DEVOIR SURVEILLE 8

Consignes

- L'énoncé comporte un exercice et un problème.
- Les documents et calculatrices ne sont pas autorisés.
- La présentation, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- Les résultats doivent être mis en valeur.
- Les pages (ou les feuilles) doivent être numérotées.

Exercice

1. Calculer le rang de la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 & -4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 1 & 2 & -4 \\ -1 & 3 & 2 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 6 & -5 \end{pmatrix}.$$

2. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^5$ canoniquement associé à la matrice A.
Déterminer une base du noyau et une base de l'image de f.

Problème

On s'intéresse dans ce problème à la notion d'**affinité** définie de la façon suivante.
Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un espace vectoriel E (*i.e.* si $E = F \oplus G$) et si $k \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, alors on appelle **affinité de base** F**, de direction** G **et de rapport** k l'endomorphisme f de E défini par :

$$\forall x \in F,\ f(x) = x \quad \text{et} \quad \forall x \in G,\ f(x) = k.x.$$

Cela revient à dire que si l'on écrit $x \in E$ sous la forme $x = x_F + x_G$, avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$, alors : $f(x) = x_F + k.x_G$.

Partie 1 - Généralités

1. Montrer qu'une symétrie est une affinité (préciser la base, la direction et le rapport).

2. Est-ce qu'un projecteur est une affinité ?

3. Montrer que si f est l'affinité de base F, de direction G et de rapport k alors on a :

$$F = \ker(f - \mathrm{id}_E) \ \text{ et } \ G = \ker(f - k.\mathrm{id}_E).$$

4. Montrer que si f est l'affinité de base F, de direction G et de rapport k alors :
- f est bijective ;
- f^{-1} est une affinité dont on précisera la base, la direction et le rapport.

Partie 2 - Un exemple dans $\mathbb{R}^2$

5. Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^2$, on considère $F = \mathrm{Vect}\big((1,1)\big)$ et $G = \mathrm{Vect}\big((-1,1)\big)$.
Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$.

6. Soit f l'affinité de $\mathbb{R}^2$ de base F, de direction G et de rapport 2.
Calculer $f\big(x,y\big)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

7. Quelle est la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$?

8. On note p le projecteur de $\mathbb{R}^2$ sur G parallèlement à F.
Quel est le lien entre f et p ?

Exo I.

Partie 3 - Un exemple dans $\mathbb{R}^3$

On se place désormais dans $E = \mathbb{R}^3$ et on considère l'application :

$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y, z) \mapsto \big(x, 3x - 2y, -3x + 3y + z\big).$$

9. Montrer que g est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

10. Quelle est la matrice B de g dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$?

11. Déterminer $F = \ker(g - \mathrm{id}_E)$ et préciser une base puis la dimension.

12. Soit $k \notin \{0, 1\}$ et $G = \ker(g - k.\mathrm{id}_E)$.
Montrer que $G \neq \{(0, 0, 0)\}$ pour exactement une valeur de k ; préciser cette valeur et déterminer alors une base de G.

13. Montrer que F et G sont supplémentaires dans E.

14. Justifier que g est une affinité dont on précisera la base F, la direction G et le rapport.

Partie 4 - Un exemple dans $\mathbb{R}_3[X]$

On se place désormais dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_3[X]$ des polynômes, à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à 3.

15. Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que :

$$F_a = \big\{P \in E\ ;\ P(a) = P'(a) = 0\big\}$$

est un sous-espace vectoriel de E (en préciser une base et la dimension).

16. On considère l'application h qui à un élément P de E associe :

$$h(P) = 2\,(X - 1)^2\big(P(0)(2X + 1) + P'(0)X\big) - P.$$

Montrer que h est un endomorphisme de E.

17. Déterminer la matrice C de h dans la base canonique de $E = \mathbb{R}_3[X]$.

18. Déterminer une base et la dimension de $\ker(h + \mathrm{id}_E)$.

19. Montrer que $\ker(h - \mathrm{id}_E) = F_1$.

20. Déterminer $h \circ h$ et en déduire que h est une affinité.

ECRICOME

CONCOURS D'ADMISSION 2017

prépa

1

Mathématiques

Option Scientifique

Mercredi 12 avril 2017 de 8h00 à 12h00

Durée : 4 heures

Candidats bénéficiant de la mesure « Tiers-temps » :
8h00 – 13h20

L'énoncé comporte 6 pages.

CONSIGNES

Aucun document n'est permis, aucun instrument de calcul n'est autorisé.
Conformément au règlement du concours, l'usage d'appareils communiquants ou connectés est formellement interdit durant l'épreuve.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé et à donner des démonstrations complètes – mais brèves – de leurs affirmations.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Ce document est la propriété d'ECRICOME, le candidat est autorisé à le conserver à l'issue de l'épreuve.

Tournez la page s.v.p.

Exo II.

ECRICOME

EXERCICE 1

On définit sur l'intervalle $\big]0,1\big]$ les deux fonctions $f : x \mapsto x\ln(x)$ et $g : x \mapsto x^x = e^{x\ln(x)}$.

1.(a) Les fonctions f et g admettent-elles des limites en 0 ?

(b) Dresser les tableaux de variations des fonctions f et g sur $]0,1]$.

(c) Justifier que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 g(t)dt$ est convergente. On notera I sa valeur.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$u_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 \big(t\ln(t)\big)^n dt,$$

et :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

(a) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe.

(b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

(c) Calculer u_0 et u_1.

(d) À l'aide d'intégrations par parties successives, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}.$$

(e) Montrer que la série de terme général u_n est convergente.

(f) Écrire une fonction Scilab d'en-tête `function S = somme(n)` qui prend comme paramètre d'entrée un entier naturel n et qui produit en paramètre de sortie la valeur de S_n.

3.(a) À l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange en 0 à l'ordre n appliquée à la fonction exponentielle, montrer que pour tout $x \in \left[-\frac{1}{e}, 0\right]$ et tout entier naturel n :

$$\left|e^x - \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right| \leqslant \frac{1}{e^{n+1}(n+1)!}.$$

(b) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \big|I - S_n\big| \leqslant \frac{1}{e^{n+1}(n+1)!}.$$

(c) Montrer que :

$$I = -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^n}.$$

(d) Écrire une fonction Scilab d'en-tête `function I = estimation(eps)` qui prend comme paramètre d'entrée un réel flottant strictement positif ε et qui produit en paramètre de sortie une valeur approchée de I à ε près.

ECRICOME

EXERCICE 2

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

Pour tout élément $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$, on note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ le vecteur colonne de ses coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

On rappelle que si x est ainsi associé à X et y à Y, le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ est défini par :

$$< x, y >= \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = {}^tXY = {}^tYX,$$

où ${}^tX$ représente la transposée de X.

1. On note J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1.
   (a) Justifier qu'il existe une matrice P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :
   $$J = PD\,{}^tP.$$
   (b) Déterminer le rang de J. En déduire une valeur propre de J ainsi que la dimension du sous-espace propre associé.
   (c) En examinant la trace de J, expliciter la matrice D.
2. On note f la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^n$ par :
   $$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i x_j.$$
   (a) Montrer que pour tout $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$,
   $$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{2}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 - \sum_{k=1}^{n} x_k^2\right].$$
   (b) Déterminer une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :
   $$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ f(x) = {}^tXMX.$$
   (c) Exprimer M comme combinaison linéaire de J et I, où I désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   (d) En déduire qu'il existe une matrice diagonale Δ à déterminer telle que :
   $$M = P\ \Delta\ {}^tP.$$
   (e) Montrer que la fonction f admet un minimum et un maximum sur l'ensemble :
   $$\mathcal{S} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ / \ x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}$$
   et déterminer la valeur minimale et la valeur maximale de f sur $\mathcal{S}$.

3. Dans cette question, A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui est symétrique et dont toutes les valeurs propres sont strictement positives. On note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont A est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
   (a) Justifier que A est diagonalisable et montrer qu'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$.
   On note v l'endomorphisme dont B est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
   (b) À l'aide de v et de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que :
   $$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2, \quad (<x,y>)^2 \quad \leqslant \quad <u(x),x> \times <u^{-1}(y),y>$$
   Pour un $x \in \mathbb{R}^n$ non nul donné, trouver un $y \in \mathbb{R}^n$ non nul tel que cette inégalité soit une égalité.
   (c) En déduire que :
   $$\inf_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ \|x\|=1}} (<u(x),x>) \times (<u^{-1}(x),x>) = 1$$
4. On suppose que $n = 2$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que A est inversible et déterminer A^{-1}.
   (b) Montrer que toutes les valeurs propres de A sont strictement positives.
   (c) En déduire le minimum de la fonction g définie sur $\mathbb{R}^2$ par :
   $$g(x_1,x_2) = (x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2)(2x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2)$$
   sous la contrainte $x_1^2 + x_2^2 = 1$.

