PROBLÈME 1 - UNE ÉLECTION EN DEUX TOURS... OU TROIS

A - Les candidats en lice

Lors d'une élection, 7 candidats se présentent : 6 hommes et une femme.
On suppose qu'il n'y jamais d'ex-aequo.

1. De combien de façons ces candidats peuvent-ils être classés à l'issue du scrutin s'il n'y a pas d'ex-aequo ?
2. Combien y a-t-il de trios de tête possibles (c'est-à-dire de possibilités pour les premier, deuxième et troisième) ?
3. Combien y a-t-il de trios de tête possibles avec la candidate à l'une des trois places ?

B - Les reports de voix pour le second tour

À l'issue du premier tour, le candidat A a obtenu 40% des suffrages, le candidat B a obtenu 30% et les 30% restant se répartissent entre les autres candidats, les votes blancs et nuls.
Seuls les candidats A et B restent en lice pour le second tour et on suppose que les votants du second tour sont exactement ceux ayant voté au premier (on ne considère donc pas les abstentionnistes du premier ou du second tour).
Après une relecture approfondie des programmes des deux candidats, il s'avère que :

- un individu ayant voté pour A au premier tour a une probabilité égale à $0,7$ de confirmer son vote au second tour, une probabilité égale à $0,2$ de finalement voter pour B au second tour et une probabilité égale à $0,1$ de voter blanc ou nul au second tour ;
- un individu ayant voté pour B au premier tour a une probabilité égale à $0,85$ de confirmer son vote au second tour, une probabilité égale à $0,05$ de finalement voter pour A au second tour et une probabilité égale à $0,1$ de voter blanc ou nul au second tour ;
- un individu ayant voté pour un autre candidat, voté blanc ou voté nul au premier tour a une probabilité égale à $0,3$ de voter pour A au second tour, une probabilité égale à $0,4$ de voter pour B au second tour et une probabilité égale à $0,3$ de voter blanc ou nul au second tour.

4. On choisit un électeur au hasard.
   Quelle est la probabilité qu'il vote pour A au second tour ? Quelle est la probabilité qu'il vote pour B au second tour ?
5. On choisit un électeur au hasard.
   Sachant que cet électeur a voté pour B au second tour, quelle est la probabilité qu'il ait également voté pour B au premier tour ?
6. Quelle est la probabilité qu'un électeur, choisi au hasard, ait voté de la même façon aux deux tours (c'est-à-dire deux fois pour A, deux fois pour B ou deux fois ni pour A, ni pour B) ?

C - La campagne sur internet

Lors des derniers jours de la campagne de l'entre-deux-tours, l'équipe de communiquants de l'un des deux candidats décide d'être très active sur les réseaux sociaux en postant régulièrement des messages tantôt valorisant le programme de leur candidat, tantôt dénigrant celui de leur adversaire. On suppose que :

- si le k-ième message valorise le programme de son candidat alors il y a une probabilité égale à $0,6$ que le suivant valorise à nouveau ce programme (donc une probabilité égale à $0,4$ qu'il dénigre le programme du candidat adverse) ;
- si le k-ième message dénigre le programme du candidat adverse alors il y a une probabilité égale à $0,8$ que le suivant valorise le programme de son candidat (donc une probabilité égale à $0,2$ qu'il dénigre à nouveau le programme du candidat adverse).

On note V_k l'événement « le k-ième message valorise le programme de son candidat ».

7. Quelles sont les probabilités directement données par l'énoncé ?
8. Soit $k \in \mathbb{N}$, exprimer $\mathbb{P}(\mathrm{V}_{k+1})$ en fonction de $\mathbb{P}(\mathrm{V}_k)$ (en justifiant avec rigueur).
9. Déterminer l'expression de $\mathbb{P}(\mathrm{V}_k)$ en fonction de $k \in \mathbb{N}$ et de $\mathbb{P}(\mathrm{V}_0)$.
10. Quelle est la limite de la suite $\left(\mathbb{P}(\mathrm{V}_k)\right)_{k\in\mathbb{N}}$?

