

## Corrigé du devoir maison 2

Attention : il reste encore beaucoup de confusions dans l'utilisation de  $\Rightarrow$  ou  $\Leftrightarrow$  : je rappelle que les équivalences ne sont nécessaires que lorsque vous faites une résolution ou que vous partez du résultat à montrer (puisque dans ce cas, seuls les retours sont nécessaires!). Dans TOUS les autres cas, utiliser  $\Rightarrow$  surtout que souvent  $\Leftrightarrow$  est faux. N'oubliez pas par ailleurs, de bien citer les résultats que vous utilisez! (Binôme de Newton, ou ....)

### Exercice 1:

1. Erreur récurrente : confusion entre l'ensemble de définition (càd l'ensemble des  $x$  où tous les termes de l'équation existent) et l'ensemble des  $x$  où l'équation peut avoir des solutions.

Pour insister :  $\{x \in \mathbb{R}/x+1 \geq 0 \text{ et } 3x+1 \geq 0\}$  n'est pas l'ensemble de définition. C'est une confusion de deux ensembles distincts.

Corrigé : Equation définie sur  $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R}/x+1 \geq 0\} = [-1, +\infty[$ . Puis deux rédactions possibles :

Analyse : supposons qu'une telle solution  $x \in [-1, +\infty[$  existe. Alors  $\sqrt{x+1} = 3x+1 \Rightarrow x+1 = (3x+1)^2$   
 $\Rightarrow 9x^2 + 5x = 0 \Rightarrow x(9x+5) = 0 \Rightarrow x = 0 \in [-1, +\infty[$  ou  $x = -\frac{5}{9} \in [-1, +\infty[$ .

Il y a donc deux candidats à cette équation.

Synthèse : on vérifie si les candidats sont solutions.  $\sqrt{0+1} = 1 = 3 \times 0 + 1$  mais  $\sqrt{-\frac{5}{9}+1} = \frac{2}{3} \neq 3 \times (-\frac{5}{9}) + 1 = -\frac{2}{3}$ .

Conclusion : cette équation admet une unique solution  $x = 0$ .

Rédaction par équivalences : (brouillon  $3x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1/3$ )

Sur  $[-1, -1/3[$ ,  $\sqrt{x+1} \geq 0$  et  $3x+1 < 0$ . L'équation n'admet aucune solution.

Sur  $[-1/3, +\infty[$ , comme les deux membres sont positifs, on a l'équivalence  $\sqrt{x+1} = 3x+1 \Leftrightarrow x+1 = (3x+1)^2$   
 $\Leftrightarrow 9x^2 + 5x = 0 \Leftrightarrow x(9x+5) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \in [-\frac{1}{3}, +\infty[$  ou  $x = -\frac{5}{9} \notin [-1/3, +\infty[$ . Ccl :  $\mathcal{S} = \{0\}$ .

2. Inéquation définie sur  $\mathbb{R}$ . Attention, pour une inéquation le raisonnement par analyse et synthèse n'est pas judicieux, car l'ensemble des candidats devient trop gros, et donc la vérification dans la synthèse trop fastidieuse.

Comme la formule du cours  $|y| \leq b$  différencie le cas  $b \geq 0$  du cas  $b < 0$ , il faut séparer deux cas.

Si  $2-x < 0 \Leftrightarrow 2 < x$ , on a  $2-x < 0$  et  $|x^2-3x| \geq 0$  donc l'inéquation est impossible.

Sur  $]-\infty, 2]$ , comme  $2-x \geq 0$ , on obtient  $|x^2-3x| \leq 2-x \Leftrightarrow -(2-x) \leq x^2-3x \leq (2-x)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x \leq 2-x \\ -2+x \leq x^2-3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x-2 \leq 0 \\ 0 \leq x^2-4x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [1-\sqrt{3}, 2] \\ x \in ]-\infty, 2-\sqrt{2}] \end{cases} \quad (\text{car } x \in ]-\infty, 2])$$

Conclusion : l'ensemble solution est  $\mathcal{S} = [1-\sqrt{3}, 2-\sqrt{2}]$  (car  $1-\sqrt{3} < 1-\sqrt{1} = 0 = 2-\sqrt{4} < 2-\sqrt{2}$ )

Calculs :  $\Delta_1 = 12$  donc  $\sqrt{\Delta_1} = 2\sqrt{3}$ ; deux racines  $x_1 = 1-\sqrt{3} \geq 2$  et  $x_2 = 1+\sqrt{3} > 1+\sqrt{1} = 2$ .