PROBLÈME

Toutes les variables aléatoires présentes dans ce problème sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Partie A

Dans toute cette partie, a est un réel strictement positif et g_a est la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_a(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ \dfrac{x}{a^2} e^{-\frac{x^2}{2a^2}} & \text{si } x \geqslant 0. \end{cases}$$

1. Justifier que g_a est une densité de probabilité.
2. Soit Z_a une variable aléatoire admettant g_a pour densité.
   (a) Soit N une variable aléatoire suivant la loi normale centrée et de variance a^2.
   Rappeler une densité de N et donner les valeurs de $E(N)$ et $E(N^2)$.
   (b) Montrer que Z_a admet une espérance et calculer $E(Z_a)$.
   (c) Montrer que Z_a admet une variance et calculer $V(Z_a)$.

Partie B

Pour tout entier n strictement positif, on considère l'expérience suivante : on dispose de n urnes initialement vides, numérotées de 1 à n et on dispose d'un grand stock de boules que l'on dépose une à une dans ces urnes. Pour chaque boule, on choisit au hasard, de façon équiprobable, l'urne dans laquelle la boule est déposée.
On note X_n le rang du premier tirage pour lequel une des urnes contiendra deux boules.

1. Compléter la fonction Scilab suivante pour qu'elle simule une réalisation de la variable aléatoire X_n :

```
function X = tirage(n)
        urnes = zeros(1,n)
        X = 1
        choix = floor((rand()*n))+1
        while ...........
                urnes(choix) = urnes(choix)+1
                choix = floor((rand()*n))+1
                X = ...........
        end
endfunction
```

2. On suppose dans cette question que $n = 1$.
Déterminer la loi de X_1 ainsi que son espérance et sa variance.
3. On suppose dans cette question que $n = 2$.
Déterminer la loi de X_2 ainsi que son espérance et sa variance.
4. On se place ici dans le cas général, n désigne un entier strictement positif.
   (a) Déterminer $X_n(\Omega)$ en justifiant brièvement.
   (b) Montrer que :
$$\forall k \in [\![2, n+1]\!], \quad P(X_n = k) = \frac{n!(k-1)}{n^k(n-k+1)!}.$$
   (c) Montrer que pour tout entier strictement positif n, X_n admet une espérance.
   (d) On souhaite écrire une fonction Scilab qui calcule $E(X_n)$ en fonction de n.
   Compléter la fonction suivante à cet effet :

```
function E = esperance(n)
        facto = prod([1:n])
        fac = facto
        somme = 0
        puissance = n
        for k = 2 : (n+1)
                puissance = ........
                fac = ........
                somme = somme + k*(k-1)/(puissance*fac)
        end
        E = facto * somme
endfunction
```

Partie C

On reprend dans cette partie les variables aléatoires X_n étudiées dans la partie B.
Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $m \in \mathbb{N}$, on pose :

$$\alpha(n,m) = \sum_{k=0}^{m} \ln\left(1 - \frac{k}{n}\right).$$

1. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $\left[0; \frac{1}{2}\right]$,
$$-x - x^2 \leqslant \ln(1-x) \leqslant -x.$$
2. En déduire que pour tout $(n,m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$ tel que $m \leqslant \frac{n}{2}$, on a :
$$-\frac{m(m+1)}{2n} - \frac{m(m+1)(2m+1)}{6n^2} \leqslant \alpha(n,m) \leqslant -\frac{m(m+1)}{2n}.$$
3. On suppose dans cette question que $x \leqslant 0$.
   Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n}P\left(X_n = \lfloor\sqrt{n}x\rfloor\right)\right)$.
4. On suppose dans cette question que x est un réel $x > 0$.
   (a) Donner la limite puis un équivalent simple de $\lfloor\sqrt{n}x\rfloor$ lorsque n tend vers $+\infty$.
   (b) Justifier qu'il existe un entier N tel que :
   $$\forall n \geqslant N, \quad \lfloor\sqrt{n}x\rfloor \leqslant \frac{n}{2}.$$
   (c) Montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in [\![2, n+1]\!],\ P(X_n = k) = \frac{k-1}{n}\prod_{i=0}^{k-2}\left(1 - \frac{i}{n}\right).$$
   (d) En déduire que pour tout $n \geqslant N$, on a :
   $$P(X_n = \lfloor\sqrt{n}x\rfloor) = \frac{\lfloor\sqrt{n}x\rfloor - 1}{n}\exp\left(\alpha(n, \lfloor\sqrt{n}x\rfloor - 2)\right).$$
   (e) Montrer alors que $\sqrt{n}P(X_n = \lfloor\sqrt{n}x\rfloor)$ admet une limite lorsque n tend vers l'infini et déterminer cette limite.

Partie D

On **admettra** dans cette partie le résultat suivant :
Si W est une variable aléatoire et si $(W_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires telles que :

- $\star$ *pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, W_n admet une densité h_n ;*
- $\star$ *la variable W admet une densité h ;*
- $\star$ *pour tout réel x, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} h_n(x) = h(x)$;*

alors, la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers W.

On considère toujours dans cette partie la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires définies dans la partie B. On introduit une variable aléatoire U qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0;1]$, que l'on suppose indépendante des variables aléatoires X_n (pour $n \in \mathbb{N}^*$), et on pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad Y_n = \frac{X_n + U}{\sqrt{n}}.$$

On définit enfin, pour tout entier entier strictement positif, la fonction f_n par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \sqrt{n}\ P\left(X_n = \lfloor \sqrt{n}x \rfloor\right).$$

1.(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{Z}$.
Déterminer l'ensemble des réels x tels que $\lfloor \sqrt{n}x \rfloor = k$.

(b) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est une densité de probabilité.

2.(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{Z}$. Calculer $P(U \leqslant \sqrt{n}x - k)$.
On pourra séparer les cas où $k > \lfloor \sqrt{n}x \rfloor$, $k < \lfloor \sqrt{n}x \rfloor$ et $k = \lfloor \sqrt{n}x \rfloor$.

(b) À l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P(Y_n \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} f_n(t)dt.$$

(c) Justifier que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire Y_n est une variable aléatoire à densité, et que Y_n admet f_n pour densité.

(d) Montrer que la suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire Y à densité dont on précisera la densité.

3.(a) Rappeler l'énoncé du Théorème de Slutsky.

(b) Montrer que la suite de variables aléatoires $\left(\dfrac{X_n}{\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire à densité dont on donnera une densité.

CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLE 8

Exercice

1. Calculer le rang de la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 & -4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 1 & 2 & -4 \\ -1 & 3 & 2 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 6 & -5 \end{pmatrix}.$$

2. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^5$ canoniquement associé à la matrice A.
Déterminer une base du noyau et une base de l'image de f.

1. L'algorithme du pivot de Gauss donne :

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 & -4 \\ 0 & -5 & -5 & -10 & 5 \\ 0 & -8 & -8 & -16 & 8 \\ 0 & 5 & 5 & 10 & -5 \\ 0 & -3 & -3 & -6 & 3 \end{pmatrix},$$

soit :

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 & -4 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

puis :

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 & -4 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

soit $\boxed{\mathrm{rg}(A) = 2.}$

2. On déduit de la question précédent que $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$.
Les colonnes C_1 et C_2 n'étant pas proportionnelles, on en déduit que :

$$\boxed{\big((1,2,3,-1,2),(2,-1,-2,3,1)\big) \text{ est une base de } \mathrm{Im}(f).}$$

Exo I.

Problème

On s'intéresse dans ce problème à la notion d'**affinité** définie de la façon suivante. Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un espace vectoriel E (*i.e.* si $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$) et si $k \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, alors on appelle **affinité de base** F**, de direction** G **et de rapport** k l'endomorphisme f de E défini par :

$$\forall x \in \mathrm{F},\ f(x) = x \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathrm{G},\ f(x) = k.x.$$

Cela revient à dire que si l'on écrit $x \in \mathrm{E}$ sous la forme $x = x_\mathrm{F} + x_\mathrm{G}$, avec $x_\mathrm{F} \in \mathrm{F}$ et $x_\mathrm{G} \in \mathrm{G}$, alors : $f(x) = x_\mathrm{F} + k.x_\mathrm{G}$.