D - Épilogue

Le scrutin du second tour ayant été largement entaché de fraudes, les candidats A et B décident, dans la plus pure tradition française, de régler leur différend par un duel au pistolet.
Les candidats vont tirer à tour de rôle, le premier qui touche son adversaire a gagné. Le candidat A tire en premier et a, à chaque tir, la probabilité p_1 de toucher son adversaire alors que, pour le candidat B, cette probabilité est égale à p_2 (avec $p_1 > 0$ et $p_2 > 0$).
On supposera les différents tirs mutuellement indépendants (bien que le succès d'un tir mette un terme à l'expérience).
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note :

- A_n l'événement «le tireur A effectue un n-ième tir et touche son adversaire» ;
- B_n l'événement «le tireur B effectue un n-ième tir et touche son adversaire» ;
- C_n l'événement «le n-ième tir est réussi».

11. Calculer $\mathbb{P}(C_1)$, $\mathbb{P}(C_2)$ et $\mathbb{P}(C_3)$.

12. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer la probabilité de $\mathbb{P}(C_n)$.

13. Déterminer la limite quand N tend vers $+\infty$ de $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \mathbb{P}(C_n)$.

---

1. Un classement est une *permutation* de l'ensemble à 7 éléments constitué par les candidats donc il y a 7! classements possibles.

2. Il s'agit de compter les 3-listes sans répétitions dans un ensemble à 7 éléments donc il y en a $\frac{7!}{4!} = 7 \times 6 \times 5 = 210$.

3. Puisque l'une des trois personnes est imposée, il y a $\binom{6}{2} \times \binom{1}{1}$ possibilités pour l'ensemble des trois personnes concernées qu'il reste à permuter pour obtenir tous les trios possibles donc il y a au total :

$$\binom{6}{2} \times 3! = \frac{6 \times 5}{2} \times 3 \times 2 = 90.$$

4. Pour i valant 1 ou 2, on note :

- $\mathscr{A}_i$ l'événement «l'individu vote pour A au i-ème tour» ;
- $\mathscr{B}_i$ l'événement «l'individu vote pour B au i-ème tour» ;
- $\mathscr{C}_i$ l'événement «l'individu ne vote ni pour A, ni pour B au i-ème tour».

Les événements $\mathscr{A}_1, \mathscr{B}_1$ et $\mathscr{C}_1$ forment un système complet d'événements de probabilités non nulles donc la formule des probabilités totales donne :

$$\mathbb{P}(\mathscr{A}_2) = \mathbb{P}(\mathscr{A}_1)\mathbb{P}_{\mathscr{A}_1}(\mathscr{A}_2) + \mathbb{P}(\mathscr{B}_1)\mathbb{P}_{\mathscr{B}_1}(\mathscr{A}_2) + \mathbb{P}(\mathscr{C}_1)\mathbb{P}_{\mathscr{C}_1}(\mathscr{A}_2),$$

soit :

$$\mathbb{P}(\mathscr{A}_2) = 0,4 \times 0,7 + 0,3 \times 0,05 + 0,3 \times 0,3 = 0,385.$$

De même :

$$\mathbb{P}(\mathscr{B}_2) = \mathbb{P}(\mathscr{A}_1)\mathbb{P}_{\mathscr{A}_1}(\mathscr{B}_2) + \mathbb{P}(\mathscr{B}_1)\mathbb{P}_{\mathscr{B}_1}(\mathscr{B}_2) + \mathbb{P}(\mathscr{C}_1)\mathbb{P}_{\mathscr{C}_1}(\mathscr{B}_2),$$

soit :

$$\mathbb{P}(\mathscr{B}_2) = 0,4 \times 0,2 + 0,3 \times 0,85 + 0,3 \times 0,4 = 0,455.$$

5. On cherche $\mathbb{P}_{\mathscr{B}_2}(\mathscr{B}_1)$.
Les événements $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ étant de probabilités non nulles, on peut utiliser la formule de Bayes :

$$\mathbb{P}_{\mathscr{B}_2}(\mathscr{B}_1) = \frac{\mathbb{P}(\mathscr{B}_1)\mathbb{P}_{\mathscr{B}_1}(\mathscr{B}_2)}{\mathbb{P}(\mathscr{B}_2)},$$

soit :

$$\mathbb{P}_{\mathscr{B}_2}(\mathscr{B}_1) = \frac{0,3 \times 0,85}{0,455} \approx 0,56.$$

