DEVOIR MAISON N° 6 – CORRIGÉ

EXERCICE 1 – AUTOUR DE LA FONCTION Arctan

PREMIÈRE PARTIE

1. L'ensemble de définition de la fonction tangente est $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
Soient $a, b \in D$ tels que $a - b \in D$.

$$\begin{aligned}
\tan(a-b) &= \frac{\sin(a-b)}{\cos(a-b)} \\
&= \frac{\sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)}{\cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)} \\
&= \frac{\frac{\sin(a)\cos(b)}{\cos(a)\cos(b)} - \frac{\sin(b)\cos(a)}{\cos(a)\cos(b)}}{\frac{\cos(a)\cos(b)}{\cos(a)\cos(b)} + \frac{\sin(a)\sin(b)}{\cos(a)\cos(b)}} && \text{car} \cos(a) \neq 0,\ \cos(b) \neq 0 \\
&= \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\tan(a-b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}}$$

2. Soient $a, b \in D$ tels que $a + b \in D$. Alors $-b$ appartient à D et on peut appliquer la formule précédente en remplaçant b par $-b$, sachant que $\tan(-b) = -\tan(b)$ (la fonction tangente est impaire).

$$\boxed{\tan(a+b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}}$$

3. Soit $a \in D$ tel que $2a \in D$. Ceci signifie que $a \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$ et $a \not\equiv \frac{\pi}{4}\ [\frac{\pi}{2}]$. En remplaçant b par a dans la formule n° 2, on obtient

$$\boxed{\tan(2a) = \frac{2\tan(a)}{1 - \tan^2(a)}}$$

4. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$. Notons $a = \text{Arctan}(\alpha) \in [0, \frac{\pi}{2}[$ et $b = \text{Arctan}(\beta) \in [0, \frac{\pi}{2}[$. Alors $a - b$ appartient à $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, donc a, b et $a - b$ appartiennent à D. On peut appliquer la formule de la question 1.

$$\tan(a-b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}$$

Or,

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \tan(\text{Arctan}(y)) = y \qquad (\star)$$

On obtient que $\tan(a) = \alpha$ et $\tan(b) = \beta$, donc $\tan(a-b) = \dfrac{\alpha - \beta}{1 + \alpha\beta}$. De plus,

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \quad \text{Arctan}(\tan(x)) = x \qquad (\star\star)$$

Puisque $a - b$ appartient à $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, on obtient

$$a - b = \text{Arctan}(\tan(a-b)) = \text{Arctan}\left(\frac{\alpha - \beta}{1 + \alpha\beta}\right)$$

puis

$$\boxed{\text{Arctan}(\alpha) - \text{Arctan}(\beta) = \text{Arctan}\left(\frac{\alpha - \beta}{1 + \alpha\beta}\right)}$$

DEUXIÈME PARTIE

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \text{Arctan}\left(\frac{1}{k^2 + k + 1}\right)$.

1. Soit $k \in \mathbb{N}$. D'après la question I.4,

$$\text{Arctan}(k+1) - \text{Arctan}(k) = \text{Arctan}\left(\frac{k - (k+1)}{1 + k(k+1)}\right) = \text{Arctan}\left(\frac{1}{k^2 + k + 1}\right)$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$.
$S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \big(\text{Arctan}(k+1) - \text{Arctan}(k)\big) = \text{Arctan}(n+1) - \text{Arctan}(0) = \text{Arctan}(n+1)$ par télescopage.

3. On a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(n+1) = +\infty$. Or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \text{Arctan}(x) = \frac{\pi}{2}$, donc $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{\pi}{2}}$

TROISIÈME PARTIE

On considère la fonction f définie par $f(x) = \text{Arctan}\left(\sqrt{\dfrac{1 - \cos(x)}{1 + \cos(x)}}\right)$.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$1 + \cos(x) = 0 \Leftrightarrow \cos(x) = -1 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, x = \pi + 2k\pi$$

et si x vérifie cette équation, $1 + \cos(x) > 0$ et $1 - \cos(x) \geqslant 0$, donc

$$\frac{1 - \cos(x)}{1 + \cos(x)} \geqslant 0$$

Justifions alors que f est <u>définie et continue</u> sur $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$. Soient

$$u\colon \begin{array}{ccc} \mathscr{D} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \dfrac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)} \end{array} \quad \text{et} \quad v\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$$

La fonction u est définie et continue sur $\mathscr{D}$ comme quotient de deux fonctions continues (cosinus est continue sur $\mathbb{R}$), le dénominateur ne s'annulant pas sur $\mathscr{D}$. De plus, elle est bien à valeur dans $\mathbb{R}_+$, comme justifié ci-dessus. La fonction v est définie continue sur $\mathbb{R}_+$. Par composée,

$$v\circ u\colon \begin{array}{ccc} \mathscr{D} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{\dfrac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}} \end{array}$$

est définie et continue sur $\mathscr{D}$.
Enfin, la fonction arctangente est définie et continue sur $\mathbb{R}$, donc par composée encore, $f = \mathrm{Arctan}\circ(v\circ u)$ est $\boxed{\text{définie et continue sur } \mathscr{D} = \mathscr{D}_f.}$

2. Montrons que f est 2π-périodique.
— Pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, $x+2\pi$ appartient à $\mathscr{D}_f$.
— Pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, $f(x+2\pi) = f(x)$ car $\cos(x+2_pi) = \cos(x)$.

