

Exercice 1.

①

1a) $\forall t \in \mathbb{R}, \varphi'(t) = 1 + 1/(1+t^2) > 0$. On en déduit que φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$; $\lim_{t \rightarrow +\infty} t + \text{Arctan}(t) = +\infty$, $\lim_{t \rightarrow -\infty} t + \text{Arctan}(t) = -\infty$ car $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \text{Arctan}(t) = \pm\pi/2$ et

$\lim_{t \rightarrow -\infty} \text{Arctan}(t) = -\pi/2$. On en déduit le tableau:

t	$-\infty$	$+\infty$
φ	$-\infty$	$+\infty$

φ est continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}$; elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\varphi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$; Or $0 \in \varphi(\mathbb{R})$; on en déduit que $\varphi(x) = 0$ a une unique solution dans $\mathbb{R}$; Comme $\varphi(0) = 0$, on a: $\boxed{\varphi(x) = 0, x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x = 0.}$

1b) $t \mapsto 1/\varphi(t)$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$, donc sur $\mathbb{R}_+^*$. Or $\forall x > 0$, $[x, 2x] \subset \mathbb{R}_+^*$. On en déduit que $\forall x > 0$ $\int_x^{2x} \frac{dt}{\varphi(t)}$ existe car $t \mapsto 1/\varphi(t)$ est continue sur $[x, 2x]$. d'où F définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

1c) On désigne par Φ une primitive de $t \mapsto 1/\varphi(t)$ sur $\mathbb{R}_+^*$. On a donc $\forall x > 0$, $F(x) = \Phi(2x) - \Phi(x)$; on en déduit que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme et composée de fonctions dérivables.

$$\forall x > 0, F'(x) = 2\Phi'(2x) - \Phi'(x) = \frac{2}{\varphi(2x)} - \frac{1}{\varphi(x)} = \frac{2}{2x + \text{Arctan}(2x)} - \frac{1}{x + \text{Arctan}(x)}$$

Résumé: F dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x > 0$, $F'(x) = \frac{2\text{Arctan}(2x) - \text{Arctan}(2x)}{[2x + \text{Arctan}(2x)][x + \text{Arctan}(x)]}$

2a) Pour $x > 0$, posons $g(x) = \text{Arctan}(2x) - 2\text{Arctan}(x)$; g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme et composée de fonctions dérivables et on a:

$$\forall x > 0, g'(x) = \frac{2}{1+(2x)^2} - \frac{2}{1+x^2} = \frac{2(x^2 - 4x^2)}{(1+2x^2)(1+x^2)} = \frac{-6x^2}{(1+2x^2)(1+x^2)} < 0$$

g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et donc $\forall x > 0$, $g(x) \leq g(0) = 0$.

On a donc: $\boxed{\forall x > 0, \text{Arctan}(2x) \leq 2\text{Arctan}(x)}$

2b) On a vu que $\forall x > 0$, $F'(x) = \frac{2\text{Arctan}(2x) - \text{Arctan}(2x)}{(2x + \text{Arctan}(2x))(x + \text{Arctan}(x))}$

Or $\forall x > 0$, $2\text{Arctan}(2x) - \text{Arctan}(2x) > 0$ et $(2x + \text{Arctan}(2x))(x + \text{Arctan}(x)) > 0$ car $\forall t > 0$, $\text{Arctan}(t) > 0$.

Ainsi $\boxed{\forall x > 0, F'(x) > 0}$; F est donc croissante sur $[0, +\infty[$.

