corrigé du devoir surveillé 6.

Veillez à bien justifier vos réponses : un exercice bien traité rapporte des points, un exercice traité de façon non rigoureuse ne rapporte pas de points.

Soignez votre écriture et votre rédaction, faites des phrases complètes et $\boxed{\text{encadrez vos résultats.}}$

Le malus de 2 points pour les copies mal rédigées sera appliqué.
La durée de l'épreuve est de 4 heures.
Aucune sortie avant la fin de l'épreuve.
Les calculatrices ne sont pas autorisées.

Si, au cours de l'épreuve, vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez le sur votre copie et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous êtes amenés à prendre.

Ce sujet comporte trois exercices.

EXERCICE 1. Pour tout réel $x \geq 0$, on pose $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x - \ln(x)} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = -1 \end{cases}$

On rappelle qu'une fonction f définie dans un voisinage de x_0 est dérivable à droite en x_0 lorsque la limite $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\x>x_0}} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe et est finie. Dans ce cas, cette limite est notée $f'_d(x_0)$ et s'appelle nombre dérivé à droite de f en x_0.

(1) Montrer que pour tout $x > 0 : x - \ln(x) > 0$

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $h(x) = x - \ln x$.

Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$, de dérivée donnée par $h'(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$. La dérivée est négative sur $]0,1[$ et positive sur $[1,+\infty[$ donc h est décroissante sur $]0,1[$ puis croissante sur $[1,+\infty[$. La fonction h possède donc un minimum pour $x = 1$ qui est $h(1) = 1$.

En conclusion, pour tout $x > 0$, $h(x) \geq 1 > 0$.

(2) **(a)** Montrer que f est continue sur $[0,+\infty[$.

La fonction f est continue sur $]0,+\infty[$ comme somme et quotient défini de fonctions continues. Vérifions la continuité en 0 : pour tout $x > 0$,

$$f(x) = \frac{1}{\frac{x}{\ln x} - 1}$$

Le théorème des croissances comparées donne $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\ln x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -1 = f(0)$.

Ainsi, la fonction f est aussi continue en 0.

(b) Montrer que f est dérivable (à droite) en 0 et que $f'_d(0) = 0$.

Comme $f(0) = -1$, pour tout $x > 0$,

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{f(x)+1}{x} = \frac{1}{x - \ln x}.$$

Comme $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} -\ln x = +\infty$, on a : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \dfrac{1}{x - \ln x} = 0$ donc f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 0$.

(3) **(a)** Etudier la dérivabilité de f et calculer $f'(x)$ pour tout x où cela a un sens.

La fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme somme et quotient défini de fonctions dérivables. Sa dérivée sur $]0,+\infty[$ est donnée par

$$f'(x) = \frac{\ln'(x)(x-\ln x) - (\ln x)(1 - \frac{1}{x})}{(x-\ln x)^2} = \frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}$$

(b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Pour tout $x > 0$,

$$f(x) = \frac{1}{\frac{x}{\ln x} - 1}$$

et d'après le théorème des croissances comparées $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\ln x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Exo I.

(c) Dresser le tableau de variations de f.

La dérivée f' est positive sur $]0,\mathrm{e}[$ et négative sur $]\mathrm{e},+\infty[$. Les variation de f sont données par le tableau suivant :

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
f	-1	$\nearrow$	$\frac{1}{\mathrm{e}-1}$	$\searrow$	0

(4) Etudier le signe de $f(x)$.

Le dénominateur de f est strictement positif sur $]0,+\infty[$ donc $f(x)$ est du signe de $\ln x$ sur $]0,+\infty[$:

x	0		1		$+\infty$
$f(x)$	-1	$-$	0	$+$	

(5) Pour tout réel x élément de $\mathbb{R}^+$ on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$

(a) Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ puis étudier ses variations.

Comme f est continue sur $[0,+\infty[$, ses primitives sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ et la fonction F en est une.

x	0		1		$+\infty$
$f(x)$	-1	$-$	0	$+$	
F	0	$\searrow$	$F(1)$	$\nearrow$	

(b) Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_1^x \frac{\ln t}{t}\mathrm{d}t$.

Pour tout $x>1$,

$$\int_1^x \frac{\ln t}{t}\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}(\ln t)^2\right]_1^x = \frac{1}{2}(\ln x)^2$$

Donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_1^x \frac{\ln t}{t}\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}(\ln x)^2 = +\infty$

(c) En déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_1^x \frac{\ln t}{t-\ln t}dt$ puis $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}F(x)$.

Pour tout $t>1$, $0<t-\ln t<t$ et $\ln t>0$ donc $\dfrac{\ln t}{t-\ln t} > \dfrac{\ln t}{t}$.