$\Delta_2 = 8$ ,  $\sqrt{\Delta_2} = 2\sqrt{2}$  d'où deux racines  $r_1 = 2-\sqrt{2} \leq 2$  et  $r_2 = 2+\sqrt{2} > 2$ .

Autre méthode : regarder le signe de  $x^2-3x$  pour enlever les valeurs absolues ... mais méthode plus longue.

3.  $S_1$  : ne pas croire que l'on va se ramener au binôme de Newton (il n'y a pas de coefficients binomiaux!). Les puissances doivent vous guider vers la somme géométrique. De plus,  $n$  est une constante par rapport à l'indice de sommation, donc  $S_1 = (-1)^{\frac{1}{3n+1}} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{1}{(3)^{-k}} = -\frac{1}{3^{n+1}} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k 3^k = -\frac{1}{3^{n+1}} \sum_{k=0}^{n-1} (-3)^k = -\frac{1}{3^{n+1}} \frac{1-(-3)^n}{1-(-3)}$

Dans  $S_2$ , il manque le  $n!$  pour faire apparaître  $\binom{n}{k}$ . Comme  $n!$  est une constante par rapport à  $k$ , on obtient

$$S_2 = \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} 2^n = \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 2^k 2^{n-k} \quad (\text{ou sortir le } 2^n \text{ et mettre } 1^k \times 1^{n-k}).$$

Il reste encore le problème de la borne de départ. D'après la relation de Chasles,  $S_2 = \frac{1}{n!} [\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k 2^{n-k} - \binom{n}{0} 2^0 2^n] = \frac{1}{n!} [(2+2)^n - 2^n] = \frac{1}{n!} [4^n - 2^n]$  d'après la formule du binôme.

4. Par récurrence (simple) sur l'entier  $n$  : (si confusion entre  $n$  et  $p$ , commencer par fixer  $p = 5$ !)

Cas  $n = p$  : montrer que  $\sum_{k=p}^p \binom{k}{p} = \binom{p+1}{p+1}$ . Or  $\binom{p+1}{p+1} = 1$  et  $\sum_{k=p}^p \binom{k}{p} = \binom{p}{p} = 1$ .

Supposons que pour un certain entier  $n \geq p$ ,  $\sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$  et montrons que  $\sum_{k=p}^{n+1} \binom{k}{p} = \binom{n+2}{p+1}$ .

Or (relation de Chasles),  $\sum_{k=p}^{n+1} \binom{k}{p} = \sum_{k=p}^n \binom{k}{p} + \binom{n+1}{p} = [\text{H.R.}] \binom{n+1}{p+1} + \binom{n+1}{p} = \binom{n+2}{p+1}$  (formule du triangle de Pascal).

Conclure.

### Exercice 2:

1.  $u_1 = \sqrt{1^2 + u_0} = 1$  et  $u_2 = \sqrt{2^2 + u_1} = \sqrt{5}$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = \sqrt{(n+1)^2 + u_n}$

**Attention**, si vous manipulez  $u_{n-1}$  il faut  $n \geq 1$  mais si vous manipulez  $u_n$ , il faut partir de  $n = 0$  (puisque la suite part de  $u_0$ ).