3a) $\forall t > 0, 1 - t^2 + \frac{t^4}{1+t^2} = \frac{(1-t^2)(1+t^2) + t^4}{1+t^2} = \frac{1-t^4+t^4}{1+t^2} = \frac{1}{1+t^2}$

$$\text{Donc: } \boxed{\forall t > 0, \frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + \frac{t^4}{1+t^2}}$$

3b) Pour $x \in [0, 1]$, 3a) entraîne: $\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x (1-t^2) dt + \int_0^x \frac{t^4}{1+t^2} dt$

$$\text{Donc } \boxed{\text{Arctan}(x) = \left[t - \frac{t^3}{3}\right]_0^x + \int_0^x \frac{t^4}{1+t^2} dt = x - \frac{x^3}{3} + \int_0^x \frac{t^4}{1+t^2} dt.}$$

Nous avons: $\text{Arctan}(x) - (x - \frac{x^3}{3}) = \int_0^x \frac{t^4}{1+t^2} dt$ ②

Or $\forall x \in [0, 1], \int_0^x \frac{t^4}{1+t^2} dt \geq 0$ car $t \mapsto \frac{t^4}{1+t^2}$ est une fct positive sur $[0, x]$.

$\forall x \in [0, 1], \int_0^x \frac{t^4}{1+t^2} dt \leq \int_0^x t^4 dt = \frac{x^5}{5}$ car $\forall t \in [0, x], \frac{t^4}{1+t^2} \leq \frac{t^4}{1} = t^4$.

On a donc: $0 \leq \text{Arctan}(x) - [x - \frac{x^3}{3}] \leq \frac{x^5}{5}$.

$$\text{D'où } \boxed{\forall x \in [0, 1], x - \frac{x^3}{3} \leq \text{Arctan}(x) \leq x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}.}$$

3c) En utilisant 3b), on a: $\forall x \in [0, \frac{1}{2}], 2x - \frac{8x^3}{3} \leq \text{Arctan}(2x) \leq 2x - \frac{8x^3}{3} + \frac{32x^5}{5}$ (on pose $t=2x$ dans 3b)
et on a (grâce à 3a): $-2x + \frac{2x^3}{3} - \frac{2x^5}{5} \leq -2\text{Arctan}(x) \leq \dots$

On en déduit par somme des inégalités:

$$-\frac{6x^3}{3} - \frac{2x^5}{5} \leq \text{Arctan}(2x) - 2\text{Arctan}(x) \leq 0 - 2x^3 - \frac{2x^5}{5} \leq \text{Arctan}(2x) - 2\text{Arctan}(x)$$

Avec 2a), $\text{Arctan}(2x) - 2\text{Arctan}(x) \leq 0$. On peut donc dire:

$$\boxed{\forall x \in [0, \frac{1}{2}], 2x^3 - \frac{2x^5}{5} \leq \text{Arctan}(2x) - 2\text{Arctan}(x) \leq 0.}$$

4a) $\forall t > 0, \varphi(t) = t + \text{Arctan}(t) \geq t$ car $\text{Arctan}(t) \geq 0 \forall t \geq 0$

De plus, $\forall t > 0, \text{Arctan}(t) \leq \pi/2 \Rightarrow \varphi(t) \leq t + \pi/2$.

On a donc: $\forall t > 0, 0 < t \leq \varphi(t) \leq t + \pi/2$. Par décroissance de $t \mapsto 1/t$ on a:

$$\text{D'où } \boxed{\forall t > 0, \frac{1}{t + \pi/2} \leq \frac{1}{\varphi(t)} \leq \frac{1}{t}}$$

4b) Pour $x > 0$, 4a) assure que: $\int_2^{2x} \frac{1}{t + \pi/2} dt \leq \int_2^{2x} \frac{dt}{\varphi(t)} \leq \int_2^{2x} \frac{dt}{t}$ car $x < 2x$

$$\text{Or } \int_2^{2x} \frac{dt}{t} = [\ln(t)]_{t=2}^{t=2x} = \ln(2x) - \ln(2) = \ln\left(\frac{2x}{2}\right) = \ln(x)$$

$$\int_2^{2x} \frac{dt}{t + \pi/2} = [\ln(t + \pi/2)]_{t=2}^{t=2x} = \ln(2x + \pi/2) - \ln(2 + \pi/2) = \ln\left(\frac{2x + \pi/2}{2 + \pi/2}\right) = \ln\left(\frac{x(2 + \pi/2)}{x(1 + \pi/2)}\right)$$

$$\text{On en déduit } \boxed{\forall x > 0, \ln\left(\frac{2 + \pi/2x}{1 + \pi/2x}\right) \leq F(x) \leq \ln(x)}$$

4c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \pi/2x}{1 + \pi/2x} = 2$; donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{2 + \pi/2x}{1 + \pi/2x}\right) = \ln(2)$ (continuité de $t \mapsto \ln(t)$ en 2)

Par le théorème d'encadrement $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ existe et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \ln(2)$.