D'après la positivité de l'intégrale, on a donc :

$$\forall x>1,\ \int_1^x \frac{\ln t}{t}\mathrm{d}t \le \int_1^x \frac{\ln t}{t-\ln t}\mathrm{d}t$$

et de (b), on déduit par comparaison que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_1^x \frac{\ln t}{t-\ln t}\mathrm{d}t = +\infty$.

D'après la relation de Chasles intégrale, pour tout $x>1$,

$$F(x) = F(1) + \int_1^x \frac{\ln t}{t-\ln t}\mathrm{d}t$$

donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}F(x) = +\infty$.

Exercice 2. Dans cet exercice, on recherche toutes les fonctions continues $f :]0,+\infty[\longrightarrow]0,+\infty[$ vérifiant les deux propriétés suivantes :

$$(\star)\ \text{pour tout } x>0,\ f\circ f\circ f(x) + 2x = f(3x)$$
$$(\star\star)\ \lim_{x\to+\infty}(f(x)-x) = 0$$

Montrons que $h \circ h = h$. Comme $h \circ h = \frac{1}{4} L_3(f) \circ L_3(f) = \frac{1}{4} L_3^2(f)$, il suffit pour simplifier $L_3^2(f)$ de faire la division euclidienne de L_3^2 par T :

$$\begin{aligned}
L_3^2(X) &= (X-\alpha)^2(X-\overline{\alpha})^2 \\
&= \frac{1}{9}(3X^2+2X+1)^2 \\
&= \frac{1}{9}(9X^4+4X^2+1+12X^3+6X^2+4X) \\
&= \frac{1}{9}(9X^4+6X^3+10X^2+4X+1)
\end{aligned}$$

et par linéarité de φ,

$$\begin{aligned}
\varphi(L_3^2) &= \frac{1}{9}(9\varphi(X^4)+12\varphi(X^3)+10\varphi(X^2)+4\varphi(X)+\varphi(1)) \\
&= \frac{1}{9}\left(9 \cdot \frac{4X^2+4X+1}{9} + 12 \cdot \frac{X^2+X+1}{3} + 10X^2+4X+1\right) \\
&= \frac{1}{9}\left(18X^2+12X+6\right)
\end{aligned}$$

ce qui donne finalement,

$$h \circ h = \frac{1}{36}\left(18f^2+12f+6\mathrm{id}\right) = \frac{1}{6}\left(3f^2+2f+\mathrm{id}\right) = h.$$

Exercice 2. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs telle que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{a_n}$ converge.

Le but de cet exercice est de prouver que la série de terme général $u_n = \frac{n}{a_1+a_2\cdots+a_n}$ est convergente et que de plus

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \leq 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}$$

(1) Un exemple. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = n(n+1)$.

(a) Etablir que $\frac{1}{a_n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. En déduire que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{a_n}$ converge et donner sa somme.

C'est un exemple figurant dans le cours. Je vous y renvoie. On trouve $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n} = 1$.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer $u_n = \frac{n}{a_1+a_2\cdots+a_n}$ en fonction de n.

Simplifions la somme $\sum_{k=1}^{n} a_k$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} a_k &= \sum_{k=1}^{n} k(k+1) \\
&= \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{n(n+1)}{2}\left(1+\frac{2n+1}{3}\right) \\
&= \frac{n(n+1)(2n+4)}{6}
\end{aligned}$$

donc $u_n = \frac{3}{(n+1)(n+2)}$.

(c) Etablir la convergence de la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ et donner sa somme.

Comme, on a un produit de deux entiers consécutifs au dénominateur, on applique la même méthode qu'en (a) en étudiant les sommes partielles par télescopage :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ u_k = \frac{3}{k+1} - \frac{3}{k+2}$$

donc pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{3}{2} - \frac{3}{n+2}$$

et cela montre que les sommes partielles de la série $\sum_{k\geq 1} u_k$ convergent vers $\frac{3}{2}$.

La série $\sum_{k\geq 1} u_k$ est donc convergente et $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = \frac{3}{2}$.

(d) Vérifier l'inégalité attendue.

On a bien : $\frac{3}{2} \leq 2 \times 1$.

(2) Un autre exemple. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = n!$

(a) Ecrire (sur votre copie) une fonction Scilab *fact* d'un entier n et calculant $n!$:

```
function f=fact(n)
f=1;
if n=0 then f=1
  else for j=1:n do
     f=f*j;
        end;
end;
endfunction
```

(b) Compléter (à recopier sur votre copie) le script Scilab suivant demandant un entier n et renvoyant la valeur de u_n en utilisant la fonction précédente.

```
n=input('Entrez un entier n : ')

s=0;
for j=1:n do
  s=s+1/fact(j);
end;

u=n/s;

disp(u)
```

(c) Etablir la convergence de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{a_n}$ et donner sa somme.