Partie 1 - Généralités

1. Montrer qu'une symétrie est une affinité (préciser la base, la direction et le rapport).

2. Est-ce qu'un projecteur est une affinité ?

3. Montrer que si f est l'affinité de base F, de direction G et de rapport k alors on a :

$$\mathrm{F} = \ker(f - \mathrm{id}_\mathrm{E}) \ \text{ et } \ \mathrm{G} = \ker(f - k.\mathrm{id}_\mathrm{E}).$$

4. Montrer que si f est l'affinité de base F, de direction G et de rapport k alors :

- f est bijective ;
- f^{-1} est une affinité dont on précisera la base, la direction et le rapport.

Partie 2 - Un exemple dans $\mathbb{R}^2$

5. Dans l'espace vectoriel $\mathrm{E} = \mathbb{R}^2$, on considère $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}\big((1,1)\big)$ et $\mathrm{G} = \mathrm{Vect}\big((-1,1)\big)$. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$.

6. Soit f l'affinité de $\mathbb{R}^2$ de base F, de direction G et de rapport 2.
Calculer $f\big(x, y\big)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

7. Quelle est la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$?

8. On note p le projecteur de $\mathbb{R}^2$ sur G parallèlement à F.
Quel est le lien entre f et p ?

1. Si s est la symétrie par rapport à un sous-espace vectoriel F, parallèlement à un sous-espace vectoriel G (avec $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$), alors s correspond à l'affinité de base F, de direction G et de rapport -1.

2. Supposons par l'absurde qu'une affinité p (de base F, de direction G et de rapport k) soit également un projecteur alors la relation $p \circ p = p$ donne en particulier :

$$\forall x \in \mathrm{G},\ p(kx) = kx \text{ puis } k^2 x = kx,$$

ce qui conduit (pour x non nul) à la relation $k^2 = k$. C'est absurde puisque $k \notin \{0; 1\}$. Donc un projecteur ne peut pas être une affinité... sauf si $\mathrm{G} = \{0_\mathrm{E}\}$ auquel cas il s'agit de l'identité de E.

3. Soit $x \in \mathrm{E}$ que l'on écrit $x = x_\mathrm{F} + x_\mathrm{G}$ avec $x_\mathrm{F} \in \mathrm{F}$ et $x_\mathrm{G} \in \mathrm{G}$, alors :

$$\begin{aligned}
x \in \ker(f - \mathrm{id}_\mathrm{E}) &\iff f(x) = x \\
&\iff x_\mathrm{F} + kx_\mathrm{G} = x_\mathrm{F} + x_\mathrm{G} \\
&\iff x_\mathrm{G} = 0_\mathrm{E} \quad (\text{car } k \neq 1) \\
&\iff x \in \mathrm{F}
\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
x \in \ker(f - k\mathrm{id}_\mathrm{E}) &\iff f(x) = kx \\
&\iff x_\mathrm{F} + kx_\mathrm{G} = kx_\mathrm{F} + kx_\mathrm{G} \\
&\iff x_\mathrm{F} = 0_\mathrm{E} \quad (\text{car } k \neq 1) \\
&\iff x \in \mathrm{G}
\end{aligned}$$

donc $\boxed{\mathrm{F} = \ker(f - \mathrm{id}_\mathrm{E}) \text{ et } \mathrm{G} = \ker(f - k.\mathrm{id}_\mathrm{E}).}$

4. Montrons tout d'abord l'injectivité : on considère $x \in \mathrm{E}$ que l'on écrit $x = x_\mathrm{F} + x_\mathrm{G}$ avec $x_\mathrm{F} \in \mathrm{F}$ et $x_\mathrm{G} \in \mathrm{G}$ alors :

$$\begin{aligned}
x \in \ker f &\iff f(x) = 0_\mathrm{E} \\
&\iff \underbrace{x_\mathrm{F}}_{\in \mathrm{F}} + \underbrace{k.x_\mathrm{G}}_{\in \mathrm{G}} = 0_\mathrm{E} = \underbrace{0_\mathrm{E}}_{\in \mathrm{F}} + \underbrace{0_\mathrm{E}}_{\in \mathrm{G}} \\
&\iff x_\mathrm{F} = 0_\mathrm{E} \text{ et } k.x_\mathrm{G} = 0_\mathrm{E} \quad (\text{unicité de l'écriture dans une somme directe}) \\
&\iff x_\mathrm{F} = 0_\mathrm{E} \text{ et } x_\mathrm{G} = 0_\mathrm{E} \qquad (\text{car } k \neq 0) \\
&\iff x = 0_\mathrm{E}
\end{aligned}$$

donc $\ker f = \{0_\mathrm{E}\}$ donc f est injective.

Ainsi, tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, s'écrit :

$$(x, y) = \underbrace{\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}\right)}_{\in \mathrm{F}} + \underbrace{\left(\frac{x-y}{2}, \frac{-x+y}{2}\right)}_{\in \mathrm{G}},$$

d'où :

$$f(x, y) = \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}\right) + 2\left(\frac{x-y}{2}, \frac{-x+y}{2}\right)$$

soit :

$$\boxed{f(x, y) = \left(\frac{3x-y}{2}, \frac{-x+3y}{2}\right).}$$

7. $\boxed{\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.}$

8. Soit $x \in \mathrm{E}$, on écrit $x = x_{\mathrm{F}} + x_{\mathrm{G}}$ avec $x_{\mathrm{F}} \in \mathrm{F}$ et $x_{\mathrm{G}} \in \mathrm{G}$, alors :

$$\begin{aligned} f(x) &= x_{\mathrm{F}} + 2x_{\mathrm{G}} \\ &= (x_{\mathrm{F}} + x_{\mathrm{G}}) + x_{\mathrm{G}} \\ &= \mathrm{id}_{\mathrm{E}}(x) + p(x), \end{aligned}$$

donc : $\boxed{f = \mathrm{id}_{\mathrm{E}} + p.}$

On peut bien entendu retrouver cela par le calcul :

$$\left(\frac{3x-y}{2}, \frac{-x+3y}{2}\right) = (x, y) + \left(\frac{x-y}{2}, \frac{-x+y}{2}\right).$$

9. La fonction g est définie sur $\mathrm{E} = \mathbb{R}^3$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^3$, montrons qu'elle est linéaire : soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \in \mathrm{E}^2$, on note $\mathrm{X} = (x, y, z)$ et $\mathrm{Y} = (x', y', z')$ alors :

$$\begin{aligned} g(\lambda.\mathrm{X} + \mathrm{Y}) &= g\big(\lambda.(x, y, z) + (x', y', z')\big) \\ &= g(\lambda.x + x', \lambda.y + y', \lambda.z + z') \\ &= \big(\lambda.x + x', 3(\lambda.x + x') - 2(\lambda.y + y'), \\ &\qquad\qquad -3(\lambda.x + x') + 3(\lambda.y + y') + (\lambda.z + z')\big) \\ &= \lambda.\big(x, 3x - 2y, -3x + 3y + z\big) + \big(x', 3x' - 2y', -3x' + 3y' + z'\big) \\ &= \lambda.g(x, y, z) + g(x', y', z') \\ &= \lambda.g(\mathrm{X}) + g(\mathrm{Y}) \end{aligned}$$

donc $\boxed{g \in \mathscr{L}(\mathrm{E}).}$

10.