5a) $\forall u \in \mathbb{R}, 1 + u^2 \geq 1 > 0$. On a donc $\frac{1}{1+u^2} \leq \frac{1}{1} = 1$.

$$\forall u \in \mathbb{R}, 1 - u^2 = \frac{1}{1+u^2} = \frac{(1-u^2)(1+u^2) - 1}{1+u^2} = \frac{-u^4}{1+u^2} < 0.$$

$$\text{On en déduit: } \boxed{\forall u \in \mathbb{R}, 1 - u^2 \leq \frac{1}{1+u^2} \leq 1.}$$

$$5b) \forall t \in [0, 1], \int_0^t (1 - u^2) du \leq \int_0^t \frac{du}{1+u^2} \leq \int_0^t 1 dt$$

On a donc: $t - t^3/3 \leq \text{Arctan}(t) \leq t \Rightarrow 2t - t^3/3 \leq \varphi(t) \leq 2t \quad \forall t \in]0, 1]$ ③
 Or $\forall t \in]0, 1]$, $2t - t^3/3 = \frac{1}{3}(6t - t^3) = \frac{1}{3}t(6 - t^2) > 0$. Par croissance
 de $x \mapsto 1/x$ sur $\mathbb{R}^+$, on a: $\frac{1}{2t - t^3/3} \geq \frac{1}{\varphi(t)} \geq \frac{1}{2t} \quad \forall t \in]0, 1]$.

5c) $\forall t \in]0, 1]$, $\frac{1}{6 - t^2} - \frac{1 + t^2}{6} = \frac{6 - (6 - t^2)(1 + t^2)}{6(6 - t^2)} = \frac{-5t^2 + t^4}{6(6 - t^2)} = \frac{t^2(t^2 - 5)}{6(6 - t^2)} \leq 0$
 car $\forall t \in]0, 1]$, $t^2 \leq 1$ donc $t^2 - 5 < 0$ et $6 - t^2 > 0$. On a donc:
 $\forall t \in]0, 1]$, $\frac{1}{6 - t^2} \leq \frac{1 + t^2}{6}$

5d) Par 5b), pour $x > 0$, $\int_2^{2x} \frac{dt}{2t} \leq \int_2^{2x} \frac{dt}{\varphi(t)} \leq \int_2^{2x} \frac{dt}{2t - t^3/3}$
 Or $\int_2^{2x} \frac{dt}{2t} = \frac{1}{2} \int_2^{2x} \frac{dt}{t} = \left(\frac{1}{2}\right) \ln(2) \quad (\text{calcul fait en 4b}).$
 $\int_2^{2x} \frac{dt}{2t - t^3/3} = 3 \int_2^{2x} \frac{dt}{6t - t^3} = 3 \int_2^{2x} \frac{dt}{t(6 - t^2)} \leq 3 \int_2^{2x} \frac{1}{t} \cdot \frac{(1 + t^2)}{6} dt \quad (\text{cf 5c})$
 Or $3 \int_2^{2x} \frac{(1 + t^2)}{6t} dt = \frac{1}{2} \int_2^{2x} \left(\frac{1}{t} + t\right) dt = \frac{1}{2} \left(\int_2^{2x} \frac{dt}{t} + \int_2^{2x} t dt\right) = \frac{1}{2} \ln 2 + \left[\frac{t^2}{2}\right]_2^{2x}$
 Donc $\int_2^{2x} \frac{dt}{2t - t^3/3} \leq \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{1}{4} (4x^2 - x^2)$