Donc $\boxed{f \text{ est } 2\pi\text{-périodique.}}$ On peut l'étudier sur $]-\pi,\pi[$.
Parité :
— Pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, $-x$ appartient à $\mathscr{D}_f$.
— Pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, $f(-x) = f(x)$ car $\cos(-x) = \cos(x)$.

Donc $\boxed{f \text{ est paire.}}$ Ceci est encore valable sur $]-\pi,\pi[$ (qui est centré en 0), donc $\boxed{\text{on peut étudier } f \text{ sur } [0,\pi[}$.

3. Soit $x \in \mathscr{D}_f$. Notons $a = \frac{x}{2}$, c'est-à-dire $x = 2a$. En utilisant $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a)$ puis $\cos^2(a) + \sin^2(a) = 1$, on obtient :

$$\frac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)} = \frac{1-\cos(2a)}{1+\cos(2a)} = \frac{1-\cos^2(a)+\sin^2(a)}{1+\cos^2(a)-\sin^2(a)} = \frac{2\sin^2(a)}{2\cos^2(a)} = \tan^2(a) = \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

On en déduit (rappel : $\sqrt{X^2} = |X|$) que

$$\boxed{\sqrt{\frac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}} = \left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|}$$

4. Soit $x \in [0,\pi[$. Alors $\frac{x}{2}$ appartient à $[0,\frac{\pi}{2}[$, donc $\tan(\frac{x}{2}) \geqslant 0$.

$$f(x) = \mathrm{Arctan}\left(\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|\right) = \mathrm{Arctan}\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \frac{x}{2}$$

d'après (★★).
Si $x \in]-\pi,0]$, alors $-x \in [0,\pi[$ et par parité,

$$f(x) = f(-x) = \frac{-x}{2}$$

On peut résumer ceci en :

$$\boxed{\forall x \in]-\pi,\pi[,\ \ f(x) = \frac{|x|}{2}}.$$

Plus généralement, si $x \in]-\pi+2k\pi,\pi+2k\pi[$ (avec $k \in \mathbb{Z}$), alors $x-2k\pi$ appartient à $]-\pi,\pi[$ et par périodicité,

$$f(x) = f(x-2k\pi) = \frac{|x-2k\pi|}{2}.$$

5. On sait que : $\forall x \in]-\pi,\pi[,\ \ f(x) = \dfrac{|x|}{2}$.
Donc $\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur }]-\pi,0[\text{ et strictement croissante sur } [0,\pi[.}$
Par périodicité, f est strictement décroissante sur tout intervalle de la forme $]-\pi+2k\pi,2k\pi[$ ($k \in \mathbb{Z}$) et strictement croissante sur tout intervalle de la forme $]2k\pi,\pi+2k\pi[$ ($k \in \mathbb{Z}$).
On a : $\boxed{\lim\limits_{x\to\pi^-} f(x) = \lim\limits_{x\to\pi^-} \dfrac{|x|}{2} = \dfrac{\pi}{2}}$. Par parité, $\boxed{\lim\limits_{x\to(-\pi)^+} f(x) = \dfrac{\pi}{2}}$.

6. On vient de voir que $\lim\limits_{x\to(-\pi)^+} f(x) = \dfrac{\pi}{2}$.
Par 2π-périodicité, on obtient (sachant que $\pi^+ = (-\pi)^+ + 2\pi$) :

$$\lim_{x\to\pi^+} f(x) = \frac{\pi}{2} = \lim_{x\to\pi^-} f(x).$$

La limite commune étant réelle, on peut prolonger f par continuité en π. Le prolongement $\tilde{f}$ vérifie $\tilde{f}(\pi) = \dfrac{\pi}{2}$.
Par parité, on peut également prolonger f par continuité en $-\pi$ avec $\tilde{f}(-\pi) = \dfrac{\pi}{2}$. Par 2π-périodocité, on peut ensuite prolonger f par continuité en tout réel $x_0 \notin \mathscr{D}_f$. Le prolongement est

$$\tilde{f}\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \mathscr{D}_f \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{si } x = \pi + 2k\pi \notin \mathscr{D}_f,\ \ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \end{array}$$

Par définition cette fonction est continue en tout $x_0 \notin \mathscr{D}_f$. De plus, puisque f est continue sur $\mathscr{D}_f$ c'est aussi le cas de $\tilde{f}$. Donc $\boxed{\tilde{f} \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$

EXERCICE 2 – PROBABILITÉS

1. **Remarque :** l'univers de cette expérience est $\Omega = \{Pile, Face\}^3$, muni d'une probabilité P, que l'on ne peut pas supposer uniforme car la pièce n'est pas équilibrée en général.