6. Notons $\mathscr{D}$ l'événement «l'individu a voté de la même façon aux deux tours», on a :

$$\mathscr{D} = (\mathscr{A}_1 \cap \mathscr{A}_2) \sqcup (\mathscr{B}_1 \cap \mathscr{B}_2) \sqcup (\mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_2).$$

Il s'agit d'une réunion d'événements incompatibles donc :

$$\mathbb{P}(\mathscr{D}) = \mathbb{P}(\mathscr{A}_1 \cap \mathscr{A}_2) + \mathbb{P}(\mathscr{B}_1 \cap \mathscr{B}_2) + \mathbb{P}(\mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_2).$$

D'autre part, la formule de conditionnement donne :

$$\mathbb{P}(\mathscr{D}) = \mathbb{P}(\mathscr{A}_1)\mathbb{P}_{\mathscr{A}_1}(\mathscr{A}_2) + \mathbb{P}(\mathscr{B}_1)\mathbb{P}_{\mathscr{B}_1}(\mathscr{B}_2) + \mathbb{P}(\mathscr{C}_1)\mathbb{P}_{\mathscr{C}_1}(\mathscr{C}_2),$$

soit :

$$\mathbb{P}(\mathscr{D}) = 0,4 \times 0,7 + 0,3 \times 0,85 + 0,3 \times 0,3 = 0,625.$$

7. L'énoncé donne :

$$\mathbb{P}_{V_k}(V_{k+1}) = 0,6,\ \mathbb{P}_{V_k}(\overline{V_{k+1}}) = 0,4,$$
$$\mathbb{P}_{\overline{V_k}}(V_{k+1}) = 0,8 \text{ et } \mathbb{P}_{\overline{V_k}}(\overline{V_{k+1}}) = 0,2.$$

8. Les événements V_k et $\overline{V_k}$ forment un système complet d'événements de probabilités non nulles donc la formule des probabilités totales donne :

$$\mathbb{P}(V_{k+1}) = \mathbb{P}(V_k)\mathbb{P}_{V_k}(V_{k+1}) + \mathbb{P}(\overline{V_k})\mathbb{P}_{\overline{V_k}}(V_{k+1}),$$

d'où :

$$\mathbb{P}(V_{k+1}) = \mathbb{P}(V_k) \times 0,6 + \big(1 - \mathbb{P}(V_k)\big) \times 0,8,$$

soit :

$$\mathbb{P}(V_{k+1}) = -0,2 \times \mathbb{P}(V_k) + 0,8.$$

9. La suite $\big(\mathbb{P}(V_k)\big)_{k \in \mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique, on commence donc par résoudre une équation d'inconnue $\ell \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\ell = -0,2 \times \ell + 0,8 &\iff 1,2 \times \ell = 0,8\\ &\iff \ell = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on peut alors écrire :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(V_{k+1}) - \frac{2}{3} &= \frac{4}{5} - \frac{1}{5} \times \mathbb{P}(V_k) - \frac{2}{3}\\ &= -\frac{1}{5}\Big(\mathbb{P}(V_k) - \frac{2}{3}\Big)\end{aligned}$$

donc la suite $\big(\mathbb{P}(V_k) - \frac{2}{3}\big)_{k \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison $-\frac{1}{5}$.
On en déduit que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$\mathbb{P}(V_k) - \frac{2}{3} = \Big(-\frac{1}{5}\Big)^k \Big(\mathbb{P}(V_0) - \frac{2}{3}\Big),$$

d'où :

$$\mathbb{P}(V_k) = \frac{2}{3} - \Big(-\frac{1}{5}\Big)^k \Big(\mathbb{P}(V_0) - \frac{2}{3}\Big).$$

10. Puisqu'il s'agit d'une suite géométrique de raison dans $]-1, 1[$, on a :

$$\Big(-\frac{1}{5}\Big)^k \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0.$$

Il s'ensuit que :

$$\mathbb{P}(V_k) \xrightarrow[k \to +\infty]{} \frac{2}{3}.$$

Ainsi, quelle que soit la nature du premier message, la probabilité qu'un message valorise le programme du candidat tend vers $\frac{2}{3}$.