On a bien $\forall x \in]0, 1/2]$, $\frac{1}{2} \ln 2 \leq F(x) \leq \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{3x^2}{4}$ (d'où $L = \frac{3x^2}{4}$)

5e) Par le théorème d'encadrement, $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \frac{1}{2} \ln 2$

6) $\forall x > 0$, $F'(x) = \frac{2 \text{Arctan}(x) - \text{Arctan}(2x)}{(2x + \text{Arctan}(2x))(x + \text{Arctan}(x))}$

Avec 3c), on a: $0 \leq 2 \text{Arctan}(x) - \text{Arctan}(2x) \leq 2x^3 + \frac{2}{5} x^5 \quad \forall x \in]0, 1/2]$

De plus, $(2x + \text{Arctan}(2x))(x + \text{Arctan}(x)) \geq 2x \cdot x = 2x^2$ car $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $\text{Arctan}(t) \geq 0$

On en déduit $0 \leq F'(x) \leq \frac{2x^3 + (2/5)x^5}{2x^2} = x + \frac{1}{5} x^3 \quad \forall x \in]0, 1/2]$

($F'(x) = \frac{N(x)}{D(x)} \geq 0$ car $N(x) \geq 0$ et $D(x) > 0 \quad \forall x > 0$). ainsi $\forall x \in]0, 1/2]$, $0 \leq F'(x) \leq x + \frac{1}{5} x^3$

Par le théorème d'encadrement $\lim_{x \rightarrow 0^+} F'(x)$ existe et vaut 0

Exercice 2. (Matrices semi magiques).

I1a) $SM_3(\mathbb{R}) = \{M \in M_3(\mathbb{R}) \mid \exists q, M \times J = J \times M\}$ $J \in SM_3(\mathbb{R})$ car $J \times J = J^2 = J \times J$

• $SM_3(\mathbb{R}) \neq \emptyset$ car $J \times J = J^2 = J \times J = 0 \in SM_3(\mathbb{R})$

• Soit $(M_1, M_2) \in SM_3(\mathbb{R})$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$. Posons $N = \lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2$

$J \times N = J(\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2) = \lambda_1 J \times M_1 + \lambda_2 J \times M_2 = \lambda_1 M_1 \times J + \lambda_2 M_2 \times J = (\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2) \times J$

On en déduit que $N \in SM_3(\mathbb{R})$. Ainsi: $SM_3(\mathbb{R})$ est un sev de $M_3(\mathbb{R})$ qui contient J

I1b) On remarque que $J^2 = J$; soit $M \in SM_3(\mathbb{R})$. On a $J \times M = M \times J$. On a donc: ④
 $t(J \times M) = t(M \times J) \Rightarrow tM \times tJ = tJ \times tM \Rightarrow tM \times J = J \times tM$. Donc $tM \in SM_3(\mathbb{R})$

I2a). Par calcul $J \times E_1 = 0 = E_1 \times J \Rightarrow E_1 \in SM_3(\mathbb{R})$

• G est un sous espace vectoriel car $G = \text{Vect}(E_1, E_2, E_3, E_4)$.

• $\forall 1 \leq i \leq 4$ $E_i \in SM_3(\mathbb{R})$; donc $\forall (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$, $\lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \lambda_3 E_3 + \lambda_4 E_4 \in SM_3(\mathbb{R})$

car $SM_3(\mathbb{R})$ est un sous espace vectoriel. Donc $G \subset SM_3(\mathbb{R})$

On en déduit que G est un sous espace vectoriel de $SM_3(\mathbb{R})$

• (E_1, E_2, E_3, E_4) est une famille génératrice de $\text{Vect}(E_1, E_2, E_3, E_4) = G$.

