

Exercice 1:

①

1a) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2A$

1b) soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tq $\alpha \cdot I + \beta \cdot A + \gamma \cdot A^2 = O_3$ alors $\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O_3$

Ainsi $\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \alpha & \gamma \\ \gamma & 2\gamma & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\beta = 0; \gamma = 0; \alpha = 0$

La famille (I, A, A^2) est une famille libre

1c) on suppose que pour n fixé, $A^{2m+1} = 2A$ c'est (Hm)

$A^{2(m+1)} = A^{2m+2} = A^{2m+1} \cdot A = 2A \cdot A = 2A^2 = 2 \cdot 2A = 2^{m+1} A$ c'est Hm+1

• H0 vraie car $A^2 = 2 \cdot A = 1 \cdot A$

• concl: D'après le th. de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N} \quad A^{2n} = 2^n \cdot A$

calcul de A^{2m}

$A^4 = A^3 \cdot A = 2A^2$; $A^6 = A^4 \cdot A^2 = 2A^2 \cdot A^2 = 4A^2$; $A^8 = A^6 \cdot A^2 = 8A^2$

• on suppose que pour n fixé, $A^{2m} = 2^{m-1} \cdot A^2$ c'est (Hm)

$A^{2(m+1)} = A^{2m+2} = A^{2m} \cdot A^2 = 2^{m-1} \cdot A^2 \cdot A^2 = 2^m \cdot A^2 = 2^{m-1} \cdot 2 \cdot A^2 = 2^m \cdot A^2$

donc $A^{2(m+1)} = 2^m \cdot A^2$ c'est Hm+1

• H_1, H_2 et H_3 vraie (H0 vraie car $A^{2 \cdot 1} = A^2 = 2^0 \cdot A^2 = 1 \cdot A^2$)

• concl: par th. de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad A^{2n} = 2^{n-1} \cdot A^2$

2) on sait déjà que (I, A, A^2) est libre - Il reste à justifier qu'elle est génératrice de E

soit $n \in \mathbb{Z}$ alors $n = \begin{pmatrix} a+c & b & c \\ b & a+c & b \\ c & b & a+c \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

donc $n = a \cdot I + b \cdot A + c \cdot A^2$ ainsi $n \in \text{Vect}(I, A, A^2)$ d'où $E \subset \text{Vect}(I, A, A^2)$

reciproquement $I \in E$; $A \in E$ et $A^2 \in E$ d'où $E = \text{Vect}(I, A, A^2)$

La famille (I, A, A^2) est libre et génératrice de E donc c'est une base de E .

3a) on a vu all 1c) que: $\forall n \in \mathbb{N} \quad A^{2n} = 2^n \cdot A$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad A^{2n+1} \in E$

et $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad A^{2n} = 2^{n-1} \cdot A^2$ donc $A^{2n} \in E$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

enfin pour $m=0 \quad A^0 = I \in E$ finalement, $\forall k \in \mathbb{N} \quad A^k \in E$

b) soit $n \in \mathbb{Z}$ alors $\exists p \in \mathbb{R}^3$ tq $n = p(A)$ avec $p(x) = \sum_{k=0}^m a_k x^k$

on a $p(A) = \sum_{k=0}^m a_k A^k$ donc $n = \sum_{k=0}^m a_k A^k$

puisque $\begin{cases} \text{c'est une base pour} \\ \text{tout } k \text{ pair} \\ \text{et tout } k \text{ impair} \end{cases}$

on $\forall k \in \mathbb{N} \quad A^k \in E$ et E engendré par $\{A^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ donc $n = \sum_{k=0}^m a_k A^k \in E$

(car n est une li de matrices de E) - On a donc $E \subset E$

reciproquement, $\forall n \in E$, $n = aI + bA + cA^2$ donc $n = p(A)$ avec $p(x) = ax^2 + bx + c$

ainsi $\exists p \in \mathbb{R}[x]$ tq $n = p(A)$ d'où $n \in E$ et $E \subset E$ on a bien $E = E$

4a) $\forall n \in E$ avec $n = aI + bA + cA^2$

$A \times n = A \times (aI + bA + cA^2) = a \cdot A + b \cdot A^2 + c \cdot A^3 = a \cdot A + b \cdot A^2 + c \cdot 2A^2 = (a+2c)A + b \cdot A^2$

donc $A \times n \in \text{Vect}(I, A, A^2) = E$ ainsi $\forall n \in E$, $A \times n \in E$.

