DEVOIR MAISON N^{o} 6

Pour le lundi 12 décembre 2016

Toute réponse doit être soigneusement justifiée et rédigée.

EXERCICE 1 – AUTOUR DE LA FONCTION Arctan

PREMIÈRE PARTIE

1. Déterminer $\tan(a-b)$ en fonction de $\tan(a)$ et $\tan(b)$. On précisera le domaine de validité de la formule.
2. Déterminer $\tan(a+b)$ en fonction de $\tan(a)$ et $\tan(b)$. On précisera le domaine de validité de la formule.
3. Déterminer $\tan(2a)$ en fonction de $\tan(a)$. On précisera le domaine de validité de la formule.
4. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$. Justifier précisément la relation

$$\operatorname{Arctan}(\alpha) - \operatorname{Arctan}(\beta) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{\alpha-\beta}{1+\alpha\beta}\right).$$

DEUXIÈME PARTIE

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right)$.

1. Pour $k \in \mathbb{N}$, simplifier $\operatorname{Arctan}(k+1) - \operatorname{Arctan}(k)$.
2. En déduire S_n, pour $n \in \mathbb{N}$.
3. Étudier la limite de la suite (S_n).

TROISIÈME PARTIE

On considère la fonction f définie par $f(x) = \operatorname{Arctan}\left(\sqrt{\dfrac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}}\right)$.

1. Déterminer les ensembles de définition et de continuité de f.
2. Étudier la parité et la périodicité de f. Sur quel ensemble peut-on étudier f ?
3. Justifier que, pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, $\sqrt{\dfrac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}} = \left|\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)\right|$.
4. Simplifier l'expression de $f(x)$ suivant la valeur de x.
5. Étudier les limites et les variations de f.
6. Peut-on prolonger f en une fonction continue sur $\mathbb{R}$? Si c'est le cas, on précisera un prolongement.

EXERCICE 2 – PROBABILITÉS

Pour cet exercice, on veillera à citer les propriétés du cours utilisées et à employer le vocabulaire adapté.

Soit $p \in]0,1[$. On dispose d'une pièce de monnaie biaisée, avec laquelle on obtient *Pile* avec la probabilité p et *Face* avec la probabilité $q = 1-p$, ainsi qu'une urne contenant 3 boules noires et 4 boules blanches, indiscernables au toucher.

1. On lance trois fois de suite la pièce de monnaie (les trois lancers étant indépendants).
   Étant donné $k \in [\![0,3]\!]$, calculer la probabilité d'obtenir exactement k fois *Pile*.
2. Après avoir lancé trois fois la pièce, on décide d'extraire simultanément autant de boules dans l'urne que le nombre d'apparitions de *Pile*.
   (a) Soit $(k,\ell) \in [\![0,3]\!]^2$.
   Sachant que l'on a obtenu exactement k fois *Pile* lors des lancers de la pièce, quelle est la probabilité d'obtenir exactement ℓ boules noires à l'issue du tirage ?
   On distinguera, pour ce calcul, le cas où $k < \ell$ du cas où $k \geqslant \ell$.
   (b) Calculer, pour $\ell \in [\![0,3]\!]$, la probabilité de tirer exactement ℓ boules noires.
   Ici, on ne suppose plus connu le nombres de Pile obtenus.
3. On n'a tiré aucune boule noire.
   Quelle est la probabilité de n'avoir obtenu aucun *Pile* lors des lancers de la pièce ?