Proverons que cette famille est libre: Cherchons $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq 4} \in \mathbb{R}^4$ tq $\sum_{1 \leq i \leq 4} \lambda_i E_i = 0_3$ (*)

(*) donne: $\begin{bmatrix} \lambda_2 & -\lambda_1 + \lambda_3 & \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + 2\lambda_4 \\ \lambda_1 + \lambda_3 & \lambda_4 & -\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + 2\lambda_4 & \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 & -\lambda_2 - \lambda_4 \end{bmatrix} = 0_3$.

On en tire: $\lambda_2 = \lambda_4 = 0$ et $-\lambda_1 + \lambda_3 = 0$ (1); (1)+(2) donne $2\lambda_3 = 0$ dc $\lambda_3 = 0$
 $\lambda_1 + \lambda_3 = 0$ (2); (2)-(1) donne $2\lambda_1 = 0$ dc $\lambda_1 = 0$

On en déduit que $(E_i)_{1 \leq i \leq 4}$ est une famille libre.

Ainsi: $(E_i)_{1 \leq i \leq 4}$ est une base de G . On en déduit que $\dim G = 4$.

I2b) Soit $M \in G$. Par I2a), il existe $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq 4} \in \mathbb{R}^4$ tels que $M = \sum_{i=1}^4 \lambda_i E_i$. Par le

calcul du I2a), on a $\text{tr}(M) = \lambda_2 + \lambda_4 - \lambda_2 - \lambda_4 = 0 \Rightarrow \text{tr}(M) = 0$

I2c). G et $\text{Vect}(J)$ sont des sous espaces vectoriels de $M_3(\mathbb{R})$. On en déduit que $0_3 \in G \cap \text{Vect}(J)$

Si $M \in G \cap \text{Vect}(J)$, alors $\text{tr}(M) = 0$ et $M = \lambda J = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda \end{pmatrix} \Rightarrow 3\lambda = \text{tr}(M) = 0$

On en déduit $\lambda = 0$ et donc $M = 0_3$. Donc $G \cap \text{Vect}(J) \subset \{0_3\}$

On a donc: $G \cap \text{Vect}(J) = \{0_3\}$.

I3). $M \in SM_3(\mathbb{R})$ et $J \in SM_3(\mathbb{R})$. Comme $SM_3(\mathbb{R})$ est un sous espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$, on a $(1)M + (-\frac{\text{tr}(M)}{3})J \in SM_3(\mathbb{R})$. On a donc $N \in SM_3(\mathbb{R})$.

• $\text{tr}(N) = \text{tr}\left(M + \left(-\frac{\text{tr}(M)}{3}\right)J\right) = \text{tr}(M) + \left(-\frac{\text{tr}(M)}{3}\right) \times \text{tr}(J) = \text{tr}(M) - \frac{\text{tr}(M)}{3} \times 3 = 0$

On en déduit que $\text{tr}(N) = 0$

I4a). On a déjà vu que $G \subset SM_3(\mathbb{R})$ et comme $J \in SM_3(\mathbb{R})$, $\text{Vect}(J) \subset SM_3(\mathbb{R})$
 On en déduit: G et $\text{Vect}(J)$ sont des sous espaces vectoriels de $SM_3(\mathbb{R})$

• On a déjà $G \cap \text{Vect}(J) = \{0_3\}$.

• On veut de voir que $G \oplus \text{Vect}(J) \subset SM_3(\mathbb{R})$. Réciproquement,

pour $M \in SM_3(\mathbb{R})$, on a $M = N + \frac{\text{tr}(M)}{3}J$ où $N = M - \frac{\text{tr}(M)}{3}J$

On a vu (I3) que $N \in SM_3(\mathbb{R})$ et $\text{tr}(N) = 0 \Rightarrow N \in G$. De plus $\frac{\text{tr}(M)}{3}J \in \text{Vect}(J)$

On en déduit que $SM_3(\mathbb{R}) \subset G \oplus \text{Vect}(J)$. On a bien $SM_3(\mathbb{R}) = G \oplus \text{Vect}(J)$

I4b) On a $(E_i)_{1 \leq i \leq 4}$ est une base de G . De plus, (J) est une famille génératrice de $\text{Vect}(J)$; elle est libre car elle contient un seul élément différent de 0_3 . Donc (J) est une base de $\text{Vect}(J)$.