4b) on veut de montrer que $\forall n \in E$, $f(n) = A \times n \in E$

il reste à montrer que f est linéaire.

soit π, n deux matrices de E et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ - on pose $w = \alpha \pi + \beta n$

$f(w) = A \cdot w = A \cdot (\alpha \pi + \beta n) = \alpha A \cdot \pi + \beta A \cdot n = \alpha f(\pi) + \beta f(n)$

donc $f(\alpha \pi + \beta n) = \alpha f(\pi) + \beta f(n)$ ainsi f est linéaire et $f \in \mathcal{L}(E)$ car f est linéaire de E dans E

4c) on pose $w = \text{Vect}_B(f)$ on $B = \{I, A, A^2\}$ base de E

$f(I) = A \cdot I = A$; $f(A) = A \cdot A = A^2$ et $f(A^2) = A \cdot A^2 = A^3 = 2A$

d'où $\text{Vect}_B(f) = w = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ car $w = \begin{pmatrix} f(I) & f(A) & f(A^2) \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ A \\ A^2 \end{pmatrix}$

5a) $\text{Vect}_B(\text{Id} \circ f) = \text{Vect}_B(f^2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = w^2$

et $w^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ donc $w^2 = 2w$ d'où $\text{Vect}_B(\text{Id} \circ f) = 2 \text{Vect}_B(f)$

alors $\text{Id} \circ f = 2f$

(car les applications qui ont m matrice dans la base B sont égales)

5b) f est bijectif car w inversible

on $\text{rg}(w) = 2$ car les 2 premières colonnes de w forment une famille libre

et la 3e et la 1e sont liées

donc $\text{rg}(n) \neq 3$ ainsi w non inversible donc f non bijective

5c) $\text{Id} \circ f = \text{Vect}(f(I), f(A), f(A^2)) = \text{Vect}(A, A^2, 2A) = \text{Vect}(A, A^2)$ (car (I, A, A^2) base de E)

La famille (A, A^2) est génératrice de $\text{Id} \circ f$ et elle est libre donc c'est une base de $\text{Id} \circ f$

D'après le th. du rang, $\dim E = \dim \text{Id} \circ f + \dim \text{Ker} f$ car $3 = 2 + \dim \text{Ker} f$ donc $\dim \text{Ker} f = 1$

on $f(I) = A = \frac{1}{2} \cdot 2A = \frac{1}{2} f(A^2)$ donc $f(I - \frac{1}{2} A^2) = 0_3$ donc $I - \frac{1}{2} A^2 \in \text{Ker} f$

ainsi $(I - \frac{1}{2} A^2)$ est une base de $\text{Ker} f$ (car on vérifie normalement d'avoir une base de $\dim 1$)

5d) La famille $(A, A^2, I - \frac{1}{2}A^2)$ donne en énumérant une base de Inf et une base de Ker une base de $\mathbb{E}$. En effet c'est une famille libre :
 soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel $x \cdot A + y \cdot (I - \frac{1}{2}A^2) = 0_3$ alors $3I + xA + (y - \frac{x}{2})A^2 = 0_3$
 or $1, 2, A, A^2$ libre donc $\begin{cases} 3=0 \\ x=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3=0 \\ x=0 \\ y=0 \end{cases}$

Ainsi $(A, A^2, I - \frac{1}{2}A^2)$ libre et constituée de 3 vecteurs de $\mathbb{E}$ avec $\dim \mathbb{E} = 3$ donc c'est une base.
 Ainsi $\mathbb{E} = \text{Ker} \oplus \text{Inf}$ (car (A, A^2) base de Inf et $(I - \frac{1}{2}A^2)$ base de Ker)