11. On a $C_1 = A_1$ et l'énoncé donne donc directement $\mathbb{P}(C_1) = p_1$.
On a $C_2 = \overline{A_1} \cap B_1$ et l'énoncé suppose l'indépendance mutuelle des tirs ce qui induit l'indépendance des événements $\overline{A_1}$ et B_1 d'où :

$$\mathbb{P}(C_2) = \mathbb{P}(\overline{A_1})\mathbb{P}(B_1) = (1-p_1)p_2.$$

On a $C_3 = \overline{A_1} \cap \overline{B_1} \cap A_2$ et, à nouveau, l'indépendance mutuelle donne :

$$\mathbb{P}(C_3) = \mathbb{P}(\overline{A_1})\mathbb{P}(\overline{B_1})\mathbb{P}(A_2) = (1-p_1)(1-p_2)p_1.$$

12. On considère deux cas selon la parité de n.
⋄ Si n est impair alors on écrit $n = 2k+1$ avec $k \in \mathbb{N}$ et il vient :

$$C_{2k+1} = \left(\bigcap_{i=1}^{k} \overline{A_i} \cap \overline{B_i}\right) \cap A_{k+1},$$

d'où, du fait de l'indépendance mutuelle de ces événements :

$$\mathbb{P}(C_{2k+1}) = \left(\prod_{i=1}^{k} \mathbb{P}(\overline{A_i})\mathbb{P}(\overline{B_i})\right) \times \mathbb{P}(A_{k+1}),$$

soit :

$$\mathbb{P}(C_{2k+1}) = \Big((1-p_1)(1-p_2)\Big)^k p_1.$$

⋄ Si n est pair alors on écrit $n = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ et il vient :

$$C_{2k} = \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} \overline{A_i} \cap \overline{B_i}\right) \cap \overline{A_k} \cap B_k,$$

d'où, du fait de l'indépendance mutuelle de ces événements :

$$\mathbb{P}(C_{2k}) = \left(\prod_{i=1}^{k-1} \mathbb{P}(\overline{A_i})\mathbb{P}(\overline{B_i})\right) \times \mathbb{P}(\overline{A_k}) \times \mathbb{P}(B_k),$$

soit :

$$\mathbb{P}(C_{2k}) = \Big((1-p_1)(1-p_2)\Big)^{k-1} (1-p_1)p_2.$$

13. Posons, pour tout $N \in \mathbb{N}$, $u_N = \sum_{n=1}^{N} \mathbb{P}(C_n)$.

⋄ Dans le cas où N est pair, on écrit $N = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ et il vient :

$$\begin{aligned} u_{2k} &= \sum_{n=1}^{k} \Big(\mathbb{P}(C_{2n}) + \mathbb{P}(C_{2n-1})\Big) \\ &= \sum_{n=1}^{k} \Big((1-p_1)^{n-1}(1-p_2)^{n-1}(1-p_1)p_2 + (1-p_1)^{n-1}(1-p_2)^{n-1}p_1\Big) \\ &= \Big((1-p_1)p_2 + p_1\Big) \sum_{n=0}^{k-1} \Big((1-p_1)(1-p_2)\Big)^n. \end{aligned}$$

Comme $0 < (1-p_1)(1-p_2) < 1$, on a :

$$\begin{aligned} u_{2k} &= \Big((1-p_1)p_2 + p_1\Big) \frac{1 - \Big((1-p_1)(1-p_2)\Big)^k}{1-(1-p_1)(1-p_2)} \\ &\xrightarrow[k\to+\infty]{} \Big((1-p_1)p_2 + p_1\Big) \frac{1}{1-(1-p_1)(1-p_2)}, \end{aligned}$$

or :

$$(1-p_1)p_2 + p_1 = p_2 - p_1p_2 + p_1 = 1 - (1-p_1)(1-p_2),$$

donc on a : $u_{2k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 1$.