La série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{a_n}$ est la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n!}$. Elle est de même nature que la série $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}$ qui converge comme série exponentielle. Sa somme est donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} = \mathrm{e} - 1.$$

(d) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leq \frac{1}{(n-1)!}$

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*, n! \leq \sum_{k=1}^{n} k!$ donc

$$u_n = \frac{n}{\sum_{k=1}^{n} k!} \leq \frac{n}{n!} = \frac{1}{(n-1)!}$$

(e) En déduire que la série de terme général u_n converge et que $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \leq 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}$

La série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(n-1)}$ est convergente comme série exponentielle.

Les séries $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(n-1)}$ et $\sum_{n\geq 1} u_n$ sont à termes positifs. Le critère de comparaison appliquée avec l'inégalité précédente montre alors que la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ est convergente.

De plus, on a l'inégalité $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} = \mathrm{e}$. Comme $\mathrm{e} > 2$, on a $\mathrm{e} \leq 2(\mathrm{e}-1)$ donc l'inégalité $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \leq 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}$ est encore vérifiée.

(3) Cas général.

(a) Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, que l'on rappellera, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$(1+2+\cdots+n)^2 \leq (a_1 + a_2 \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{4}{a_2} + \cdots + \frac{n^2}{a_n}\right)$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
L'inégalité de Cauchy-Schwarz affirme que pour des réels $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$, on a

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right|^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right)$$

En posant pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*, x_k = \sqrt{a_k}$ et $y_k = \frac{k}{\sqrt{a_k}}$, et en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\begin{aligned}(1+2+\cdots+n)^2 &= \left|\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right|^2 \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right) \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{a_k}\right)\end{aligned}$$

qui est l'inégalité demandée.

(b) [1] En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{2n+1}{a_1+a_2+\cdots+a_n} \leq 4\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right)\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{a_k}$$

De l'inégalité précédente, on déduit que

$$\frac{\frac{n^2(n+1)^2}{4}}{a_1+a_2+\cdots+a_n} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{a_k}$$

donc

$$\begin{aligned}\frac{2n+1}{a_1+a_2+\cdots+a_n} &\leq \frac{4(2n+1)}{n^2(n+1)^2}\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{a_k} \\ &\leq \frac{4((n+1)^2-n^2)}{n^2(n+1)^2}\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{a_k} \\ &\leq 4\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right)\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{a_k}\end{aligned}$$

1. Erreur d'énoncé : le barème en tiendra compte.

(c) [2] Par sommation, établir que

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{2n+1}{a_1+a_2+\cdots+a_n} \leq 4\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{a_k}$$

Par sommation,

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{2n+1}{a_1+a_2+\cdots+a_n} \leq \sum_{n=1}^{N} 4\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{a_k} \leq \sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{n} 4\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\frac{k^2}{a_k}$$

puis par interversion des sommes,

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{2n+1}{a_1+a_2+\cdots+a_n} \leq \sum_{k=1}^{N}\sum_{n=k}^{N} 4\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\frac{k^2}{a_k} \leq 4\sum_{k=1}^{N}\frac{k^2}{a_k}\sum_{n=k}^{N}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)$$

ce qui donne en simplifiant la somme télescopique

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} \frac{2n+1}{a_1+a_2+\cdots+a_n} &\leq 4\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(N+1)^2}\right)\frac{k^2}{a_k}\\ &\leq 4\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{a_k} - 4\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{(N+1)^2}\frac{k^2}{a_k}\end{aligned}$$

et en tenant compte du fait que $4\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{(N+1)^2}\frac{k^2}{a_k} \geq 0$, on arrive à l'inégalité attendue :

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{2n+1}{a_1+a_2+\cdots+a_n} \leq 4\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{a_k}$$

(d) Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{2n+1}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$ converge.

D'après l'inégalité précédente, pour tout entier $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{2n+1}{a_1+a_2+\cdots+a_n} \leq 4\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{a_k}$$

puisque la série $\sum_{k\geq 1}\frac{1}{a_k}$ est convergente et à termes positifs.

Par conséquent, les sommes partielles de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{2n+1}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$ sont majorées. Comme c'est une série à termes positifs, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{2n+1}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$ est convergente et en plus

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+1}{a_1+a_2+\cdots+a_n} \leq 4\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{a_k}$$

(e) En déduire que la série de terme général $\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$ converge, puis l'inégalité attendue.

Pour tout entier $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n} \leq \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} \frac{2n}{a_1+a_2+\cdots+a_n} \leq \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} \frac{2n+1}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$$

Par conséquent, les sommes partielles de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$ sont majorées. Comme c'est une série à termes positifs, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$ est convergente et en plus

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n} \leq \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+1}{a_1+a_2+\cdots+a_n} \leq 2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{a_k}$$

2. Erreur d'énoncé : le barème en tiendra compte

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & -2 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 3 & 0 & \ddots & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 8 & & \ddots & \vdots & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \ddots & & -k(k-1) & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & k^2+2k & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & -(n-1)(n-2) & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -n(n-1) \\
0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & (n-1)^2+2(n-1) & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & n^2+2n
\end{pmatrix}$$

(3) Pour tout entier $k \in [\![0, n]\!]$, calculer $f(P_k)$ et donner la matrice de f dans la base constituée des polynômes $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$.