5a) Peut un polynôme de degré r donc $\exists (a_0, a_1, \dots, a_r) \in \mathbb{R}^r$ tel $P(X) = \sum_{k=0}^r a_k X^k$ (avec $a_r \neq 0$)
 or $P(0) = a_0 = 0$ et $P'(0) \neq 0$ avec $P'(X) = \sum_{k=1}^r k a_k X^{k-1}$ donc $P'(0) = a_1 \neq 0$
 Finalement, $\exists (a_1, \dots, a_r) \in \mathbb{R}^r$ tel $P(X) = a_1 X + a_2 X^2 + \dots + a_r X^r$ avec $a_1 \neq 0$

5b) Soit $\vec{v} \in \text{Im} g$ alors $\vec{v}$ est l'image d'un vecteur par g car $\exists \vec{x} \in \mathbb{E}$ tel $\vec{v} = g(\vec{x})$
 or $a, a+2 \geq 2$ $g^k(\vec{x}) = g^{k-1}(g(\vec{x})) = g^{k-1}(\vec{v})$ et $P(g) = a_0 g + a_1 g^2 + \dots + a_r g^r = 0_{\mathbb{E}}$
 (car P polynôme annulateur de g)

Ainsi $P(g)(\vec{x}) = a_0 g(\vec{x}) + a_1 g^2(\vec{x}) + \dots + a_r g^r(\vec{x}) = \vec{0}$ d'où $a_0 \vec{v} + a_1 g(\vec{v}) + \dots + a_r g^r(\vec{v}) = \vec{0}$
 or $a_r \neq 0$ donc $\vec{v} = (-\frac{a_0}{a_r}) g(\vec{v}) + (-\frac{a_1}{a_r}) g^2(\vec{v}) + \dots + (-\frac{a_{r-1}}{a_r}) g^r(\vec{v})$

Par conséquent $\exists (b_1, \dots, b_{r-1}) \in \mathbb{R}^{r-1}$ tel $\vec{v} = b_1 g(\vec{v}) + b_2 g^2(\vec{v}) + \dots + b_{r-1} g^{r-1}(\vec{v})$ (avec $\vec{v} \in \mathbb{E}, \vec{v} \neq \vec{0}$)
 $b_i = -\frac{a_i}{a_r}$

5c) Soit $\vec{v} \in \text{Im} g \cap \text{Ker} g$ alors $\vec{v} \in \text{Im} g$ donc d'après 5b) $\exists (b_1, \dots, b_{r-1}) \in \mathbb{R}^{r-1}$ tel $\vec{v} = b_1 g(\vec{v}) + \dots + b_{r-1} g^{r-1}(\vec{v})$
 or $\vec{v} \in \text{Ker} g$ donc $g(\vec{v}) = \vec{0}$ et $\forall i \geq 2$ $g^i(\vec{v}) = \vec{0}$ d'où $\vec{v} = b_1 \vec{0} + \dots + b_{r-1} \vec{0} = \vec{0}$
 Alors $\text{Im} g \cap \text{Ker} g = \{\vec{0}\}$ et $\dim \text{Im} g + \dim \text{Ker} g = \dim \mathbb{E}$ (par th. du rang)
 d'où $\text{Im} g \oplus \text{Ker} g = \mathbb{E}$

Exercice 2:

1a) $X_3 = n^\circ$ du tirage où pour la n° fois on tire un $n^\circ \geq$ précédent.
 Pour cela, il faut au moins réaliser 2 tirages donc $(X_3 \geq 2)$ ainsi $P(X_3 < 2) = P(X_3 = 1) = 0$
 or tiré la boule donc $X_3 \leq$ nbe total de tirages $= 4$ d'où $X_3 \leq 4$ donc $X_3(\Omega) = \{2, 3, 4\}$