11. S

12. Soit $(x,y,z)\in \mathrm{E}$, on a :

$$\begin{aligned}(x,y,z)\in \mathrm{G} &\iff (x,y,z)\in \ker(g-k.\mathrm{id}_{\mathrm{E}})\\
&\iff (g-k.\mathrm{id}_{\mathrm{E}})(x,y,z)=0_{\mathbb{R}^3}\\
&\iff g(x,y,z)=k.(x,y,z)\\
&\iff (x,3x-2y,-3x+3y+z)=(k.x,k.y,k.z)\\
&\iff \begin{cases}(1-k).x=0\\ 3.x-(k+2).y=0\\ -3.x+3.y+(1-k).z=0\end{cases}\\
&\iff \begin{cases}x=0\\ (k+2).y=0\\ 3.y+(1-k).z=0\end{cases}\qquad \text{car } k\notin\{0;1\}.\end{aligned}$$

Si $k+2\neq 0$ alors on aboutit à :

$$(x,y,z)\in \mathrm{G}\iff x=y=z=0.$$

Si $k=-2$ alors

$$\begin{aligned}(x,y,z)\in \mathrm{G} &\iff \begin{cases}x=0\\ 3y+3z=0\end{cases}\\
&\iff (x,y,z)=(0,y,-y)=y.(0,1,-1).\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\mathrm{G}=\{(0,0,0)\} \text{ pour } k\neq -2 \text{ et } \mathrm{G}=\mathrm{Vect}\big((0,1,-1)\big) \text{ pour } k=-2.}$

On peut aussi raisonner matriciellement (en exploitant le fait que $k\neq 1$) :

$$\begin{aligned}\mathrm{G}\neq\{(0,0,0)\} &\iff \mathrm{rg}(\mathrm{B}-k\,\mathrm{I}_3)<3\\
&\iff \mathrm{rg}\begin{pmatrix}1-k & 0 & 0\\ 3 & -2-k & 0\\ -3 & 3 & 1-k\end{pmatrix}<3\\
&\iff k\in\{1;-2\}\\
&\iff k=-2.\end{aligned}$$

On considère alors la matrice :

$$\mathrm{B}-(-2)\,\mathrm{I}_3=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 3 & 0 & 0\\ -3 & 3 & 3\end{pmatrix}.$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(P, Q) \in \mathbb{R}_3[X]$ alors

$$\begin{aligned} h(\lambda.P+Q) &= 2(X-1)^2\big((\lambda.P+Q)(0)(2X+1)+(\lambda.P+Q)'(0)X\big)-(\lambda.P+Q) \\ &= 2(X-1)^2\big(\lambda.P(0)(2X+1)+Q(0)(2X+1)+\lambda.P'(0)X+Q'(0)X\big)-\lambda.P-Q \\ &= \lambda.\Big(2(X-1)^2\big(P(0)(2X+1)+P'(0)X\big)-P\Big) \\ &\qquad\qquad + \Big(2(X-1)^2\big(Q(0)(2X+1)+Q'(0)X\big)-Q\Big) \\ &= \lambda.h(P)+h(Q) \end{aligned}$$

donc $\boxed{h \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_3[X]).}$

17. On a :

$$h(1) = 2\,(X-1)^2(2X+1)-1 = 4X^3-6X^2+1,$$

$$h(X) = 2\,(X-1)^2X - X = 2X^3-4X^2+X,$$

$$h(X^2) = -X^2 \;\text{ et }\; h(X^3) = -X^3.$$

On a donc : $\boxed{C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -6 & -4 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.}$

18. Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$ alors

$$\begin{aligned} P \in \ker(h+\mathrm{id}_E) &\iff h(P)+P = 0_{\mathbb{R}_3[X]} \\ &\iff 2(X-1)^2\left[P(0)(2X+1)+P'(0)X\right]-P(X)+P(X) = 0_{\mathbb{R}_3[X]} \\ &\iff 2(X-1)^2\left[P(0)(2X+1)+P'(0)X\right] = 0_{\mathbb{R}_3[X]} \\ &\iff P(0)(2X+1)+P'(0)X = 0_{\mathbb{R}_3[X]} \end{aligned}$$

d'où, en notant $P = \alpha_0+\alpha_1X+\alpha_2X^2+\alpha_3X^3$:

$$\begin{aligned} P \in \ker(h+\mathrm{id}_E) &\iff \alpha_0(2X+1)+\alpha_1X = 0_{\mathbb{R}_3[X]} \\ &\iff (2\alpha_0+\alpha_1)X+\alpha_0 = 0_{\mathbb{R}_3[X]} \\ &\iff \alpha_0 = \alpha_1 = 0 \\ &\iff P = \alpha_2X^2+\alpha_3X^3 \end{aligned}$$

donc $\ker(h+\mathrm{id}_E) = \mathrm{Vect}(X^2, X^3)$ or X^2 et X^3 ne sont pas proportionnels, donc (X^2, X^3) est une famille libre, donc c'est une base de $\ker(h+\mathrm{id}_E)$ et on a $\dim\ker(h+\mathrm{id}_E) = 2$.

20. Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$, on pose $Q = h(P)$ alors

$$Q(X) = 2(X-1)^2\left[P(0)(2X+1) + P'(0)X\right] - P(X)$$

donc

$$Q'(X) = 4(X-1)\left[P(0)(2X+1) + P'(0)X\right] + 2(X-1)^2\left[2P(0) + P'(0)\right] - P'(X)$$

d'où $Q(0) = P(0)$ et $Q'(0) = P'(0)$ puis

$$\begin{aligned} h(Q) &= 2(X-1)^2\left[Q(0)(2X+1) + Q'(0)X\right] - Q(X) \\ &= 2(X-1)^2\left[P(0)(2X+1) + P'(0)X\right] - 2(X-1)^2\left[P(0)(2X+1) + P'(0)X\right] + P(X) \\ &= P(X) \end{aligned}$$

i.e. $h\big(h(P)\big) = P$ donc h est une symétrie et, d'après la première question, c'est donc l'$\boxed{\text{affinité de base } F_0 = \ker(h - \mathrm{id}_E), \text{ de direction } F_1 = \ker(h + \mathrm{id}_E) \text{ et de rapport } -1.}$

Matriciellement, il suffit de remarquer que $C^2 = I_4$ pour obtenir que h est une symétrie.

ECRICOME 2017 S

Éléments de correction

Premier exercice

1. **a.** La fonction f admet pour limite 0 en 0 d'après les théorèmes de croissances comparées. Par continuité de la fonction exponentielle, la fonction g admet alors 1 pour limite en 0.

   b. On obtient immédiatement le tableau de variations de f en étudiant le signe de sa dérivée. Celui de g s'en déduit par croissance de la fonction exponentielle.

x	0		$\mathbf{e}^{-1}$		1
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
f	|| 0	$\searrow$	$-\mathbf{e}^{-1}$	$\nearrow$	0
g	|| 1	$\searrow$	$\mathbf{e}^{-\mathbf{e}^{-1}}$	$\nearrow$	1

   c. La fonction g admettant une limite finie en 0, elle est prolongeable par continuité au segment $[0,1]$, si bien que son intégrale $\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

2. **a.** Pour $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $u_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 (t\ln t)^n\,\mathrm{d}t$ converge pour les mêmes raisons qu'en **1.c.**.

   b. D'après les variations de f obtenues en **1.b.**, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant \frac{1}{n!}\int_0^1 |t\ln t|^n\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n!}\int_0^1 \mathbf{e}^{-n}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathbf{e}^{-n}}{n!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

   d'où l'on déduit par encadrement que (u_n) converge vers 0.

   c. Le calcul de $u_0 = 1$ est immédiat, celui de u_1 peut être fait par intégration par parties : sachant les intégrales (et le crochet) convergents,

$$u_1 = \int_0^1 t\ln t\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2}\ln t\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t}{2}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{4}.$$

   d. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on obtient de même par intégration par parties :

$$\forall k \in [\![1,n]\!], \quad \int_0^1 t^n(\ln t)^k\,\mathrm{d}t = -\frac{k}{n+1}\int_0^1 t^n(\ln t)^{k-1}\,\mathrm{d}t$$

   d'où l'on déduit, par récurrence sur k, que :

$$\forall k \in [\![0,n]\!], \quad \int_0^1 t^n(\ln t)^k\,\mathrm{d}t = \frac{(-1)^k k!}{(n+1)^k}\int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t = \frac{(-1)^k k!}{(n+1)^{k+1}}.$$

   En particulier,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 (t\ln t)^n\,\mathrm{d}t = \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}.$$

   e. On peut utiliser l'une des trois inégalités ci-dessous (la première a été obtenue en **b.** et les deux suivantes résultent de la formule établie en **d.**)

$$|u_n| \leqslant \frac{\mathbf{e}^{-n}}{n!}, \quad |u_n| \leqslant \frac{1}{n^2}, \quad |u_n| \leqslant \frac{1}{2^n}$$

   valables pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour justifier la convergence absolue de la série $\sum u_n$ par comparaison à une série exponentielle, de Riemann ou géométrique convergente.