Pour tout entier $k \in [\![0, n]\!]$, $f(P_k) = (k^2 + 2k)P_k$.
La matrice de f dans la base constituée des polynômes $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & 3 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 8 & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & \ddots & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n^2+2n
\end{pmatrix}$$

(4) Déterminer une base du noyau et une base de l'image de f.

D'après la matrice de f dans la base constituée des polynômes $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$, le noyau est de dimension 1 engendré par le polynôme constant 1 et l'image de f est de dimension $n-1$ engendré par les polynômes $P_1, P_2, \ldots, P_n$ qui en constituent donc une base d'après les propriétés établies en $(1b)$.

(5) Soit k un entier de $[\![0, n]\!]$. Déterminer l'ensemble des polynômes P de $\mathbb{R}_n[X]$ tels que $f(P) = P_k$.

D'après la question précédente, l'image de f est $\text{Vect}(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ donc l'équation $f(P) = P_0$ n'a pas de solution puisque $P_0 \notin \text{Vect}(P_1, P_2, \ldots, P_n)$.

Si $k \neq 0$ alors $f\left(\dfrac{P_k}{k^2+2k}\right) = P_k$ donc

$$f(P) = P_k \Longleftrightarrow P - \frac{P_k}{k^2+2k} \in \ker f$$

La question précédente montre alors que l'ensemble des solutions de l'équation $f(P) = P_k$ est l'ensemble des polynômes de la forme $P = \alpha + \dfrac{P_k}{k^2+2k}$ où α est un réel.

Exercice 3. Une personne envoie chaque jour un courrier électronique par l'intermédiaire de deux serveurs : le serveur A ou le serveur B.
L'univers Ω est l'ensemble des successions indéfinies de A ou B.
Pour $i \in \mathbb{N}^\star$, on note A_i l'événement « le serveur A est utilisé le i-ième jour » et B_i l'événement contraire.

Première partie.

Un jour donné, appelé le jour 1, on note les différents serveurs utilisée par l'ordinateur par une suite de lettres.

Par exemple, la suite AABBBA . . . signifie que les deux premiers jours l'ordinateur a choisi le serveur A, les jours 3. 4 et 5 il a choisi le le serveur B, et le jour 6 le serveur A.
Dans cet exemple, on dit que l'on a une première série de longueur 2 et une deuxième série de longueur 3 (Ce qui est également le cas de la série BBAAAB . . .)

On note L_1 la longueur de la première série et L_2 la longueur de la deuxième série.
Ainsi,pour $k \geq 1$, l'événement $[L_1 = k]$ est rśalisé si pendant les k premiers jours, c'est le même serveur qui a été choisi et le jour suivant l'autre serveur.

On suppose désormais que le serveur A est choisi avec une probabililité $p \in]0,1[$ et le serveur B est choisi avec probabilité $q = 1 - p$.

Les choix des serveurs sont supposés indépendants les uns des autres.

(1) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Exprimer l'évènement $[L_1 = k]$ en fonction des A_i et B_i pour $1 \leq i \leq k+1$.

$$[L_1 = k] = \left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i \cap B_{k+1}\right) \cup \left(\bigcap_{i=1}^{k} B_i \cap A_{k+1}\right)$$

(2) En déduire $P([L_1 = k])$ pour $k \geq 1$.

Par incompatibilité des événements $\bigcap_{i=1}^{k} A_i \cap B_{k+1}$ et $\bigcap_{i=1}^{k} B_i \cap A_{k+1}$, puis par indépendance des choix des serveurs

$$P(L_1 = k) = p^k q + q^k p$$

(3) Vérifier par le calcul que $\sum_{k=1}^{+\infty} P([L_1 = k]) = 1$.

Les séries $\sum_{k\geq 1} p^k$ et $\sum_{k\geq 1} q^k$ sont convergentes comme séries géométriques de raison strictement comprise entre -1 et 1.

La série $\sum_{k\geq 1} P(L_1 = k)$ est donc convergente et

$$\sum_{k=1}^{+\infty} P([L_1 = k]) = \sum_{k=1}^{+\infty} (p^k q + q^k p) = \frac{qp}{1-p} + \frac{pq}{1-q} = p + q = 1.$$

(4) Montrer que L_1 admet une espérance et la calculer.