   Notons, pour tout $k \in [\![0,3]\!]$, A_k l'événement *« On a obtenu exactement k fois* Pile », et posons, pour tout $i \in [\![1,3]\!]$, F_i l'événement : *« Le i-ième lancer est un* Face » (on évite les noms d'événements avec la lettre P, pour ne pas les confondre avec la probabilité P).
   On a alors :

   (a) $A_0 = F_1 \cap F_2 \cap F_3$. Les événements F_i étant mutuellement indépendants, on en déduit :
   $$\boxed{P(A_0) = P(F_1) \times P(F_2) \times P(F_3) = q \times q \times q = q^3.}$$

   (b) $A_1 = (\bar{F}_1 \cap F_2 \cap F_3) \cup (F_1 \cap \bar{F}_2 \cap F_3) \cup (F_1 \cap F_2 \cap \bar{F}_3)$.
   D'une part, les événements intervenant dans la réunion correspondent à des séries de lancers distinctes deux à deux : ils sont donc deux à deux incompatibles.
   Donc $P(A_1) = P(\bar{F}_1 \cap F_2 \cap F_3) + P(F_1 \cap \bar{F}_2 \cap F_3) + P(F_1 \cap F_2 \cap \bar{F}_3)$.
   Par indépendance mutuelle des F_i, on obtient :
   $P(\bar{F}_1 \cap F_2 \cap F_3) = P(\bar{F}_1) \times P(F_2) \times P(F_3) = p \times q \times q = pq^2$.
   En remarquant que toutes les séries de lancers qui composent l'événement A_1 sont équiprobables (par le même raisonnement que précédemment), il vient finalement : $\boxed{P(A_1) = 3pq^2.}$

   (c) En raisonnant comme ci-dessus,
   $P(A_2) = P(\bar{F}_1 \cap \bar{F}_2 \cap F_3) + P(F_1 \cap \bar{F}_2 \cap \bar{F}_3) + P(\bar{F}_1 \cap F_2 \cap \bar{F}_3)$
   et $P(A_3) = P(\bar{F}_1 \cap \bar{F}_2 \cap \bar{F}_3)$
   On obtient : $\boxed{P(A_2) = 3p^2q \text{ et } P(A_3) = p^3.}$

2. (a) Notons N_ℓ l'événement : *« On a obtenu exactement ℓ boules noires à l'issue du tirage »*.
   On cherche à calculer $P_{A_k}(N_\ell)$

   i. On peut commencer par remarquer que, $\boxed{\text{si } \ell > k,\ P_{A_k}(N_\ell) = 0}$, car le nombre de boules noires obtenues ne peut excéder le nombre de tirages effectués.

   ii. Supposons à présent $k \geqslant \ell$.
   L'expérience aléatoire considérée est un tirage simultané de k boules, dans une urne qui en contient 7. L'univers des possibles Ω_k est donc l'ensemble des parties à k éléments d'un ensemble à 7 éléments (on suppose, pour faire les choses proprement, les boules discernables). Ces parties étant équiprobables, on peut munir Ω_k de la probabilité uniforme.
   Ainsi, $P_{A_k}(N_\ell) = \dfrac{\text{Card}(N_\ell)}{\text{Card}(\Omega_k)}$.
   On sait que $\text{Card}(\Omega_k) = \binom{k}{7}$.
   Reste à calculer $\text{Card}(N_\ell)$: pour former un tirage contenant exactement ℓ boules noires, on choisit lesdites boules noires ($\binom{3}{\ell}$ possibilités), puis les $k-\ell$ boules blanches ($\binom{4}{k-\ell}$ possibilités). Ainsi, $\text{Card}(N_\ell) = \binom{3}{\ell} \times \binom{4}{k-\ell}$.
   Par conséquent,
   $$\boxed{\text{pour } 0 \leqslant \ell \leqslant k \leqslant 3,\ P_{A_k}(N_\ell) = \frac{\binom{3}{\ell} \times \binom{4}{k-\ell}}{\binom{7}{k}}}$$

   (b) La connaissance de la probabilité de l'événement N_ℓ conditionné par l'événement A_k nous incite à utiliser la formule des probabilités totales : puisque (A_0, A_1, A_2, A_3) est un système complet d'événements, on peut écrire :
   $$P(N_\ell) = \sum_{k=0}^{3} P(A_k) P_{A_k}(N_\ell) = \sum_{k=\ell}^{3} P(A_k) P_{A_k}(N_\ell) = \sum_{k=\ell}^{3} \binom{3}{k} p^k q^{3-k} \frac{\binom{3}{\ell} \times \binom{4}{k-\ell}}{\binom{7}{k}}$$
   .

3. L'énoncé incite clairement à utiliser la formule de Bayes :
   $$P_{N_0}(A_0) = \frac{P(A_0) P_{A_0}(N_0)}{P(N_0)} = \frac{q^3 \times 1}{\sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} p^k q^{3-k} \frac{\binom{4}{k}}{\binom{7}{k}}}$$