2. Par récurrence, montrons que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n$  existe et  $u_n \geq 0$ .  
 Cas  $n = 0$  :  $u_0 = 0 \geq 0$ .  
 Supposons que pour un certain  $n$ ,  $u_n$  existe et  $u_n \geq 0$ .  
 Alors  $(n+1)^2 + u_n \geq 0 + 0 = 0$  donc  $u_{n+1}$  existe et  $u_{n+1} = \sqrt{(n+1)^2 + u_n} \geq 0$ . Conclure.
3. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n = \sqrt{n^2 + u_{n-1}} \geq \sqrt{n^2}$  (car  $u_{n-1} \geq 0$ ) d'où  $u_n \geq |n| = n$ . Il reste à vérifier le cas  $n = 0$  :  $u_0 = 0 \geq 0$ .  
 Autre méthode : par récurrence ... mais réalisez que vous n'utilisez pas HR donc que la récurrence est inutile !  
 Donc pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \geq n$  et par comparaison,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = +\infty$ .
4.  $n = 0$  :  $u_0 = 0 \leq 0 + 1$ .  
 Supposons que pour un certain  $n$ ,  $u_n \leq n + 1$ , et montrons que  $u_{n+1} \leq n + 2$ .  
 Or  $u_{n+1} = \sqrt{(n+1)^2 + u_n}$  et  $u_n \leq n + 1 \Rightarrow u_{n+1} \leq \sqrt{(n+1)^2 + (n+1)}$  (par croissance de  $\sqrt{\cdot}$ )  
 $\Rightarrow u_{n+1} \leq \sqrt{(n+1)(n+2)} \Rightarrow u_{n+1} \leq \sqrt{(n+2)^2} = (n+2)$ , car  $n+1 \leq n+2$ . Conclure.
5. On a :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $n \leq u_n \leq n + 1$  d'où  $1 = \frac{n}{n} \leq \frac{u_n}{n} \leq \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$ . Par encadrement :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = 1$ .
6. Quantité conjuguée : pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n - n = \sqrt{n^2 + u_{n-1}} - n = \frac{(\sqrt{n^2 + u_{n-1}} - n)(\sqrt{n^2 + u_{n-1}} + n)}{\sqrt{n^2 + u_{n-1}} + n} = \frac{n^2 + u_{n-1} - n^2}{\sqrt{n^2 + u_{n-1}} + n}$   
 $= \frac{u_{n-1}}{\sqrt{n^2 + u_{n-1}} + n} = \frac{u_{n-1}}{u_n + n}$ . D'où  $u_n - n = \frac{u_{n-1}}{n(\frac{u_n}{n} + 1)} = \frac{u_{n-1}}{n} \times \frac{1}{\frac{u_n}{n} + 1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \times \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$  par 5.  
 En effet,  $\frac{u_{n-1}}{n} = \frac{u_{n-1}}{n-1} \times \frac{n-1}{n} = \frac{u_{n-1}}{n-1} \times (1 - \frac{1}{n}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \times 1 = 1$ .  
 Autre méthode : par encadrement. On a pour  $n \geq 1$ ,  $n - 1 \leq u_{n-1} \leq n$  et  
 $n \leq u_n \leq n + 1 \Rightarrow 2n \leq u_n + n \leq 2n + 1 \Rightarrow \frac{1}{2n+1} \leq \frac{1}{u_n + n} \leq \frac{1}{2n}$  d'où par produit,  $\frac{n-1}{2n+1} \leq \frac{u_{n-1}}{u_n + n} \leq \frac{n}{2n}$ .  
 On en déduit  $\frac{1-1/n}{2+1/n} \leq u_n - n \leq \frac{1}{2}$ . Il reste à conclure avec le théorème d'encadrement !

### Question facultative : preuve du binôme de Newton

- Cas  $n=0$  :  $(a+b)^0 = 1$  et  $\sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} a^k b^{0-k} = [\text{un seul terme } k=0] = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1 * 1 * 1 = 1$ .
- Supposons que pour un certain  $n \in \mathbb{N}$  fixé,  $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ . Montrons  $(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}$ .  
 Or  $(a+b)^{n+1} = (a+b)^n \times (a+b) \stackrel{H.R.}{=} (\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k})(a+b) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}$   
 $= \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} a^j b^{n+1-j} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} = \sum_{k=1}^{n+1} [\binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}] + \binom{n}{0} a^{n+1} b^0 + \binom{n}{n} a^0 b^{n+1}$   
 $= \sum_{k=1}^{n+1} a^k b^{n+1-k} [\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}] + a^{n+1} + b^{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} a^k b^{n+1-k} \binom{n+1}{k} + a^{n+1} + b^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} a^k b^{n+1-k} \binom{n+1}{k}$   
 puisque  $a^{n+1} = a^{n+1} b^0 \binom{n+1}{0}$  et  $b^{n+1} = a^0 b^{n+1} \binom{n+1}{n+1}$ .
- Conclure.