Pour tout entier $k \geq 1$,

$$kP(L_1 = k) = kp^k q + kq^k p = pq(kp^{k-1} + kq^{k-1}).$$

Les séries $\sum_{k\geq 1} kp^{k-1}$ et $\sum_{k\geq 1} kq^{k-1}$ sont convergentes comme séries dérivées de séries géométriques convergentes donc la série $\sum_{k\geq 1} kP(L_1 = k)$ converge. Etant une série à termes positifs, la série est absolument convergente et L_1 admet donc une espérance :

$$E(L_1) = \sum_{k=1}^{+\infty} kP([L_1 = k]) = pq\left(\frac{1}{(1-p)^2} + \frac{1}{(1-q)^2}\right) = \frac{p}{q} + \frac{q}{p}$$

(5) Soient $n \geq 1,\ k \geq 1$ deux entiers naturels. Calculer $P([L_1 = k] \cap [L_2 = n])$. En déduire $P([L_2 = n])$.

On a

$$[L_1 = k] \cap [L_2 = n] = \left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i \cap \bigcap_{j=k+1}^{k+n} B_j \cap A_{k+n+1}\right) \cup \left(\bigcap_{i=1}^{k} B_i \cap \bigcap_{j=k+1}^{k+n} A_j \cap B_{k+n+1}\right)$$

puis par incompatibilité et indépendance,

$$P([L1 = k] \cap [L_2 = n]) = p^k q^n p + q^k p^n q.$$

La formule des probabilités totales donne alors

$$P(L_2 = n) = \sum_{k=1}^{+\infty} P([L_1 = k] \cap [L_2 = n]) = pq^n \frac{p}{1-p} + qp^n \frac{q}{1-q} = p^2 q^{n-1} + q^2 p^{n-1}$$

(6) Montrer que L_2 admet une espérance et la calculer.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$nP(L_2 = n) = p^2(nq^{n-1}) + q^2(np^{n-1})$$

Les séries $\sum_{n\geq 1} np^{n-1}$ et $\sum_{n\geq 1} nq^{n-1}$ sont convergentes comme séries dérivées de séries géométriques convergentes donc la série $\sum_{n\geq 1} nP(L_2 = n)$ converge. Etant une série à termes positifs, la série est absolument convergente donc L_2 admet une espérance :

$$E(L_2) = \sum_{n=1}^{+\infty} nP([L_2 = n]) = \frac{p^2}{(1-q)^2} + \frac{q^2}{(1-p)^2} = 2$$

(7) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. A partir d'un jour donné, que l'on appelera le jour 1, on note N_n le nombre de fois où l'ordinateur choisit le serveur A pendant les n premiers jours. Pour $j \in [\![1, n]\!]$, calculer $P(N_n = j)$.
Décidons qu'un succès est le choix du serveur A. La variable aléatoire N_n compte donc le nombre de succès dans une suite d'épreuves indépandantes de Bernoulli de paramètre p, et par conséquent

$$P(N_n = j) = \binom{n}{j} p^j q^{n-j}.$$

(8) On note maintenant T_1 le numéro du jour où pour la première fois le serveur A est choisi et T_2 le numéro du jour où pour la deuxième fois le serveur A est choisi.

(a) Pour $k \geq 1$, calculer $P(T_1 = k)$.
La variable aléatoire T_1 est le rang du premier succès dans une suite d'épreuves indépandantes de Bernoulli de paramètre p. Par conséquent

$$P(T_1 = k) = q^{k-1}p.$$

(b) Montrer que pour tout $\ell \geq 2, P(T_2 = \ell) = (\ell - 1)p^2 q^{\ell-2}$
Soit $\ell \in \mathbb{N}$ tel que $\ell \geq 2$.
L'événement $[T_2 = \ell]$ est réalisé si et seulement si le serveur A est choisi le ℓ^{e} jour et si lors des $\ell - 1$ premiers jours le serveur A n'a été choisi qu'une seule fois. Comme il y a $\ell - 1$ jours possibles pour le choix du serveur A la première fois, on a

$$P(T_2 = \ell) = (\ell - 1)p^2 q^{\ell-2}.$$

Deuxième partie.

(1) Montrer que pour tout réel x on a $1 - x \leq \mathrm{e}^{-x}$.
Une étude de fonction bien menée permet de répondre à la question.

(2) On considère dans cette question une suite $(E_i)_{i\in\mathbb{N}^\times}$ d'événements indépendants. On suppose que la série de terme général $P(E_i)$ diverge.
Soit $k \in \mathbb{N}^\times$ fixé. Pour $n \geq k$, on note $C_n = \bigcup_{k\leq i\leq n} E_i = E_k \cup \cdots \cup E_n$.