Exo II.

f. On peut proposer un code itératif :

Listing 1 : Calcul de S_n, version itérative

```
function S=somme(n)
  S=0;
  for k=0:n
    S=S+(-1)^k/(k+1)^(k+1);
  end
endfunction
```

ou matriciel :

Listing 2 : Calcul de S_n, version matricielle

```
function S=somme(n)
  k=0:n;
  S=sum((-1).^k./(k+1).^(k+1));
endfunction
```

3. a. Pour $x \in [-\frac{1}{\mathbf{e}}, 0]$ et $n \in \mathbb{N}$, la fonction exp est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur le segment $[x, 0]$ avec :

$$\forall t \in [x, 0], \quad \left|\exp^{(n+1)} t\right| = \mathbf{e}^t \leqslant 1 = \mathrm{M}.$$

D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à l'ordre n à la fonction exp entre 0 et x, on a donc :

$$\left|\mathbf{e}^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right| = \left|\exp x - \sum_{k=0}^{n} \frac{\exp^{(k)} 0}{k!} x^k\right| \leqslant \frac{\mathrm{M}^{n+1}}{(n+1)!} |x|^{n+1} \leqslant \frac{1}{\mathbf{e}^{n+1}(n+1)!}.$$

b. En appliquant l'inégalité de la question **a.** à $x = f(t)$, qui appartient à $[-\frac{1}{e}, 0]$ lorsque $t \in]0, 1]$ d'après **1.b.**, on obtient :

$$|\mathrm{I} - \mathrm{S}_n| = \left|\int_0^1 \left(\mathbf{e}^{t \ln t} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(t \ln t)^k}{k!}\right) \mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^1 \left|\mathbf{e}^{t \ln t} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(t \ln t)^k}{k!}\right| \mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{\mathbf{e}^{n+1}(n+1)!}.$$

c. Le membre de droite dans l'inégalité de la question **b.** convergeant vers 0, on en déduit par encadrement que (S_n) converge vers I, i.e. d'après **2.d.** et par décalage d'indice que :

$$\mathrm{I} = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(k+1)^{k+1}} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^n}.$$

d. D'après la question **b.**, pour que S_n soit une valeur approchée de I à une précision $\varepsilon > 0$ donnée, i.e. pour que $|\mathrm{I} - \mathrm{S}_n| \leqslant \varepsilon$, il suffit d'avoir $\frac{1}{\mathbf{e}^{n+1}(n+1)!} \leqslant \varepsilon$. On peut donc propose le code ci-dessous :

Listing 3 : Valeur approchée de I à une précision donnée

```
function I=estimation(eps)
  n=0;
  e=exp(-1);
  x=e;
  while (x>eps)
    n=n+1;
    x=x*e/(n+1);
  end
  I=somme(n);
endfunction
```

On calcule les premiers termes $x_n = \frac{1}{\mathbf{e}^{n+1}(n+1)!}$ jusqu'à avoir $x_n \leqslant \varepsilon$ puis on calcule la valeur de S_n correspondante.

Deuxième exercice

1. a. La matrice J étant symétrique réelle, elle ortho-diagonalisable : il existe une matrice $P \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ orthogonale et une matrice D diagonale telles que ${}^t\mathrm{PJP} = \mathrm{D}$ i.e. $\mathrm{J} = \mathrm{PD}{}^t\mathrm{P}$.

b. Les colonnes de J étant égales et non nulles, elles engendrent une droite : la matrice J est donc de rang 1. Le théorème du rang appliqué à l'endomorphisme (de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$!) canoniquement associé à J assure alors que $\dim \operatorname{Ker} \mathrm{J} = n - \operatorname{rg} \mathrm{J} = n - 1 > 0$. Ainsi 0 est valeur propre de J et le sous-espace propre associé est de dimension $n - 1$.

c. Les matrices D et J, semblables puisque P est orthogonale, ont même rang et même trace. Ainsi un seul coefficient diagonal de D n'est pas nul, qui constitue la dernière valeur propre λ de J. Celle-ci est donnée par la trace : $\lambda = \operatorname{tr} \mathrm{D} = \operatorname{tr} \mathrm{J} = n$. Quitte à réordonner les colonnes de P, on peut donc supposer que D est la matrice $\operatorname{diag}(0, \dots, 0, n)$.

2. a. On a en effet

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \Big(\sum_{i=1}^n x_i\Big)^2 = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} x_i x_j = \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{1 \leqslant i \neq j \leqslant n} x_i x_j = \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i x_j,$$

d'où le résultat.

b. La matrice

$$\mathrm{M} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}),$$

de coefficient générique

$$m_{i,j} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } i \neq j \\ 0 & \text{si } i = j \end{cases}, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant n,$$

convient.

Remarque. La question **c.** montre que la matrice M attendue doit être symétrique, même si ce n'est pas explicite dans l'énoncé de la question **b.**.

c. On a immédiatement $\mathrm{M} = \frac{1}{2}\mathrm{J} - \frac{1}{2}\mathrm{I}$.

d. D'après **1.a.** et **c.**, sachant P orthogonale, il vient :

$$\mathrm{M} = \frac{1}{2}\mathrm{PD}{}^t\mathrm{P} - \frac{1}{2}\mathrm{P}{}^t\mathrm{P} = \mathrm{P}\Delta{}^t\mathrm{P}$$

où

$$\Delta = \frac{1}{2}\mathrm{D} - \frac{1}{2}\mathrm{I} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & -1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & n-1 \end{pmatrix}.$$

e. Trois méthodes sont envisageables, la première étant la plus pertinente ici car elle s'appuie sur les questions précédentes.

- *Méthode 1 :* en utilisant la diagonalisation de M
  D'après **b.** et **d.**,

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad f(x) = {}^t\mathrm{XP}\Delta{}^t\mathrm{PX} = {}^t({}^t\mathrm{PX})\Delta({}^t\mathrm{PX}) = {}^t\mathrm{Y}\Delta\mathrm{Y} = \frac{n}{2}y_n^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n y_i^2$$

  où $\mathrm{Y} = {}^t\mathrm{PX} = {}^t\begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \end{pmatrix}$. Or, sachant P orthogonale, on a

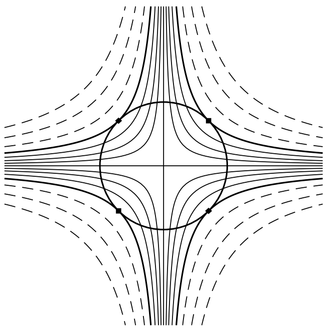
$$\sum_{i=1}^n y_i^2 = {}^t\mathrm{YY} = {}^t\mathrm{XX} = \sum_{i=1}^n x_i^2$$

  si bien que $x \in \mathcal{S}$ équivaut à $y \in \mathcal{S}$. Comme $y_n^2 \leqslant {}^t\mathrm{YY}$ avec égalité lorsque $y_1 = \cdots = y_{n-1} = 0$,

$$\forall x \in \mathcal{S}, \quad -\frac{1}{2} \leqslant f(x) = \frac{n}{2}y_n^2 - \frac{1}{2} \leqslant \frac{n-1}{2}$$

  avec égalité à gauche (resp. à droite) pour $y_n = 0$ c'est-à-dire lorsque $\mathrm{X} \in \mathcal{S}$ est propre pour M associé à la valeur propre $-\frac{1}{2}$ (resp. pour $y_1 = \cdots = y_{n-1} = 0$ c'est-à-dire lorsque $X \in \mathcal{S}$ est propre pour M associé à la valeur propre $\frac{n-1}{2}$). D'où l'existence d'un minimum et d'un maximum pour f sur $\mathcal{S}$, respectivement égaux à $-\frac{1}{2}$ et $\frac{n-1}{2}$.

- *Méthode 2 :* en faisant intervenir un problème d'optimisation sous contrainte
L'ensemble $\mathcal{S}$ est défini comme ligne de niveau 1 de la fonction $\varphi : x \longmapsto x_1^2 + \cdots + x_n^2$ continue sur $\mathbb{R}^n$. À ce titre, c'est une partie fermée de $\mathbb{R}^n$. Elle est également bornée car incluse dans la boule unité, et non vide. La fonction f, qui y est continue, y admet donc un minimum et un maximum.
Pour compléter l'analyse précédente, la fonction φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^n$ telle que $\nabla\varphi(x) = 2x \neq 0$ pour tout $x \in \mathcal{S}$: l'ensemble $\mathcal{S}$ est donc une contrainte non critique.
Classiquement, la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^n$, avec $\nabla f(x) = 2\mathrm{MX}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Les extremums de f sous la contrainte $\mathcal{S}$ sont donc atteints en des points $x \in \mathcal{S}$ pour lesquels existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\nabla f(x) = \lambda\nabla\varphi(x)$, c'est-à-dire $\mathrm{MX} = \lambda \mathrm{X}$. Pour un tel vecteur X, unitaire et propre pour M associé à la valeur propre λ, on a $f(x) = \lambda$. L'existence des minimum et maximum de f sous la contrainte $\mathcal{S}$ étant acquise, ils sont respectivement égaux à la plus petite et la plus grande des deux valeurs propres de M : $-\frac{1}{2}$ et $\frac{n-1}{2}$.
Remarque. Si cette méthode est inutilement compliquée ici (le calcul de $\nabla f(x)$ n'a pas été détaillé), elle permet de vérifier rapidement sur un dessin les résultats obtenus avec la méthode précédente dans le cas $n = 2$.