Comme $S\Gamma_3(\mathbb{R}) = G \oplus \text{Vect}(J)$, le couple assise (E_1, E_2, E_3, E_4, J) est une base de $S\Gamma_3(\mathbb{R})$. On a alors $\dim(S\Gamma_3(\mathbb{R})) = 5$.

II1) On doit avoir $-1+2+1=1+1=-1+0+1 \Rightarrow 1=1$ il faut que $D = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ $\Delta = -1$

De plus, il faut que $D \in S\Gamma_3(\mathbb{R})$, et donc $J \times D = D \times J$

Par calcul $J \times D = 0_3$ et $D \times J = 0_3$. On en déduit que $\Delta = -1$.

II1b) $D \in S\Gamma_3(\mathbb{R})$ donc ${}^t D \in S\Gamma_3(\mathbb{R})$ (cf II1a). De plus ${}^t D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
On a: $-1+0+1=0$; $-1+0+1=0$; $-1+0+1=0$.
On en déduit $\{D, E, H\}$.

II1c) $(J, D, {}^t D)$ est une famille d'éléments de H .

$(J, D, {}^t D)$ est libre: cherchons $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ | $\alpha D + \beta {}^t D + \gamma J = 0_3$ (*)

$$(*) \text{ donne: } \begin{bmatrix} -\alpha + \beta + \gamma & 2\alpha + \gamma & -\alpha + \beta + \gamma \\ 2\beta + \gamma & 0 & -2\beta + \gamma \\ \alpha - \beta + \gamma & -2\alpha + \gamma & \alpha + \beta + \gamma \end{bmatrix} = 0_3$$

$$\text{On en déduit } \begin{cases} -2\beta + \gamma = 0 \\ 2\beta + \gamma = 0 \\ 2\alpha + \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2\beta + \gamma = 0 \\ 2\gamma = 0 \quad (1)+(2) \\ 2\alpha + \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma = 0 \\ \beta = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases}$$

ainsi $(J, D, {}^t D)$ est une famille libre de 3 éléments de H .

or $\dim H = 3$, donc $(J, D, {}^t D)$ est une base de H .

II2a) $M \in G = \{M \in S\Gamma_3(\mathbb{R}) \mid \text{tr}(M) = 0\}$.

$N_1 = 1/2 M + 1/2 {}^t M$; or $M \in G$ et ${}^t M \in S\Gamma_3(\mathbb{R})$ (déjà vu) $\text{tr}({}^t M) = \text{tr}(M) = 0$
On en déduit que ${}^t M \in G$. G étant un sev, $N_1 \in G$.

${}^t N_1 = 1/2 ({}^t M + {}^t({}^t M)) = 1/2 ({}^t M + M) = N_1$. Donc $N_1 \in S$ donc $N_1 \in G_S$.

$N_2 = 1/2 M + (-1/2) {}^t M$. Pour des raisons similaires, $N_2 \in G$.

${}^t N_2 = 1/2 ({}^t M - {}^t({}^t M)) = 1/2 ({}^t M - M) = -N_2 \Rightarrow N_2 \in A$; donc $N_2 \in G_A$.

II2b) G_S et G_A sont des sous espaces vectoriels (intersection de sev) contenu dans G ($G_S = G \cap S$ et $G_A = G \cap A$)

On en déduit que $0_3 \in G_S \cap G_A$.

Si $M \in G_S \cap G_A$, on a $M \in S$ et $M \in A$ en particulier; donc ${}^t M = M$ et $M = -M$.

On en déduit $M = -M \Rightarrow 2M = 0_3 \Rightarrow M = 0_3$. Donc $G_S \cap G_A \subset \{0_3\}$.

ainsi $G_S \cap G_A = \{0_3\}$.