1b) $(X_3 = 4) =$ "aux 3 premiers tirages le n° tiré est $<$ n° tiré précédent" $= (N_1 > N_2 > N_3) \cap (N_3 \neq 1)$
 or le n° du 4^e tirage est $\geq n^\circ$ du 3^e tirage
 or si on n'a que 3 n° on dispose d'un n° qui est $\geq$ n° précédent $(N_1 = 3)$ puis $(N_2 = 2)$ et $N_3 = 1$
 Finalement $(X_3 = 4) = (N_1 = 3) \cap (N_2 = 2) \cap (N_3 = 1)$

$P(X_3 = 4) = P((N_1 = 3) \cap (N_2 = 2) \cap (N_3 = 1)) = P(N_1 = 3) P(N_2 = 2) P(N_3 = 1)$
 $= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{24}$ d'où $P(X_3 = 4) = \frac{1}{24}$
 (on voit bien que les événements sont indépendants)

1c) $P_{(N_1=1)}(X_3=2) =$ proba d'avoir au 2^e tirage un $n^\circ \geq$ celui du 1^{er} tirage qui est 1
 $=$ proba d'avoir un $n^\circ \geq 1$ au 2^e tirage $= 1 = P_{(N_1=1)}(X_3=2)$

$P_{(N_1=2)}(X_3=2) =$ proba d'avoir au 2^e tirage un $n^\circ \geq 2 = \frac{2}{3} = P_{(N_1=2)}(X_3=2)$
 $P_{(N_1=3)}(X_3=2) =$ proba d'avoir au 2^e tirage un $n^\circ \geq 3 = \frac{1}{3} = P_{(N_1=3)}(X_3=2)$

on calcule ensuite $P(X_3=2)$ à l'aide de la formule des probas totales utilisée avec la case
 $1_{N_1=1}, 1_{N_1=2}, 1_{N_1=3}$
 $P(X_3=2) = \sum_{i=1}^3 P(N_1=i \cap X_3=2) = P(N_1=1) \cdot P_{(N_1=1)}(X_3=2) + P(N_1=2) \cdot P_{(N_1=2)}(X_3=2) + P(N_1=3) \cdot P_{(N_1=3)}(X_3=2)$

d'où $P(X_3=2) = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$
 1d) la famille $1_{(X_3=2)}, 1_{(X_3=3)}, 1_{(X_3=4)}$ est une scd donc $\sum_{i=1}^3 P(X_3=i) = 1$ d'où $P(X_3=3) = 1 - P(X_3=2) - P(X_3=4)$

Ainsi $P(X_3=3) = 1 - \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = \frac{0}{3} = 0$ ainsi $P(X_3=3) = \frac{0}{3}$
 2) $E(X_3) = \sum_{k \in X_3(\Omega)} k \cdot P(X_3=k) = \frac{2}{3} \cdot 2 + P(X_3=4) = 2 \cdot \frac{2}{3} + 1 \cdot P(X_3=4) = 2 \cdot \frac{2}{3} + 3 \cdot \frac{0}{3} = \frac{4}{3}$
 d'où $E(X_3) = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \frac{7}{3} = \frac{2+2+1}{3} = \frac{5}{3} = (1 + \frac{1}{3})$ (on trouve $E(X_3) = \frac{5}{3}$ en tirant avec 3a)

II - 1) $N_k =$ numéro tiré au k° tirage. Ici on opère des tirages avec remise -
 c'est une situation type de loi uniforme de $\{1, \dots, n\}$ donc $N_k \in \mathcal{U}(1, n)$ d'où $E(N_k) = \frac{n+1}{2}$

2) il faut au minimum 2 tirages pour pouvoir espérer être aux n° tirés donc $X_n \geq 2$
 or le rang d'apparition du $n^\circ \geq$ précédent est $\leq$ total de tirages donc $X_n \leq n+1$ d'où $X_n(\Omega) = \{2, \dots, n+1\}$
 $(X_n = m) =$ "aux n premiers tirages le n° tiré est $<$ n° précédent et au m° on tire le n° qui est $\geq n^\circ$ du n° tirage"

