Concours blanc

Vendredi 3 juin 2016

Les exercices de ce problème sont indépendants.
Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-la sur votre copie puis indiquez les initiatives que vous seriez alors amenés à prendre.

Exercice 1 :

On note I et A les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définies par :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

et $\mathcal{E}$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ défini par : $\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} a+c & b & c \\ b & a+2c & b \\ c & b & a+c \end{pmatrix}, \ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$

On admet que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. a) Calculer A^2 puis montrer que $A^3 = 2A$
   b) Montrer que la famille (I, A, A^2) est libre.
   c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^{2n+1} = 2^n A$ puis déterminer A^{2n} pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Montrer que la famille (I, A, A^2) est une base de $\mathcal{E}$. En déduire la dimension de $\mathcal{E}$.
3. a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n \in \mathcal{E}$
   b) On pose $\mathcal{F} = \{ M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $M = P(A)$ où $P \in \mathbb{R}[X] \}$
   Montrer que $\mathcal{F} = \mathcal{E}$.
4. a) Montrer que pour toute matrice M de $\mathcal{E}$, la matrice AM appartient $\mathcal{E}$.
   b) On note f l'application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui, à toute matrice M de $\mathcal{E}$, associe AM.
   Vérifier que f est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{E}$.
   c) Former la matrice W de f dans la base (I, A, A^2) de $\mathcal{E}$.
5. a) Montrer que $f \circ f \circ f = 2f$.
   b) L'endomorphisme f est-il bijectif ?
   c) Déterminer une base de $\text{Im}(f)$ et une base de $\text{Ker}(f)$.
   d) Montrer que $\mathcal{E} = \text{Im}(f) \bigoplus \text{Ker}(f)$.

6. On se place désormais dans un espace E quelconque de dimension n (avec $n \geq 2$).
   On considère un endomorphisme $g \in L(E)$ et un polynôme P annulateur de g de degré r (avec $r \geq 2$) tel que $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$
   a) Justifier qu'il existe r rels $a_1, a_2, .., a_r$ avec $a_1 \neq 0$ tel que $P(X) = a_1 X + a_2 X^2 + ... + a_r X^r$
   b) Montrer que, si $\overrightarrow{u} \in \text{Im}(g)$, il existe $r-1$ rels $b_1, b_2, .., b_{r-1}$ tels que :
   $\overrightarrow{u} = b_1 \, g(\overrightarrow{u}) + b_2 \, g^2(\overrightarrow{u}) + ... + b_{r-1} \, g^{r-1}(\overrightarrow{u})$
   c) Montrer que $\text{Ker}(g) \cap \text{Im}(g) = \{O_E\}$ puis que $\text{Im}(g) \bigoplus \text{Ker}(g) = E$.

Exercice 2 :

Pour tout entier n supérieur ou égal 2, on considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n, dans laquelle on effectue une succession de $(n+1)$ tirages d'une boule avec remise et l'on note X_n la variable aléatoire égale au numéro du tirage où, pour la première fois, on a obtenu un numéro supérieur ou égal au numéro précédent.
Par exemple, si $n = 5$ et si les tirages amènent successivement les numéros 5,3,2,2,6,3, alors $X_5 = 4$
(on tire avec remise 6 boules dans $[\![1, 5]\!]$ et le 4^{ieme} tirage donne un numéro $\geq$ celui obtenu au 3^{ieme} tirage)

Si $n = 8$ et si on obtient successivement 7,5,4,2,1,3,8,6,6 alors $X_8 = 6$ (on tire 9 boules dans $[\![1, 8]\!]$ et c'est au 6^{ieme} tirage que, pour la première fois, on obtient un numéro $\geq$ aux précédents)
Pour tout k de $[\![1, n+1]\!]$, on note N_k la variable aléatoire égale au numéro obtenu au k-ième tirage.

Partie I : Etude du cas $n = 3$

On suppose dans cette partie **uniquement** que $n = 3$.
On tire alors successivement avec remise 4 boules dans une urne contenant des boules numérotées 1, 2, 3

1. a) Justifier que $\mathbb{P}(X_3 \leq 1) = 0$ puis déterminer $X_3(\Omega)$
   b) Exprimer l'événement $(X_3 = 4)$ à l'aide d'événements faisant intervenir les variables N_1, N_2 et N_3. En déduire $\mathrm{P}(X_3 = 4)$.
   c) Calculer $\mathbb{P}_{(N_1=1)}(X_3 = 2)$, $\mathbb{P}_{(N_1=2)}(X_3 = 2)$ et $\mathbb{P}_{(N_1=3)}(X_3 = 2)$ puis montrer que $\mathbb{P}(X_3 = 2) = \dfrac{2}{3}$
   d) En déduire que $\mathbb{P}(X_3 = 3) = \dfrac{8}{27}$.
2. Calculer l'espérance de X_3.