La contrainte (en gras) est tangente aux lignes de f aux niveaux $\pm\frac{1}{2}$(en gras), qui sont les niveaux extremaux correspondant à des lignes de f (en traits pleins) qui intersectent la contrainte.

- *Méthode 3 :* en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz
En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$ euclidien canonique aux vecteurs $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(1, \ldots, 1)$, il vient :
$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \Big(\sum_{i=1}^n x_i\Big)^2 \leqslant n\sum_{i=1}^n x_i^2$$
d'où,
$$\forall x \in \mathcal{S}, \quad -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n x_i^2 \leqslant \frac{1}{2}\Big[\Big(\sum_{i=1}^n x_i\Big)^2 - \sum_{i=1}^n x_i^2\Big] \leqslant \frac{n-1}{2}\sum_{i=1}^n x_i^2 = \frac{n-1}{2}$$
avec égalité à gauche pour $x = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0, \ldots, 0)$ et à droite (en utilisant le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz) pour $x = \frac{1}{\sqrt{n}}(1, \ldots, 1)$. D'où l'existence d'un minimum et d'un maximum pour f sur $\mathcal{S}$, respectivement égaux à $-\frac{1}{2}$ et $\frac{n-1}{2}$.

3. a. La matrice A, symétrique réelle, est ortho-diagonalisable : il existe $Q \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ orthogonale et $D \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale telles que $A = QDQ^{-1}$. Les coefficients diagonaux $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de D, qui sont aussi les valeurs propres de A, sont strictement positifs par hypothèse. En posant $\Delta = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})$ et $B = Q\Delta Q^{-1}$, on a alors $B^2 = Q\Delta^2 Q^{-1} = QDQ^{-1} = A$.
Par ailleurs, et même si ce n'est pas demandé dans l'énoncé, cette matrice B est symétrique car Q est orthogonale : ${}^tB = {}^t(Q\Delta{}^tQ) = Q{}^t\Delta{}^tQ = Q\Delta{}^tQ = B$. On note également qu'elle est inversible car ses valeurs propres sont non nulles.

b. Les endomorphismes u et v, représentés en base canonique, orthonormale, par des matrices A et B symétriques, sont symétriques. Ils sont par ailleurs bijectifs car A et B sont inversibles.
Pour $x \in \mathbb{R}^n$, on a donc
$$\langle u(x), x\rangle = \big\langle v\big(v(x)\big), x\big\rangle = \langle v(x), v(x)\rangle = \|v(x)\|^2.$$

Par suite, pour $y \in \mathbb{R}^n$ et $z = u^{-1}(y) = v^{-2}(y)$, on a également
$$\left\langle u^{-1}(y), y \right\rangle = \langle z, u(z) \rangle = \|v(z)\|^2 = \left\|v^{-1}(y)\right\|^2.$$
L'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée aux vecteurs $v(x)$ et $v^{-1}(y)$ donne alors l'inégalité attendue :
$$\langle x, y \rangle^2 = \left\langle x, v\big(v^{-1}(y)\big) \right\rangle^2 = \left\langle v(x), v^{-1}(y) \right\rangle^2 \leqslant \|v(x)\|^2 \left\|v^{-1}(y)\right\|^2 = \langle u(x), x \rangle \left\langle u^{-1}(y), y \right\rangle.$$
Pour $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ donné, l'inégalité ci-dessus est une égalité lorsque la famille $\big(v(x), v^{-1}(y)\big)$ est liée. L'endomorphisme v étant bijectif, cela signifie que la famille $\big(u(x), y\big)$ est liée. C'est en particulier le cas pour $y = u(x)$, non nul par injectivité de u.

c. D'après la question **b.** avec $y = x$, on a :
$$\forall x \in \mathcal{S}, \quad 1 = \|x\|^2 \leqslant \langle u(x), x \rangle \left\langle u^{-1}(x), x \right\rangle$$
avec égalité lorsque x est vecteur propre de u. Comme u admet des vecteurs propres unitaires, il en ressort que
$$\min_{x \in \mathcal{S}} \langle u(x), x \rangle \left\langle u^{-1}(x), x \right\rangle = 1.$$

4. a. La matrice A, carrée d'ordre 2 de déterminant $1 \neq 0$, est inversible, d'inverse
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

b. Les valeurs propres de A sont les réels λ pour lesquels la matrice
$$A - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$
n'est pas inversible, i.e. pour lesquels $\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0$. Il s'agit donc des réels $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$, tous deux strictement positifs.

c. D'après la question **b.**, la matrice A satisfait les hypothèses de la question **3.**. En conservant les mêmes notations,
$$\begin{aligned} \forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad g(x) &= (x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2)(2x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2) \\ &= ({}^t\!XAX)({}^t\!XA^{-1}X) = \langle u(x), x \rangle \left\langle u^{-1}(x), x \right\rangle. \end{aligned}$$
D'après la question **3.c.** (plus précisément, d'après la réponse apportée, plus précise que ce qui était demandé : la borne inférieure est atteinte), la fonction g admet donc sous la contrainte $x_1^2 + x_2^2 = 1$, équivalente à $\|x\| = 1$, un minimum égal à 1.

Problème

Première partie

1. La fonction g_a est positive sur $\mathbb{R}$, continue sauf peut-être en 0 avec, pour $y < 0 < z$,
$$\int_y^z g_a(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^z \frac{x}{a^2}\mathbf{e}^{-x^2/(2a^2)}\,\mathrm{d}x = \left[-\mathbf{e}^{-x^2/(2a^2)}\right]_0^z = 1 - \mathbf{e}^{-z^2/(2a^2)} \xrightarrow[\substack{y \to -\infty \\ z \to +\infty}]{} 1,$$
d'où l'on déduit la convergence et la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} g_a(x)\,\mathrm{d}x = 1$, ce qui achève de prouver que g_a est une densité de probabilité.

2. a. La variable N a pour densité $x \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{1}{a\sqrt{2\pi}}\mathbf{e}^{-x^2/(2a^2)}$, pour moments $\mathbb{E}(N) = 0$ et $\mathbb{E}(N^2) = \mathbb{V}(N) = a^2$.

b. Par parité,
$$a^2 = \mathbb{E}(N^2) = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \mathbf{e}^{-x^2/(2a^2)}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{a\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} x^2 \mathbf{e}^{-x^2/(2a^2)}\,\mathrm{d}x$$

d'où la convergence et la valeur de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x g_a(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a^2}\int_0^{+\infty} x^2 \mathbf{e}^{-x^2/(2a^2)}\,\mathrm{d}x = a\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

La variable Z_a admet donc une espérance égale à $\mathbb{E}(Z_a) = a\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

c. Par changement de variable $y \longmapsto x = a\sqrt{2y}$, de classe $\mathscr{C}^1$ et strictement croissant de $]0,+\infty[$ sur lui-même, on justifie la convergence absolue et on calcule la valeur de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 g_a(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{x^3}{a^2}\mathbf{e}^{-x^2/(2a^2)}\,\mathrm{d}x = 2a^2\int_0^{+\infty} y\mathbf{e}^{-y}\,\mathrm{d}y = 2a^2\Gamma(2) = 2a^2.$$

Ceci établit l'existence de $\mathbb{E}(Z_a^2) = 2a^2$, d'où l'on déduit que Z_a admet pour variance

$$\mathbb{V}(Z_a) = \mathbb{E}(Z_a^2) - \mathbb{E}(Z_a)^2 = \frac{(4-\pi)a^2}{2}.$$

Deuxième partie

1. L'instruction `floor(n*rand())+1` simule la loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$.

Listing 4 : Simulation de X_n

```
function X=tirage(n)
  urnes=zeros(1,n);
  X=1;
  choix=floor(n*rand())+1; // choix d'une urne
  while (urnes(choix)<1)
      // on continue si l'urne choisie ne contient aucune boule
    urnes(choix)=urnes(choix)+1;
    choix=floor(n*rand())+1; // choix d'une urne
    X=X+1; // on incrémente le nombre de boules réparties
  end
endfunction
```

2. Pour $n = 1$, toutes les boules sont placées dans l'unique urne. La variable X_1 est donc certaine égale à 2. Elle admet pour espérance $\mathbb{E}(X_1) = 2$ et pour variance $\mathbb{V}(X_1) = 0$.