Ici on tire des n° dans $\{1, \dots, n\}$ donc pour avoir $n_i > n_j$ à chacun des n premiers tirages, il faut être consécutif : $n, n-1, n-2, \dots, 3, 2, 1$ puis au n° on tire n'importe quel n° de $\{1, \dots, n\}$

d'où $P(X_n = m) = P(N_1 = m) \cap (N_2 = m-1) \cap (N_3 = m-2) \cap \dots \cap (N_{n-1} = 2) \cap (N_n = 1)$
 événements indépendants
 $= \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{n-2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n!}$

Ainsi $P(X_n = n+1) = \left(\frac{1}{n}\right)^n$
 3a) $P_{(N_1=1)}(X_n=2) =$ proba d'avoir au 2^e tirage un $n^\circ \geq 1 =$ proba de tirer un $n^\circ \in \mathbb{E}, n \geq 1 = \frac{n-1-1}{n} = \frac{n-2}{n}$
 d'où $P_{(N_1=1)}(X_n=2) = \frac{n-2}{n}$

3b) on calcule $P(X_n=2)$ à l'aide de la formule des probas totales utilisée avec la case $1_{N_1=1}, 1_{N_1=2}, 1_{N_1=3}$
 $P(X_n=2) = \sum_{i=1}^n P(N_1=i \cap X_n=2) = \sum_{i=1}^n P(N_1=i) \cdot P_{(N_1=i)}(X_n=2) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \cdot \frac{n-i-1}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n (n-i-1)$

⑤ $P(X_n = 2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} (n-i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n-1}{2}$ d'où $P(X_n = 2) = \frac{n-1}{2}$

1a) $(X_n > k-1) = (X_n \geq k) \cup (X_n = k-1) = P(X_n = k-1) + P(X_n \geq k)$
 Ainsi $P(X_n = k-1) = P(X_n > k-1) - P(X_n > k)$

1b) $E(X_n) = \sum_{k \in \mathbb{N}} k P(X_n = k) = \sum_{k=1}^n k (P(X_n > k-1) - P(X_n > k)) = \sum_{k=1}^n k P(X_n > k-1) - \sum_{k=1}^n k P(X_n > k)$
 $= \sum_{k=1}^n (k P(X_n > k-1) - (k-1) P(X_n > k-1) - (k-1) P(X_n > k) + (k-1) P(X_n > k))$
 $= \sum_{k=1}^n (P(X_n > k-1) - (k-1) P(X_n > k-1) + (k-1) P(X_n > k)) = \sum_{k=1}^n (P(X_n > k-1) - (k-1) P(X_n > k-1) + (k-1) P(X_n > k))$
 $= 1 \cdot P(X_n > 0) - (n-1) P(X_n > n-1) + \sum_{k=2}^n (k-1) P(X_n > k-1) = 1 - (n-1) P(X_n > n-1) + \sum_{k=2}^n (k-1) P(X_n > k-1)$
 $= 1 - (n-1) P(X_n > n-1) + \sum_{k=2}^n (k-1) P(X_n > k-1) = 1 - (n-1) P(X_n > n-1) + \sum_{k=2}^n (k-1) P(X_n > k-1)$

Finaliser $E(X_n) = \sum_{k=0}^n P(X_n > k)$

1a) $E(X_n) = \sum_{k=0}^n P(X_n > k) = \sum_{k=0}^n \left(\frac{n}{k} \right) \left(\frac{1}{n} \right)^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n} \right)^k = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$ d'où $E(X_n) = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$

1b) $\forall k \in \mathbb{N}, P(X_n = k) = P(X_n > k-1) - P(X_n > k) = \left(\frac{n}{k-1} \right) \left(\frac{1}{n} \right)^{k-1} - \left(\frac{n}{k} \right) \left(\frac{1}{n} \right)^k = \frac{n!}{(k-1)! (n-k+1)!} \left(\frac{1}{n} \right)^{k-1} - \frac{n!}{k! (n-k)!} \left(\frac{1}{n} \right)^k$

or $n \binom{n}{k-1} \left(\frac{1}{n} \right)^{k-1} = \frac{n!}{(k-1)! (n-k+1)!} \left(\frac{1}{n} \right)^{k-1} = \frac{n!}{(k-1)! (n-k+1)!} \left(\frac{1}{n} \right)^{k-1} = \frac{n!}{(k-1)! (n-k+1)!} \left(\frac{1}{n} \right)^{k-1}$