Partie II : Cas général

Dans toute cette partie, n est un entier fixé supérieur ou égal 2.

1. Pour tout k de $[\![1, n+1]\!]$, reconnaître la loi de N_k et rappeler son espérance.
2. Justifier que $X_n(\Omega) = [\![2, n+1]\!]$ et calculer $\mathbb{P}(X_n = n+1)$.
3. a) Montrer, pour tout i de $[\![1, n]\!]$, on a : $\mathbb{P}_{(N_1=i)}(X_n = 2) = \dfrac{n-i+1}{n}$.
   b) En déduire une expression simple de $\mathbb{P}(X_n = 2)$.
4. a) Exprimer, pour tout $k \in [\![2, n+1]\!]$, $\mathbb{P}(X_n = k)$ à l'aide de $\mathbb{P}(X_n > k-1)$ et de $\mathbb{P}(X_n > k)$.
   b) En déduire que $\mathbb{E}(X_n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X_n > k)$.
5. a) On admet que $\forall\, k \in [\![0, n]\!]$, $\mathbb{P}(X_n > k) = \dfrac{1}{n^k}\binom{n}{k}$. Calculer alors $\mathbb{E}(X_n)$.
   b) Montrer que $\forall k \in [\![2, n+1]\!]$, $\mathbb{P}(X_n = k) = \dfrac{k-1}{n^k}\binom{n+1}{k}$.

Partie III : Une convergence en loi

On s'intéresse dans cette partie à la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \geqslant 2}$.

1. Montrer que la série $\sum \dfrac{k-1}{k!}$ converge et calculer sa somme $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k-1}{k!}$
2. On admet qu'il existe une variable aléatoire Z à valeurs dans $[\![2, +\infty[\![$ telle que :

$$\forall k \in [\![2, +\infty[\![\ , \ \mathbb{P}(Z = k) = \frac{k-1}{k!}$$

   Montrer que Z admet une espérance et la calculer. Comparer $\mathbb{E}(Z)$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{E}(X_n)$.

Exercice 3 :

PARTIE I : Étude d'une fonction définie par la somme d'une série

On s'intéresse dans cette partie, pour tout $x > 0$, à la série $\sum \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^x}$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x}$.

   a) Montrer que les suites $(u_{2p})_{p\in\mathbb{N}^*}$ et $(u_{2p-1})_{p\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.

   b) En déduire que la série $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ converge. On note $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$.

2. Soient $x \in \mathbb{R}^{+*}$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer :

$$\sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x} = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{(2k-1)^x} - \frac{1}{2^x}\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^x} \quad \text{puis :} \quad \sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x} = \sum_{k=1}^{2p} \frac{1}{k^x} - \frac{1}{2^{x-1}}\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^x}.$$

3. On admet que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Déterminer la valeur de $S(2)$.

4. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

   a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer, en utilisant la question **2.** : $\quad v_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}}$.

   b) En déduire la convergence et la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, puis la valeur de $S(1)$.
   (on pourra au préalable calculer $\int_0^1 \frac{dt}{1+t}$)

PARTIE II : Étude d'une fonction définie par une intégrale

On définit la fonction Γ sur $]0, +\infty[$ par : $\quad \forall x > 0,\ \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t$.

On admet que $\Gamma(x)$ existe pour tout $x > 0$ et que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \Gamma(n) = (n-1)!$

1) Montrer que, pour $x > 0$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{t^x}{1+e^t}\mathrm{d}t$ converge.

   On pose, pour tout réel x de $]0, +\infty[$, $I(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^x}{1+e^t}\mathrm{d}t$.

2) Soit $x > 0$. On définit la fonction g_x sur $]0, +\infty[$ en posant : $\forall\, t > 0$, $\quad g_x(t) = \frac{t^x}{1+e^t}$.

   a) Montrer : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in \mathbb{R}^{+*},\ g_x(t) = (-1)^n g_x(t)e^{-nt} + \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}t^x e^{-kt}$.

   b) Justifier, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, que l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^x e^{-kt}\mathrm{d}t$ converge et que l'on a :

$$\int_0^{+\infty} t^x e^{-kt}\mathrm{d}t = \frac{1}{k^{x+1}}\Gamma(x+1).$$

   c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} g_x(t)e^{-nt}\mathrm{d}t$ converge, puis que la limite de $\int_0^{+\infty} g_x(t)e^{-nt}\mathrm{d}t$, lorsque l'entier n tend vers $+\infty$, est égale à 0.

   d) En déduire la relation : $\quad I(x) = S(x+1)\Gamma(x+1)$, où la fonction S a été définie dans la partie **I**.

3) En utilisant la partie **I.**, déterminer la valeur de $I(1)$.