⋄ Dans le cas où N est impair, on écrit $N = 2k+1$ avec $k \in \mathbb{N}$ et il vient :

$$u_{2k+1} = u_{2k} + \mathbb{P}(C_{2k+1}),$$

soit :

$$u_{2k+1} = u_{2k} + \Big((1-p_1)(1-p_2)\Big)^k p_1.$$

Comme $0 < (1-p_1)(1-p_2) < 1$, le terme de droite tend vers 0 donc on a à nouveau :

$$u_{2k+1} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 1.$$

Finalement, on a :

$$u_{2k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 1 \quad \text{et} \quad u_{2k+1} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 1,$$

donc la suite converge et on a :

$$\sum_{n=1}^{N} \mathbb{P}(C_n) \xrightarrow[N\to+\infty]{} 1.$$

On en déduit que le duel se termine presque sûrement.

PROBLÈME 2 - TIRAGES SANS REMISE PUIS AVEC REMISE

(D'APRÈS ECRICOME 2013, SÉRIE E)

Soit n et b deux entiers avec $n \geqslant 1$ et $b \geqslant 2$. On considère une urne contenant n boules noires et b boules blanches, toutes indiscernables.
Un joueur A effectue des tirages successifs d'une boule **sans remise** dans l'urne jusqu'à obtenir une boule blanche.
Il laisse alors la place au joueur B qui effectue des tirages successifs d'une boule **avec remise** dans l'urne jusqu'à obtenir une boule blanche.
On suppose qu'il existe un espace probabilisé, d'univers Ω et de probabilité $\mathbb{P}$, permettant de modéliser cette espérience.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note :

- X_k l'événement «le joueur A tire k boules noires avant de tirer une boule blanche» ;
- Y_k l'événement «le joueur B tire k boules noires avant de tirer une boule blanche».

Par exemple, si $n = 3$ et $b = 7$ et si les tirages successifs ont donné successivement des boules noire, blanche, noire, noire, noire, noire et blanche, alors :

- A a effectué deux tirages, il a tiré une boule noire puis une boule blanche de l'urne ;
- l'urne contenait alors 8 boules dont deux noires et six blanches ;
- B a alors effectué cinq tirages successifs dans cette urne, il a pioché 4 boules noires qu'il a reposées dans l'urne après chaque tirage puis il a pioché une boule blanche ;
- les événements X_1 et Y_4 sont donc réalisés.

A - Étude du cas particulier où b et n valent 2

On suppose donc ici que l'urne contient initialement 2 boules blanches et 2 boules noires.

14. Calculer les probabilités des événements X_0, X_1 et X_2.

15. Montrer que :

$$\mathbb{P}(Y_0) = \frac{1}{2}.$$

16. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, calculer les probabilités suivantes :

$$\mathbb{P}(X_0 \cap Y_i),\ \mathbb{P}(X_1 \cap Y_i) \text{ et } \mathbb{P}(X_2 \cap Y_i).$$

17. En déduire, pour tout $i \in \mathbb{N}$, l'expression de $\mathbb{P}(Y_i)$ puis déterminer la limite (éventuelle) quand N tend vers $+\infty$ de $\displaystyle\sum_{i=0}^{N} \mathbb{P}(Y_i)$.

B - Retour au cas général

18. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, calculer $\mathbb{P}(X_k)$ et montrer que : $\mathbb{P}(X_k) = \dfrac{\binom{n-k+b-1}{b-1}}{\binom{n+b}{b}}$.

19. Utiliser la question qui précède pour justifier que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{k+b-1}{b-1} = \binom{n+b}{b}$.

Par conséquent on vient de démontrer la formule suivante :

$$(\mathscr{S}) \qquad \forall N \in \mathbb{N},\ \forall a \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{N} \binom{k+a}{a} = \binom{N+a+1}{a+1}.$$

20. Soit $k \geqslant 1$, $N \geqslant 1$ et $a \in \mathbb{N}$. Comparer $k\dbinom{k+a}{a}$ et $(a+1)\dbinom{k+a}{a+1}$ puis justifier que :

$$\sum_{k=0}^{N} k\binom{k+a}{a} = (a+1)\sum_{k=0}^{N-1} \binom{k+a+1}{a+1}.$$

21. À l'aide des questions précédentes, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (n-k)\mathbb{P}(X_k)$ puis $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X_k)$.

22. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ et tout $i \in \mathbb{N}$, calculer $\mathbb{P}(X_k \cap Y_i)$.
Les événements X_k et Y_i sont-ils indépendants ?

14. À chaque étape, les différents tirages sont équiprobables donc il s'agit de compter le nombre de cas favorables sur le nombre de cas possibles.

On note $\mathscr{B}_k$ l'événement «on tire une boule blanche au k-ième tirage».

On a ainsi :

$$\mathbb{P}(X_0) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2},$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1) &= \mathbb{P}(\overline{\mathscr{B}_1})\mathbb{P}_{\overline{\mathscr{B}_1}}(\mathscr{B}_2)\\ &= \frac{2}{4}\frac{2}{3}\\ &= \frac{1}{3},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_2) &= \mathbb{P}(\overline{\mathscr{B}_1})\mathbb{P}_{\overline{\mathscr{B}_1}}(\overline{\mathscr{B}_2})\mathbb{P}_{\overline{\mathscr{B}_1}\cap\overline{\mathscr{B}_2}}(\mathscr{B}_3)\\ &= \frac{2}{4}\frac{1}{3}\frac{2}{2}\\ &= \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

15. Les événements X_0, X_1 et X_2 forment un système complet d'événements de probabilités non nulles donc :

$$\mathbb{P}(Y_0) = \mathbb{P}(X_0)\mathbb{P}_{X_0}(Y_0) + \mathbb{P}(X_1)\mathbb{P}_{X_1}(Y_0) + \mathbb{P}(X_2)\mathbb{P}_{X_2}(Y_0),$$

d'où :

$$\mathbb{P}(Y_0) = \frac{1}{2}\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\frac{1}{1} = \frac{1}{2}.$$

16. Tout d'abord, pour $k \in [\![0,2]\!]$, on a :

$$\mathbb{P}(X_k \cap Y_i) = \mathbb{P}(X_k)\mathbb{P}_{X_k}(Y_i).$$

Lorsque l'événement X_k est réalisé, il reste dans l'urne $2-k$ boules noires et une boule blanche lorsque B commence ses tirages. Sachant l'événement X_k réalise, l'événement Y_i est l'événement :

$$\overline{\mathscr{B}_{k+2}} \cap \cdots \cap \overline{\mathscr{B}_{k+i+1}} \cap \mathscr{B}_{k+i+2}.$$

Les tirages étant effectués avec remise, on peut supposer l'indépendance mutuelle de ces événements donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{X_k}(Y_i) &= \prod_{j=k+2}^{k+i+1}\mathbb{P}(\overline{\mathscr{B}_j}) \times \mathbb{P}(\mathscr{B}_{k+i+2}))\\ &= \prod_{j=k+2}^{k+i+1}\frac{2-k}{3-k} \times \frac{1}{3-k}\\ &= \left(\frac{2-k}{3-k}\right)^i \times \frac{1}{3-k}.\end{aligned}$$

On en déduit pour $k=0$:

$$\mathbb{P}(X_0 \cap Y_i) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^i \times \frac{1}{3} = \frac{2^{i-1}}{3^{i+1}},$$

pour $k=1$:

$$\mathbb{P}(X_1 \cap Y_i) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^i \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}\frac{1}{2^{i+1}},$$

et pour $k=2$:

$$\mathbb{P}(X_2 \cap Y_i) = \frac{1}{6}\left(\frac{0}{1}\right)^i \times \frac{1}{1} = \begin{cases}\frac{1}{6} & \text{si } i=0\\ 0 & \text{si } i \geqslant 1\end{cases}.$$

17. La formule des probabilités totales appliquée avec le système complet d'événements formé par X_0, X_1 et X_2 donne :

$$\mathbb{P}(Y_i) = \mathbb{P}(X_0 \cap Y_i) + \mathbb{P}(X_1 \cap Y_i) + \mathbb{P}(X_2 \cap Y_i).$$