(a) Justifier : $\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=k}^{n} P(E_i) = +\infty$.
La série de terme général $P(E_i)$ diverge par hypothèse. Comme l'indice initial ne change pas la nature d'une série, la série $\sum_{i\geq k} P(E_i)$ diverge. Etant une série à termes positifs, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=k}^{n} P(E_i) = +\infty.$$

(b) Montrer que $P(C_n) = 1 - \prod_{i=k}^{n} P(\overline{E_i})$ puis, en utilisant **1.**, que $P(C_n) \geq 1 - \mathrm{e}^{-\sum_{i=k}^{n} P(E_i)}$. En déduire que $\lim_{n\to+\infty} P(C_n) = 1$
D'abord, en utilisant les lois de De Morgan, on a

$$P(C_n) = 1 - P(\overline{C_n}) = 1 - P(\bigcap_{k\leq i\leq n} \overline{E_i})$$

et par indépendance des événements (E_i), on obtient

$$P(C_n) = 1 - \prod_{i=k}^{n} P(\overline{E_i}).$$

Ensuite, pour tout i, $0 \leq P(\overline{E_i}) = 1 - P(E_i) \leq \mathrm{e}^{-P(E_i}$ donc, les membres de ces inégalités étant positifs, on a $\prod_{i=k}^{n} P(\overline{E_i}) \leq \mathrm{e}^{-\sum_{i=k}^{n} P(E_i)}$, et par suite $P(C_n) \geq 1 - \mathrm{e}^{-\sum_{i=k}^{n} P(E_i)}$.

Pour tout $n \geq k$,

$$1 - \mathrm{e}^{-\sum_{i=k}^{n} P(E_i)} \leq P(C_n) \leq 1$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} (1 - \mathrm{e}^{-\sum_{i=k}^{n} P(E_i)}) = 1$, le théorème de convergence par encadrement donne

$$\lim_{n\to+\infty} P(C_n) = 1.$$

(c) Comparer pour l'inclusion les événements C_n et C_{n+1}. Que peut-on en déduire pour $P(\bigcup_{i=k}^{+\infty} C_i)$?

Clairement, pour tout $n \geq k$, $C_n \subset C_{n+1}$. La suite d'événements (C_n) est donc croissante pour l'inclusion. Le théorème de la limite monotone implique alors

$$P(\bigcup_{i=k}^{+\infty} C_i) = \lim_{n\to+\infty} P(C_n) = 1.$$

(d) Justifier que

$$\bigcup_{i=k}^{+\infty} E_i = \bigcup_{n=k}^{+\infty} C_n$$

et en déduire que

$$P(\bigcup_{i=k}^{+\infty} E_i) = 1$$

Pour tout $n \geq k$, on a $E_n \subset C_n$ donc $\bigcup_{n=k}^{+\infty} E_n \subset \bigcup_{n=k}^{+\infty} C_n$.

Pour l'inclusion réciproque, on a $C_n = \bigcup_{i=k}^{n} E_i \subset \bigcup_{i\geq k} E_i$ donc $\bigcup_{n\geq k} C_n \subset \bigcup_{i\geq k} E_i$.

L'égalité est donc établie.

Comme $P(\bigcup_{i=k}^{+\infty} C_i) = 1$, on a $P(\bigcup_{i=k}^{+\infty} E_i) = 1$

(3) En considérant les événements E_n « le serveur A est choisi aux $(2n)$-ième et au $(2n+1)$-ième jours», montrer que la probabilité que le serveur A soit choisi deux jours de suite, après n'importe quel jour, vaut 1.

D'une part, les événements de la famille $(E_n)_{n\geq 1}$ portent sur des groupements disjoints de deux jours consécutifs donc ces événements sont mutuellement indépendants.

D'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, P(E_n) = p^2$ donc la série de terme général $P(E_n)$ diverge.

L'événement « le serveur A soit choisi deux jours de suite, après n'importe quel jour »est l'événement $\bigcap_{k=1}^{+\infty} \left(\bigcup_{i=k}^{+\infty} E_i \right)$.

L'étude précédente a montré que pour tout $k \in \mathbb{N}^*, P(\bigcup_{i=k}^{+\infty} E_i) = 1$.

Il ne reste plus qu'à remarquer que $\bigcup_{i=k+1}^{+\infty} E_i \subset \bigcup_{i=k}^{+\infty} E_i$ pour pouvoir appliquer le théorème de la limite monotone dans le cas d'une suite décroissante d'événements :

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} \left(\bigcup_{i=k}^{+\infty} E_i \right) \right) = \lim_{k\to+\infty} P(\bigcup_{i=k}^{+\infty} E_i) = 1.$$

Exercice 3

Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^4$, on considère les cinq vecteurs $u_1 = (1;-1;0;2)$, $u_2 = (0;1;3;0)$, $u_3 = (1;-4;-2;0)$, $u_4 = (0;4;5;2)$ et $u_5 = (3;-5;1;4)$. On note F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par la famille $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$.