avec $n \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n} \right)^k = \frac{n!}{k! (n-k)!} \left(\frac{1}{n} \right)^k = \frac{n!}{k! (n-k)!} \left(\frac{1}{n} \right)^k = \frac{n!}{k! (n-k)!} \left(\frac{1}{n} \right)^k$

d'où $P(X_n = k) = \frac{(k-1)! (n-k)!}{k! (n-k)!} = \frac{(k-1)! (n-k)!}{k! (n-k)!} = \frac{(k-1)! (n-k)!}{k! (n-k)!}$

$\mathbb{I} - 1$ or pour $N \geq 2$ $S_N = \sum_{k=2}^N \frac{1}{k!} = \sum_{k=2}^N \frac{1}{k!} = \sum_{k=2}^N \frac{1}{k!} = \sum_{k=2}^N \frac{1}{k!}$

$S_N = 1 - \frac{1}{N!} \rightarrow 1$ donc la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$ converge et on a $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} = e$

2) $E(Z) = \sum_{k=2}^{\infty} k P(Z = k) = \sum_{k=2}^{\infty} k \frac{1}{k!} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} = e$ (soit $k \geq 2$ donc $k(k-1) = \frac{1}{(k-2)!}$) d'où $E(Z) = e$

$\lim_{n \rightarrow \infty} E(X_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e$ (car $\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \sim e^{n \cdot \frac{1}{n}} = e$) avec $n \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n} \right)^k = \frac{n!}{k! (n-k)!} \left(\frac{1}{n} \right)^k = \frac{n!}{k! (n-k)!} \left(\frac{1}{n} \right)^k$

donc $\lim_{n \rightarrow \infty} E(X_n) = e = E(Z)$

Exercice 3: 1) on pose $\forall p \in \mathbb{N}^*$ $x_p = \lfloor np \rfloor$ et $y_p = \lfloor np \rfloor$ - on montre que les suites $(x_p)_p$ et $(y_p)_p$ sont adjacentes.

$\forall p \in \mathbb{N}^*$ $x_p - y_p = \lfloor np \rfloor - \lfloor np \rfloor = 0$ car $\lfloor np \rfloor = \lfloor np \rfloor$

or $x > 0$ $(2p+1)^x = e^{x \ln(2p+1)} \leq e^{x \ln(2p+1)}$ d'où $\frac{1}{(2p+1)^x} \leq \frac{1}{(2p+1)^x}$ la suite $(x_p)_p$ est voisine.

$\forall p \in \mathbb{N}^*$ $y_p - x_p = \lfloor np \rfloor - \lfloor np \rfloor = 0$ car $\lfloor np \rfloor = \lfloor np \rfloor$

or $x > 0$ donc $(2p+2)^x < (2p+3)^x$ d'où $\frac{1}{(2p+2)^x} < \frac{1}{(2p+3)^x}$

$\forall p \in \mathbb{N}^*$ $y_p - x_p = \lfloor np \rfloor - \lfloor np \rfloor = 0$ car $\lfloor np \rfloor = \lfloor np \rfloor$

Finaliser: $(x_p)_p$ voisine $(y_p)_p$ décroissante $\lim_{p \rightarrow \infty} (x_p - y_p) = 0$

les suites $(x_p)_p$ et $(y_p)_p$ sont adjacentes. Ainsi $(x_p)_p$ et $(y_p)_p$ sont adjacentes. Elles convergent vers une même limite L .

1b) la suite des termes de rangs pairs est celle de termes de rangs impairs converge vers une même limite L . Donc la suite $(x_n)_n$ converge vers L .

or $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k^x}$ donc x_n est la somme partielle de la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x}$

Ainsi la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x}$ converge vers L et on pose $L = S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x}$

2) on démontre la somme $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^x}$ en somme des termes d'indices pairs + somme des termes d'indices impairs.