On a déjà $\mathbb{P}(Y_0) = \frac{1}{2}$ et, pour $i \geqslant 1$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y_i) &= \mathbb{P}(X_0 \cap Y_i) + \mathbb{P}(X_1 \cap Y_i) + \mathbb{P}(X_2 \cap Y_i)\\ &= \frac{2^{i-1}}{3^{i+1}} + \frac{1}{3}\frac{1}{2^{i+1}} + 0\\ &= \frac{1}{6}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^i + \left(\frac{1}{2}\right)^i\right).\end{aligned}$$

Pour $N \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sum_{i=0}^{N}\mathbb{P}(Y_i) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{N}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^i + \left(\frac{1}{2}\right)^i\right),$$

d'où puisque $\frac{2}{3} \neq 1$ et $\frac{1}{2} \neq 1$:

$$\sum_{i=0}^{N}\mathbb{P}(Y_i) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\frac{2}{3}\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^N}{1-\frac{2}{3}} + \frac{1}{6}\frac{1}{2}\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^N}{1-\frac{1}{2}},$$

puis :

$$\sum_{i=0}^{N}\mathbb{P}(Y_i) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^N\right) + \frac{1}{6}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^N\right).$$

On en déduit :

$$\sum_{i=0}^{N}\mathbb{P}(Y_i) \xrightarrow[N\to+\infty]{} 1.$$

18. On a pour $k \in [\![1,n]\!]$:

$$X_k = \left(\bigcap_{j=1}^{k}\overline{\mathscr{B}_j}\right) \cap \mathscr{B}_{k+1},$$

et l'événement $\bigcap_{j=1}^{k}\overline{\mathscr{B}_j}$ est de probabilité non nulle donc on peut utiliser la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_k) = {}&\mathbb{P}(\overline{\mathscr{B}_1})\mathbb{P}_{\overline{\mathscr{B}_1}}(\overline{\mathscr{B}_2})\mathbb{P}_{\overline{\mathscr{B}_1}\cap\overline{\mathscr{B}_2}}(\overline{\mathscr{B}_3})\\ &\cdots\mathbb{P}_{\overline{\mathscr{B}_1}\cap\cdots\cap\overline{\mathscr{B}_{k-1}}}(\overline{\mathscr{B}_k})\mathbb{P}_{\overline{\mathscr{B}_1}\cap\cdots\cap\overline{\mathscr{B}_k}}(\mathscr{B}_k),\end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_k) = {}&\frac{n}{n+b}\frac{n-1}{n+b-1}\frac{n-2}{n+b-2}\\ &\cdots\frac{n-(k-1)}{n+b-(k-1)}\frac{b}{n+b-k},\end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_k) &= \frac{n!}{(n-k)!}\frac{(n+b-k-1)!}{(n+b)!}b\\ &= \frac{n!b!}{(n+b)!}\frac{(n+b-k-1)!}{(n-k)!(b-1)!}\\ &= \frac{\binom{n-k+b-1}{b-1}}{\binom{n+b}{b}}.\end{aligned}$$

19. Remarquons tout d'abord que :

$$\begin{aligned}\frac{\binom{n+b-1}{b-1}}{\binom{n+b}{b}} &= \frac{(n+b-1)!}{(b-1)!n!}\frac{b!n!}{(n+b)!}\\ &= \frac{b}{n+b}\\ &= \mathbb{P}(X_0),\end{aligned}$$

donc la formule précédente est encore vraie pour $k=0$.

Comme les événements $X_0, X_1, \ldots, X_n$ forment un système complet d'événements, on en déduit :

$$\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X_k) = 1,$$

soit :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n-k+b-1}{b-1}}{\binom{n+b}{b}} = 1,$$

puis :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n-k+b-1}{b-1} = \binom{n+b}{b}.$$

En posant $\ell = n-k$, il vient :

$$\sum_{\ell=0}^{n} \binom{\ell+b-1}{b-1} = \binom{n+b}{b}.$$

20. Tout d'abord, on a :

$$\begin{aligned} k\binom{k+a}{a} &= k\frac{(k+a)!}{k!a!} \\ &= \frac{(k+a)!}{(k-1)!a!} \\ &= (a+1)\frac{(k+a)!}{(k-1)!(a+1)!} \\ &= (a+1)\binom{k+a}{a+1}. \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N} k\binom{k+a}{a} &= \sum_{k=1}^{N} k\binom{k+a}{a} \\ &= \sum_{k=1}^{N} (a+1)\binom{k+a}{a+1} \\ &= \sum_{\ell=0}^{N-1} (a+1)\binom{\ell+a+1}{a+1}. \end{aligned}$$