1. *Quelle est la dimension de F ? À quel type de sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ a-t-on affaire ? La famille $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$ est-elle génératrice de $\mathbb{R}^4$?*

   Notons M la matrice de la famille $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$ dans la base canonique. On a

$$\begin{aligned}
\operatorname{rg} M &= \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & -4 & 4 & -5 \\ 0 & 3 & -2 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & \boxed{1} & -4 & 4 & -5 \\ 0 & 3 & -2 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \\
&= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \boxed{1} & 0 & 3 \\ -1 & \boxed{1} & -4 & 4 & -5 \\ 3 & 0 & 10 & -7 & 16 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \boxed{1} & 0 & 3 \\ -1 & \boxed{1} & -4 & 4 & -5 \\ -7 & 0 & 0 & -7 & -14 \\ 2 & 0 & 0 & \boxed{2} & 4 \end{pmatrix} \\
&= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \boxed{1} & 0 & 3 \\ -1 & \boxed{1} & -4 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & \boxed{2} & 4 \end{pmatrix} = 3.
\end{aligned}$$

   Comme le rang de M est le rang de la famille $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$, c'est-à-dire la dimension du sous-espace vectoriel engendré par cette famille, on a

$$\boxed{\dim F = 3.}$$

   Ainsi, F est un sous-espace vectoriel de dimension 3 dans un espace de dimension 4, c'est-à-dire que

$$\boxed{F \text{ est un hyperplan de } \mathbb{R}^4.}$$

   La famille $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$ n'engendre donc pas tout l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ mais seulement un hyperplan d'icelui, ce qui implique que

$$\boxed{\text{la famille } (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) \text{ n'est pas une famille génératrice de } \mathbb{R}^4.}$$

2. *Extraire une famille libre (la plus grande possible) de $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$ et la compléter en une base de $\mathbb{R}^4$. En déduire un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^4$.*

   En ne conservant que les vecteurs u_2, u_3 et u_4 qui sont les vecteurs principaux de la réduite de Gauß déterminée à la question précédente (c'est-à-dire les vecteurs des colonnes où il y a un pivot), on obtient une famille de 3 vecteurs de rang 3 dans le sous-espace F qui est de rang 3, c'est-à-dire que l'on extrait ainsi une base de F. Par suite

$$\boxed{(u_2, u_3, u_4) \text{ est une famille libre (de taille maximale) extraite de } (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5).}$$

   La troisième ligne de la réduite de Gauß ne comportant pas de pivot, l'ajout du vecteur canonique $\varepsilon_3 = (0, 0, 1, 0)$ à la famille (u_2, u_3, u_4) assure d'obtenir une famille de 4 vecteurs de rang 4 en dimension 4, c'est-à-dire une base de $\mathbb{R}^4$. Par suite,

$$\boxed{\text{la famille } (u_2, u_3, u_4, \varepsilon_3), \text{ où } \varepsilon_3 = (0, 0, 1, 0), \text{ est une base de } \mathbb{R}^4.}$$

   Il s'ensuit, d'après le lemme de juxtaposition des bases, que

$$\boxed{\operatorname{Vect}(\varepsilon_4) \text{ est un supplémentaire de } F \text{ dans } \mathbb{R}^4.}$$

Exo II.

3. *Donner une représentation paramétrique de F comportant le moins de paramètres possible.*

Le sous-espace F étant de dimension 3, on peut le représenter paramétriquement à l'aide de 3 paramètres (au minimum), en écrivant que tout vecteur de F est une combinaison des vecteurs d'une base. Or, d'après la question précédente, (u_2, u_3, u_4) est une base de F, donc

$$\boxed{F \text{ est représentée paramétriquement par } \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & = & & & \mu & & \\ y & = & \lambda & - & 4\mu & + & 4\nu \\ z & = & 3\lambda & - & 2\mu & + & 5\nu \\ t & = & & & & & 2\nu \end{array}\right. \quad (\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}).}$$

4. *Déterminer $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : ax + by + cz + dt = 0\}$ (autrement dit tels que $ax + by + cz + dt = 0$ soit une équation cartésienne de F).*

Le sous-espace F étant un hyperplan de $\mathbb{R}^4$, on sait que ses représentations cartésiennes comportent bien une seule équation du type recherché. Pour déterminer a, b, c, d, il suffit d'écrire que les vecteurs u_2, u_3, u_4, qui forment une base de F, satisfont $ax+by+cz+dt = 0$. Cela nous donne le système suivant, que l'on résout (pardi !) avec la méthode du pivot :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} & & \boxed{b} & + & 3c & & & = & 0 \\ \boxed{a} & - & 4b & - & 2c & & & = & 0 \\ & & 4b & + & 5c & + & \boxed{2d} & = & 0 \end{array}\right.$$

ce qui donne, en choisissant c comme paramètre,

$$\left\{\begin{array}{rcr} a & = & -10\alpha \\ b & = & -3\alpha \\ c & = & \alpha \\ d & = & \dfrac{7}{2}\alpha \end{array}\right. \quad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