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^x} = \sum_{k \in \mathbb{O}, p} \frac{1}{k^x} + \sum_{k \in \mathbb{I}} \frac{1}{k^x}$ or le pair $k \in \mathbb{O}$ $k=2i$ avec $i \in \mathbb{N}^*$ et le impair $k \in \mathbb{I}$ $k=2i-1$ avec $i \in \mathbb{N}^*$

d'où $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^x} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(2i)^x} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(2i-1)^x} = \frac{1}{2^x} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^x} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(2i-1)^x}$

Finaliser $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^x} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(2i)^x} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(2i-1)^x} = \frac{1}{2^x} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^x} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(2i-1)^x}$

En reportant l'équation du décalage on a $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(2i-1)^x} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^x} - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(2i)^x}$ or a:

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^x} = \sum_{k \in \mathbb{O}, p} \frac{1}{k^x} + \sum_{k \in \mathbb{I}} \frac{1}{k^x} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(2i)^x} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(2i-1)^x}$

donc $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(2i-1)^x} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^x} - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(2i)^x} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^x} - \frac{1}{2^x} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^x}$

on a bien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^x} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^x} - \frac{1}{2^x} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^x}$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^x} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^x} - \frac{1}{2^x} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^x} \right) - \frac{1}{2^x} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^x} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^x} - \frac{2}{2^x} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^x}$

on applique la relation avec $x=2$: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} - \frac{1}{2^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}$

d'où $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{3}{4} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{8}$ ainsi $S(2) = \frac{\pi^2}{8}$

②

Ainsi $\forall x > 0$
 $\forall k \in \mathbb{N}^*$ $\int_0^x t^k e^{-t} dt = \frac{1}{k!} \Gamma(x+1)$

2c) $\int_0^x g_n(t) e^{-nt} dt$ est impaire en x et par suite impaire en 0.

En effet $t \mapsto g_n(t) e^{-nt}$ continue sur $]0, +\infty[$ et $\lim_{t \rightarrow 0^+} g_n(t) e^{-nt} = 0$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} g_n(t) e^{-nt} = 0$

et pour $\forall t > 0$ $0 \leq g_n(t) e^{-nt} = \frac{t^x}{1+t^x} e^{-nt} \leq \frac{t^x}{1+t^x} e^{-nt} = t^x e^{-nt} = t^x e^{-1 \cdot nt}$

on d'après 2b) $\int_0^x t^x e^{-nt} dt$ converge donc par intégrale d'inégalité $\int_0^x g_n(t) e^{-nt} dt$ converge.

En intégrant l'inégalité précédente et $0 \leq A$ puis en faisant $A \rightarrow +\infty$ on obtient :

$0 \leq \int_0^x g_n(t) e^{-nt} dt \leq \int_0^x t^x e^{-nt} dt = \frac{1}{(n+1)^{x+1}} \Gamma(x+1)$

on $\Gamma(x+1) = x! \in \mathbb{R}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(n+1)^{x+1}} = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^x g_n(t) e^{-nt} dt = 0$

Par th. d'écrasement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^x g_n(t) e^{-nt} dt = 0$

2d) $I(x) = \int_0^x g_n(t) dt$ et d'après 2a) $\forall x > 0$ $\int_0^x g_n(t) dt = (-1)^n \int_0^x g_n(t) e^{-nt} dt + \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \int_0^x t^{k-1} e^{-nt} dt$

Ici toutes les intégrales convergent donc on peut passer à la limite, on obtient :

$I(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^x g_n(t) dt = (-1)^n \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^x g_n(t) e^{-nt} dt + \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^x t^{k-1} e^{-nt} dt$
 $= \frac{1}{x!} \Gamma(x+1)$ d'après 2b)

d'où $I(x) = (-1)^n \int_0^x g_n(t) e^{-nt} dt + \Gamma(x+1) \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k!}$

on $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^x g_n(t) e^{-nt} dt = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n \int_0^x g_n(t) e^{-nt} dt = 0$ d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n \int_0^x g_n(t) e^{-nt} dt = 0$

de plus la série $\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k!}$ converge vers $S(x+1)$ d'après 1a) (car $x+1 > 0$) - on peut faire tendre $n \rightarrow +\infty$

on obtient : $I(x) = 0 + \Gamma(x+1) \cdot S(x+1) = \Gamma(x+1) S(x+1)$ car $I(x) = \Gamma(x+1) S(x+1)$ et $x > 0$