21. On a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} (n-k)\mathbb{P}(X_k) &= \sum_{k=0}^{n} (n-k)\frac{\binom{n-k+b-1}{b-1}}{\binom{n+b}{b}} \\ &= \frac{1}{\binom{n+b}{b}} \sum_{k=0}^{n} (n-k)\binom{(n-k)+b-1}{b-1} \\ &= \frac{1}{\binom{n+b}{b}} \sum_{\ell=0}^{n} \ell\binom{\ell+b-1}{b-1} \text{ en posant } \ell = n-k \\ &= \frac{1}{\binom{n+b}{b}} \sum_{k=0}^{n-1} b\binom{k+b}{b} \text{ par } \mathbf{20.} \text{ avec } a = b-1 \\ &= \frac{b}{\binom{n+b}{b}} \binom{n+b}{b+1} \text{ par } \mathscr{S} \text{ avec } N = n-1 \text{ et } a = b \\ &= b\frac{b!n!}{(n+b)!}\,\frac{(n+b)!}{(b+1)!(n-1)!} \\ &= \frac{bn}{b+1}. \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\sum_{k=0}^{n} (n-k)\mathbb{P}(X_k) = n\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X_k) - \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X_k) = n - \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X_k),$$

d'où :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X_k) &= n - \frac{bn}{b+1} \\ &= \frac{nb+n-bn}{b+1} \\ &= \frac{n}{b+1}. \end{aligned}$$

22. On a :

$$\mathbb{P}(X_k \cap Y_i) = \mathbb{P}(X_k)\mathbb{P}_{X_k}(Y_i),$$

soit :

$$\mathbb{P}(X_k \cap Y_i) = \mathbb{P}(X_k)\mathbb{P}_{X_k}(\overline{\mathscr{B}_{k+2}} \cap \cdots \cap \overline{\mathscr{B}_{k+i+1}} \cap \mathscr{B}_{k+i+2},$$

or, sachant l'événement X_k réalisé, les événements $\overline{\mathscr{B}_{k+2}}, \ldots, \overline{\mathscr{B}_{k+i+1}}, \mathscr{B}_{k+i+2}$ peuvent être supposés mutuellement indépendants puisque les tirages sont effectués avec remise. On en déduit :

$$\mathbb{P}(X_k \cap Y_i) = \mathbb{P}(X_k)\mathbb{P}_{X_k}(\overline{\mathscr{B}_{k+2}}) \cdots \mathbb{P}_{X_k}(\overline{\mathscr{B}_{k+i+1}})\mathbb{P}(X_k)(\mathscr{B}_{k+i+2}),$$

c'est-à-dire :

$$\mathbb{P}(X_k \cap Y_i) = \mathbb{P}(X_k)\left(\frac{n-k}{n+b-k-1}\right)^i \frac{b-1}{n+b-k-1},$$

ou encore :

$$\mathbb{P}(X_k \cap Y_i) = \frac{\binom{n-k+b-1}{b-1}}{\binom{n+b}{b}}\left(\frac{n-k}{n+b-k-1}\right)^i \frac{b-1}{n+b-k-1},$$

Les événements X_k et Y_i sont indépendants si et seulement si :

$$\mathbb{P}(X_k \cap Y_i) = \mathbb{P}(X_k)\mathbb{P}(Y_i),$$

ce qui dans ce cas revient à la relation :

$$\mathbb{P}(Y_i) = \left(\frac{n-k}{n+b-k-1}\right)^i \frac{b-1}{n+b-k-1}.$$

Cette dernière n'étant pas constante lorsque k varie, il s'ensuit que X_k et Y_i ne sont pas indépendants (en général).

Cette dernière question était mal posée, il aurait fallu lire : «A-t-on X_k et Y_i indépendants pour tous k et i ?»