3. Soit Y la variable aléatoire qui donne le nombre de boules, parmi les deux premières, placées dans l'urne 1. Cette variable compte le nombre de succès (choisir l'urne 1) dans une suite de 2 épreuves de Bernoulli (choisir une urne) indépendantes et de même paramètre $\frac{1}{2}$. Elle suit donc la loi binomiale $\mathcal{B}(2,\frac{1}{2})$.
La variable X_2 prend deux valeurs : 2 si les deux premières boules sont placées dans la même urne et 3 sinon. Dans ces conditions,

$$\mathbb{P}(X_2 = 2) = \mathbb{P}(Y \in \{0,2\}) = \mathbb{P}(Y=0) + \mathbb{P}(Y=2) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_2 = 3) = \mathbb{P}(Y=1) = \frac{1}{2}.$$

La variable X_2 suit donc la loi uniforme sur $\{2,3\}$: elle s'écrit $X_2 = 2 + Z$ où Z suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(\frac{1}{2})$. Elle admet donc pour espérance $\mathbb{E}(X_2) = 2 + \mathbb{E}(Z) = \frac{5}{2}$ et pour variance $\mathbb{V}(X_2) = \mathbb{V}(Z) = \frac{1}{4}$.

4. a. Il faut placer au moins deux boules pour qu'une urne soit susceptible de contenir deux boules... Par ailleurs, une fois réparties $n+1$ boules parmi les n urnes, l'une au moins des urnes contient au moins deux boules. Ceci justifie l'inclusion $X_n(\Omega) \subset [\![2,n+1]\!]$. Réciproquement, pour un entier $k \in [\![2,n+1]\!]$, l'événement $[X_n = k]$ est réalisé en plaçant successivement une boule dans chacune des urnes $1,2,\dots,k-1$ puis en plaçant la k-ième boule dans l'urne $k-1$. On a donc $X_n(\Omega) = [\![2,n+1]\!]$.

b. Soient $N_1, N_2, \dots, N_{n+1}$ les variables aléatoires donnant respectivement les numéros des urnes dans lesquelles sont successivement placées les $n+1$ premières boules.
Pour $k \in [\![2,n+1]\!]$, le vecteur $V_k = (N_1, N_2, \dots, N_k)$ prend ses valeurs uniformément dans l'ensemble $[\![1,n]\!]^k$: par indépendance des variables $N_1, \dots, N_k$, la loi conjointe du vecteur V_k est le produit des lois marginales des N_i, toutes uniformes sur $[\![1,n]\!]$. En d'autres termes,

$$\forall v = (n_1, \dots, n_k) \in [\![1,n]\!]^k, \quad \mathbb{P}(V_k = v) = \frac{1}{n^k}.$$

L'événement $[X_n = k]$ est réalisé si, et seulement si, les $k-1$ premières boules sont dans des urnes distinctes et la k-ième dans l'une de ces $k-1$ premières urnes. Ainsi $[X_n = k] = [V_k \in \mathcal{V}_k^n]$ où $\mathcal{V}_k^n$ est l'ensemble des k-uplets $v = (n_1, \ldots, n_k) \in [\![1, n]\!]^k$ tels que $n_1, \ldots, n_{k-1}$ sont deux-à-deux distincts et $n_k \in \{n_1, \ldots, n_{k-1}\}$. Cet ensemble est de cardinal $n(n-1)\cdots(n-k+2)(k-1) = \frac{n!}{(n-k+1)!}(k-1)$. Par suite,

$$\mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{P}(V_k \in \mathcal{V}_k^n) = \sum_{v \in \mathcal{V}_k^n} \mathbb{P}(V = v) = \frac{1}{n^k} \# \mathcal{V}_k^n = \frac{n!(k-1)}{n^k(n-k+1)!}.$$

c. La variable X_n étant finie, elle admet pour espérance

$$\mathbb{E}(X_n) = \sum_{k \in X_n(\Omega)} k\, \mathbb{P}(X_n = k) = n! \sum_{k=2}^{n+1} \frac{k(k-1)}{n^k(n-k+1)!}.$$

d. Le code ci-dessous permet un calcul itératif de la somme ci-dessus.

Listing 5 : Calcul de $\mathbb{E}(X_n)$

```
function E=esparance(n)
  facto=prod(1:n);
  fac=facto;
  somme=0;
  puissance=n;
  for k=2:(n+1)
    puissance=puissance*n;
    fac=fac/(n-k+2);
    somme=somme+k*(k-1)/(puissance*fac);
  end
  E=facto*somme;
endfunction
```

Troisième partie

1. L'inégalité de droite peut être justifiée classiquement par un argument de convexité et celle de gauche par l'étude de la fonction $x \longmapsto \ln(1-x) + x + x^2$ sur l'intervalle $[0, \frac{1}{2}]$.
On peut ici justifier les deux en observant que :

$$\forall x \in]-\infty, 1[, \quad -\ln(1-x) - x = \big[-\ln(1-t) - t\big]_0^x = \int_0^x \Big(\frac{1}{1-t} - 1\Big)\, \mathrm{d}t = \int_0^x \frac{t}{1-t}\, \mathrm{d}t$$

d'où :

$$\forall x \in \Big[0, \frac{1}{2}\Big], \quad 0 \leqslant -\ln(1-x) - x \leqslant 2\int_0^x t\, \mathrm{d}t = x^2,$$

ce qui conduit immédiatement au résultat.

2. Soit $(n, m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$ tel que $m \leqslant \frac{n}{2}$. Pour $k \in [\![0, m]\!]$, on a $0 \leqslant \frac{k}{n} \leqslant \frac{k}{2m} \leqslant \frac{1}{2}$ d'où, d'après **1.**,

$$\forall k \in [\![0, m]\!], \quad -\frac{k}{n} - \frac{k^2}{n^2} \leqslant \ln\Big(1 - \frac{k}{n}\Big) \leqslant -\frac{k}{n}$$

puis :

$$-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^m k - \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^m k^2 \leqslant \sum_{k=0}^m \ln\Big(1 - \frac{k}{n}\Big) \leqslant -\frac{1}{n}\sum_{k=0}^m k$$

c'est-à-dire

$$-\frac{m(m+1)}{2n} - \frac{m(m+1)(2m+1)}{6n^2} \leqslant \alpha(n, m) \leqslant -\frac{m(m+1)}{2n}.$$

3. Sachant que $X > 0$, on a

$$\forall x \leqslant 0, \quad \sqrt{n}\, \mathbb{P}\big(X_n = \lfloor \sqrt{n} x \rfloor\big) = 0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

4. a. Par définition,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sqrt{n}x - 1 \leqslant \lfloor \sqrt{n} x \rfloor \leqslant \sqrt{n} x$$

d'où l'on déduit que $\lfloor\sqrt{n}x\rfloor \to +\infty$ lorsque $n\to\infty$. Plus précisément, on a :
$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad 1-\frac{1}{\sqrt{n}x}\leqslant\frac{\lfloor\sqrt{n}x\rfloor}{\sqrt{n}x}\leqslant 1$$
d'où, par encadrement,
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\lfloor\sqrt{n}x\rfloor}{\sqrt{n}x}=1$$
c'est-à-dire $\lfloor\sqrt{n}x\rfloor\sim\sqrt{n}x$ lorsque $n\to\infty$.

b. Puisque $\lfloor\sqrt{n}x\rfloor\sim\sqrt{n}x=o(n)$ lorsque $n\to\infty$, il existe $\mathrm{N}\in\mathbb{N}$ tel que :
$$\forall n\geqslant \mathrm{N},\quad \lfloor\sqrt{n}x\rfloor\leqslant\frac{n}{2}.$$

c. Pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $k\in[\![2,n+1]\!]$, le produit ci-dessous comporte $(k-2)+1=k-1$ facteurs si bien que :
$$\frac{k-1}{n}\prod_{i=0}^{k-2}\Big(1-\frac{i}{n}\Big)=\frac{k-1}{n^k}\prod_{i=0}^{k-2}(n-i)=\frac{k-1}{n^k}\frac{n!}{(n-k+1)!}=\mathbb{P}(\mathrm{X}_n=k)$$
d'après **II.4.b.**.