3) on applique 2) et $x = 1$:

$I(1) = \Gamma(2) \cdot S(2)$ avec $S(2) = \frac{\pi^2}{12}$ d'après I-3) et $\Gamma(2) = 1! = 1$

on trouve $I(1) = \frac{\pi^2}{12}$

1) on applique 2) avec $x = 1$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 t^n e^{-t} dt = \frac{1}{n!} \Gamma(2) = \frac{1}{n!} \cdot 1! = \frac{1}{n!}$

d'où $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = e - 1$ car $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$ et $\frac{1}{0!} = 1$

b) d'après le th. sur la somme de Riemann, on peut $\forall t \in [0,1]$ $f(t) = \frac{1}{1+t}$ (continue sur $[0,1]$)

on $\int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt = \ln(2)$ donc la suite $\left(\int_0^1 f(t) dt \right)_{n \geq 1}$ converge vers $\ln(2)$

et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t) dt = \ln(2)$

Partie II

1) $t \mapsto \frac{t^x}{1+t^x}$ est continue sur $]0, +\infty[$ (car $t \mapsto t^x = e^{x \ln t}$ continue sur $]0, +\infty[$) et $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t^x}{1+t^x} = 0$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^x}{1+t^x} = 0$

l'intégrale $\int_0^x \frac{t^x}{1+t^x} dt$ est impaire en 0 et en x

2) d'après 1) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{t^x}{1+t^x} dt = 0$ car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{t^x}{1+t^x} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{t^x}{1+t^x} dt = 0$

La fonction $\frac{t^x}{1+t^x}$ est prolongeable par continuité en 0, l'intégrale est par suite impaire en 0

3) d'après 1) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{t^x}{1+t^x} dt = 0$ car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{t^x}{1+t^x} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{t^x}{1+t^x} dt = 0$

Par suite d'écrasement pour les fonctions positives, $\int_0^x \frac{t^x}{1+t^x} dt$ converge

En fait $\int_0^x \frac{t^x}{1+t^x} dt$ converge $\forall x > 0$

1a) $\forall t > 0$ $\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} t^k e^{-t} = (-1)^{n-1} t^n e^{-t} + (-1)^n \int_0^t t^n e^{-t} dt = (-1)^{n-1} t^n e^{-t} + (-1)^n (1 - e^{-t}) = (-1)^{n-1} t^n e^{-t} + (-1)^n$

d'où $\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} t^k e^{-t} = \frac{t^x}{1+t^x} (e^{-t} + (-1)^n e^{-nt}) = \frac{t^x}{1+t^x} (e^{-t} + (-1)^n e^{-nt}) = \frac{t^x}{1+t^x} (1 - (-1)^n e^{-nt}) = \frac{t^x}{1+t^x} (1 - (-1)^n e^{-nt})$

d'où $\int_0^x g_n(t) dt = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \int_0^x t^k e^{-t} dt + (-1)^n \int_0^x t^n e^{-t} dt$

1b) on va faire un changement de variable $y = kt$

$\forall x > 0$ $\int_0^x t^x e^{-t} dt = \int_0^{kx} \left(\frac{y}{k} \right)^x e^{-y} \frac{dy}{k} = \frac{1}{k^{x+1}} \int_0^{kx} y^x e^{-y} dy$

on peut $x > 0$, $\int_0^{kx} y^x e^{-y} dy$ converge et nous $\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} y^x e^{-y} dy$ - on peut faire tendre $k \rightarrow +\infty$

on a : $\int_0^x t^x e^{-t} dt = \frac{1}{k^{x+1}} \int_0^{kx} y^x e^{-y} dy = \frac{1}{k^{x+1}} \Gamma(x+1)$