En posant $\alpha = 2$, on obtient $a = -20$, $b = -6$, $c = 2$ et $d = 7$, donc

$$\boxed{F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : -20x - 6y + 2z + 7t = 0\}.}$$

5. *Soit $v = (a, b, c, d)$ où a, b, c, d ont été déterminés à la question précédente. On note D la droite vectorielle engendrée par v.*

   a) *Montrer que F et D sont en somme directe.*

   On peut traiter cette question sans avoir réussi la précédente !!
   Pour vérifier que $F \cap D = \{\overrightarrow{0}\}$, il suffit de montrer que le vecteur directeur v de D n'appartient pas au plan F, autrement dit que les coordonnées de v ne satisfont pas l'équation cartésienne $ax + by + cz + dt = 0$. Pour le constater, on reporte les coordonnées (a, b, c, d) dans cette équation, ce qui donne $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 0$ et donc $a = b = c = d = 0$ (car tous les termes de cette somme nulle sont positifs) : absurde ! (en effet, a, b, c, d ne sont pas tous nuls, sinon F ne serait pas un hyperplan). Par conséquent, $F \cap D = \{\overrightarrow{0}\}$, ce qui signifie que

   $$\boxed{F \text{ et } D \text{ sont en somme directe.}}$$

   b) *Montrer que F et D sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.*

   Les sous-espaces F et D sont en somme directe et la somme de leurs dimensions, c'est-à-dire respectivement 3 et 1, est égale à la dimension de $\mathbb{R}^4$ (si ! si ! $3 + 1 = 4$), donc, d'après le cours,

   $$\boxed{F \text{ et } D \text{ sont supplémentaires dans } \mathbb{R}^4.}$$

(4) Montrer que la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ converge vers une limite qu'on déterminera.

Puisque la suite (v_n) est strictement positive (facile par récurrence), pour tout $n \in \mathbb{N}^*, 1 + v_n v_{n-1} > 1$ donc

$$v_{n+1} = \frac{1}{1 + v_n v_{n-1}} v_n^2 < v_n^2$$

et

$$\frac{v_{n+1} v_{n-1}}{v_n} = \frac{v_n^2 v_{n-1}}{v_n + v_n^2 v_{n-1}} = \frac{v_n v_{n-1}}{1 + v_n v_{n-1}} = \frac{v_n v_{n-1}}{1 + v_n v_{n-1}} = 1 - \frac{1}{1 + v_n v_{n-1}} < 1$$

donc $v_{n+1} < \dfrac{v_n}{v_{n-1}}$.

Puisque cette suite n'est pas croissante, il existe un entier $p \geq 2$ tel que $v_p < v_{p-1}$ et alors $v_{p+1} < \dfrac{v_p}{v_{p-1}} < 1$. Dès lors, pour $n \geq p+1$, on a

$$0 < v_n \leq (v_{p+1})^{2^{n-p-1}}$$

et $(v_{p+1})^{2^{n-p-1}} = \exp(2^{n-p-1} \ln(v_{p+1})) \longrightarrow 0$ donc $\lim v_n = 0$ par le théorème de convergence par encadrement.

Exercice 2. Dans l'espace vectoriel $\mathbf{R}^3$, on considère les trois triplets $u_1 = (1,0,1)$, $u_2 = (-1,0,1)$ et $u_3 = (1,1,1)$.

(1) Montrer que (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

Les vecteurs u_1 et u_2 ne sont pas colinéaires (clair !) et il est aussi clair que u_3 ne peut être combinaison linéaire de u_1, u_2 (à cause de la coordonnée du milieu, par exemple, puisqu'il n'est pas possible d'obtenir 1 avec des 0). Donc la famille (u_1, u_2, u_3) est libre.

Un système facile à résoudre mène à

$$(x, y, z) = y u_3 + \frac{z - x}{2} u_2 + \frac{x - 2y + z}{2} u_1$$

donc la famille est aussi génératrice. Elle forme donc une base de $\mathbb{R}^3$.

(2) Calculer les coordonnées du vecteurs $v_3 = (2, -3, 1)$ dans cette base.

$$(2, -3, 1) = -3u_3 - \frac{1}{2} u_2 + \frac{9}{2} u_1$$

Exercice 3. Soit F et G les sev de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ définis comme suit :

$$F = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right), \quad G = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

Démontrer que F et G sont supplémentaire dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. On étudie le problème

$$M = x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

qui revient au système

$$\begin{cases} a &= x + t \\ b &= y \\ c &= z \\ d &= -x + t \end{cases}$$

Ce système admet la solution unique (x, y, z, t) où

$$x = \frac{a - d}{2}, \; y = b, \; z = c, \; t = \frac{a + d}{2}.$$

Toute matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ se décompose donc de manière unique en somme d'une matrice de F et d'une matrice de G : les sev F et G sont donc supplémentaires dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Exo III.

%item