d. Pour $n\geqslant \mathrm{N}$ tel que $\sqrt{n}x\geqslant 2$ (on peut supposer que cette condition supplémentaire est réalisée, quitte à augmenter N), on a d'après **b.** et **c.** :
$$\mathbb{P}\big(\mathrm{X}_n=\lfloor\sqrt{n}x\rfloor\big)=\frac{\lfloor\sqrt{n}x\rfloor-1}{n}\exp\Big(\sum_{i=0}^{\lfloor\sqrt{n}x\rfloor-2}\ln\Big(1-\frac{i}{n}\Big)\Big)=\frac{\lfloor\sqrt{n}x\rfloor-1}{n}\exp\big(\alpha(n,\lfloor\sqrt{n}x\rfloor-2)\big).$$

e. La question **b.** permet d'appliquer la question **2.** pour obtenir un encadrement de $\alpha(n,m)$ avec $m=\lfloor\sqrt{n}x\rfloor-2$. En utilisant l'équivalent $m\sim\sqrt{n}x$ lorsque $n\to\infty$, on montre facilement que les deux membres extrémaux de cet encadrement convergent vers $-\frac{x^2}{2}$. Par suite,
$$\lim_{n\to\infty}\alpha(n,\lfloor\sqrt{n}x\rfloor-2)=-\frac{x^2}{2}$$
d'où, par continuité de la fonction exponentielle et d'après la question **a.**,
$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\big(\mathrm{X}_n=\lfloor\sqrt{n}x\rfloor\big)=x\mathbf{e}^{-x^2/2}.$$

Quatrième partie

1. a. Pour $x\in\mathbb{R}$,
$$\lfloor\sqrt{n}x\rfloor=k\iff k\leqslant\sqrt{n}x<k+1\iff x\in\Big[\frac{k}{\sqrt{n}},\frac{k+1}{\sqrt{n}}\Big[.$$

b. D'après la question **a.** et sachant que X_n est à valeurs dans $[\![2,n+1]\!]$, la fonction f_n est constante sur chacun des intervalles $]-\infty,\frac{2}{\sqrt{n}}[$ (où elle est nulle), $[\frac{2}{\sqrt{n}},\frac{3}{\sqrt{n}}[,\ldots,[\frac{n+1}{\sqrt{n}},\frac{n+2}{\sqrt{n}}[$ et $[\frac{n+2}{\sqrt{n}},+\infty[$ (sur lequel elle est nulle). Elle est donc positive sur $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être aux points $\frac{2}{\sqrt{n}},\frac{3}{\sqrt{n}},\ldots,\frac{n+2}{\sqrt{n}}$ avec
$$\int_{-\infty}^{+\infty}f_n(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{k=2}^{n+1}\int_{k/\sqrt{n}}^{(k+1)/\sqrt{n}}\sqrt{n}\,\mathbb{P}(\mathrm{X}_n=k)\,\mathrm{d}x=\sum_{k=2}^{n+1}\mathbb{P}(\mathrm{X}_n=k)=1.$$
Toutes les conditions sont réunies pour que f_n soit une densité de probabilité.

2. a. Sur l'encadrement
$$\lfloor\sqrt{n}x\rfloor-k\leqslant\sqrt{n}x-k<\lfloor\sqrt{n}x\rfloor-k+1,$$
on observe que :
- si $k=\lfloor\sqrt{n}x\rfloor$, alors $0\leqslant\sqrt{n}x-k<1$;
- si $k>\lfloor\sqrt{n}x\rfloor$ i.e. $k\geqslant\lfloor\sqrt{n}x\rfloor+1$, alors $\sqrt{n}x-k<0$;
- si $k<\lfloor\sqrt{n}x\rfloor$ i.e. $k\leqslant\lfloor\sqrt{n}x\rfloor-1$, alors $\sqrt{n}x-k\geqslant 1$.

Puisque U suit la loi uniforme sur $[0,1]$, on en déduit que :
$$\mathbb{P}(\mathrm{U}\leqslant\sqrt{n}x-k)=\begin{cases}1 & \text{si } k<\lfloor\sqrt{n}x\rfloor\\ \sqrt{n}x-\lfloor\sqrt{n}x\rfloor & \text{si } k=\lfloor\sqrt{n}x\rfloor\\ 0 & \text{si } k>\lfloor\sqrt{n}x\rfloor\end{cases}.$$

b. La variable Y_n est à valeurs dans $[\frac{2}{\sqrt{n}}, \frac{n+2}{\sqrt{n}}[$.
Pour $x \in \mathbb{R}$ donné, la formule des probabilités totales appliquée au système complet associé à la variable X_n garantit que :

$$\mathbb{P}(Y_n \leqslant x) = \sum_{k=2}^{n+1} \mathbb{P}(X_n = k)\, \mathbb{P}_{[X_n=k]}(Y_n \leqslant x) = \sum_{k=2}^{n+1} \mathbb{P}(X_n = k)\, \mathbb{P}_{[X_n=k]}(U \leqslant \sqrt{n}x - k)$$

que l'on peut simplifier vu **a.** compte-tenu de l'indépendance de U et X_k pour tout k. Lorsque $x \in [\frac{2}{\sqrt{n}}, \frac{n+2}{\sqrt{n}}[$ c'est-à-dire $2 \leqslant \lfloor \sqrt{n}x \rfloor \leqslant n+1$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y_n \leqslant x) &= \sum_{\substack{2 \leqslant k \leqslant n+1 \\ k < \lfloor \sqrt{n}x \rfloor}} \mathbb{P}(X_n = k) + \mathbb{P}\big(X_n = \lfloor \sqrt{n}x \rfloor\big)\big(\sqrt{n}x - \lfloor \sqrt{n}x \rfloor\big) \\
&= \sum_{\substack{2 \leqslant k \leqslant n+1 \\ k \leqslant \lfloor \sqrt{n}x \rfloor - 1}} \int_{k/\sqrt{n}}^{(k+1)/\sqrt{n}} f_n(t)\,\mathrm{d}t + \int_{\lfloor \sqrt{n}x \rfloor/\sqrt{n}}^{x} f_n(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{2/\sqrt{n}}^{x} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{x} f_n(t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

car $x \in [\frac{\lfloor \sqrt{n}x \rfloor}{\sqrt{n}}, \frac{\lfloor \sqrt{n}x \rfloor + 1}{\sqrt{n}}]$. La vérification de la formule étant immédiate lorsque $x \notin [\frac{2}{\sqrt{n}}, \frac{n+2}{\sqrt{n}}[$, on a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{P}(Y_n \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

c. D'après la question **1.b.**, le cours assure que $x \longmapsto \int_{-\infty}^{x} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ est la fonction de répartition de toute variable de densité f_n. La variable Y_n a donc même loi qu'une variable de densité f_n d'après **b.** : elle admet pour densité f_n.

d. D'après **III.3.** et **III.4.e.**,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ x\mathrm{e}^{-x^2/2} & \text{si } x > 0 \end{cases} = g_1(x).$$

D'après **c.** et le résultat admis au début de la partie, cela assure la convergence en loi de la suite (Y_n) vers la variable Z_1 de la deuxième partie, à densité g_1.

3. a. Soient (A_n) et (B_n) deux suites de variables aléatoires, A une variable aléatoire et b une constante. Si (A_n) converge en loi vers A et (B_n) converge en probabilité vers b, alors $(A_n + B_n)$ converge en loi vers $A + b$.

b. Pour $\varepsilon > 0$ donné,

$$\forall n \geqslant \frac{1}{\varepsilon^2}, \quad \mathbb{P}\Big(\Big|\frac{U}{\sqrt{n}}\Big| \geqslant \varepsilon\Big) = \mathbb{P}\big(U \geqslant \sqrt{n}\varepsilon\big) = 0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Ainsi la suite $\big(\frac{U}{\sqrt{n}}\big)$ converge en probabilité vers la variable certaine nulle. D'après la question **2.d.** et le lemme de Slutsky, la suite de terme général

$$\frac{X_n}{\sqrt{n}} = Y_n - \frac{U}{\sqrt{n}}, \quad n \geqslant 1,$$

converge alors en loi vers la variable Z_1, de densité g_1.

%item