Nous venons de prouver que $G = G_S \oplus G_A$.

Or pour $M \in G$, en posant $N_1 = \frac{1}{2}(M + {}^t M)$ et $N_2 = \frac{1}{2}(M - {}^t M)$ on a.

$M = N_1 + N_2$ avec $N_1 \in G_S$, $N_2 \in G_A$ (cf II3a). Donc $G \subset G_S \oplus G_A$.

En résumé $G = G_S \oplus G_A$.

II3a) $M \in G_A$. On a donc $M \in A$. de plus $M \in G$. donc $\begin{cases} M \in S\Gamma_3(\mathbb{R}) \\ \text{tr}(M) = 0 \end{cases}$
il faut donc $M \times J = J \times M$ et $\text{tr}(M) = 0$.

$$J \times M = \begin{pmatrix} -\alpha - \beta & \alpha - \gamma & \beta + \gamma \\ -\alpha - \beta & \alpha - \gamma & \beta + \gamma \\ -\alpha - \beta & \alpha - \gamma & \beta + \gamma \end{pmatrix} \text{ et } M \times J = \begin{pmatrix} \alpha + \beta & \alpha + \beta & \alpha + \beta \\ \gamma - \alpha & \gamma - \alpha & \gamma - \alpha \\ -\beta - \gamma & -\beta - \gamma & -\beta - \gamma \end{pmatrix}$$

$$\text{en particulier: } \begin{cases} -\alpha - \beta = \alpha + \beta \\ \alpha - \gamma = \alpha + \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha - \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = -\alpha \\ \gamma = \alpha \end{cases}$$

$$\text{On en déduit } M = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & -\alpha \\ -\alpha & 0 & \alpha \\ \alpha & -\alpha & 0 \end{pmatrix} = -\alpha \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -\alpha E_1 \Rightarrow M \in \text{Vect}(E_1)$$

II3b) On en déduit: $G_A \subset \text{Vect}(E_1)$ de plus $E_1 \in S\Gamma_3(\mathbb{R})$, $\text{tr}(E_1) = 0$
et ${}^t E_1 = -E_1 \Rightarrow E_1 \in G_A \Rightarrow \text{Vect}(E_1) \subset G_A$ car G_A sev.

Donc $G_A = \text{Vect}(E_1)$. (E_1) famille génératrice de G_A . Elle est libre car elle contient un seul élément non nul. (E_1) base de G_A .

II4) On a vu $\dim G = 4 \Rightarrow \dim G_S = 4 - 1 = 3$. On remarque que $E_2 \in G_A$, $E_3 \in G_A$ et $E_4 \in G_A$ (à faire). (E_2, E_3, E_4) famille libre à 3 éléments de G_S .
 $\Rightarrow (E_2, E_3, E_4)$ est une base de G_S .

Exercice 3:

1) $\forall t \in \mathbb{R} \quad t \mapsto e^{-2t(1+t^2)}$ donc $t \mapsto e^{-2t(1+t^2)}$ continue sur $\mathbb{R}$

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R} \quad t \mapsto e^{-2t(1+t^2)}$ continue sur $\mathbb{R}$ donc sur le fermé d'intégration $[0,1]$ d'où $f(x)$ existe
et $\forall x \in \mathbb{R} \quad t \mapsto e^{-2t(1+t^2)} \cdot e^{-x \ln(1+t^2)}$ continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0,1]$ d'où $g(x)$ existe $\forall x \in \mathbb{R}$

Finalement f et g sont définies sur $\mathbb{R}$

2a) $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = g(x) = - \int_0^1 \ln(1+t^2) e^{-x \ln(1+t^2)} dt$ avec $\forall t \in [0,1] \quad \ln(1+t^2) \geq 0$, $e^{-x \ln(1+t^2)} \geq 0$
donc $\int_0^1 \ln(1+t^2) e^{-x \ln(1+t^2)} dt \geq 0$ d'où $\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) \leq 0$ car f décroissante sur $\mathbb{R}$

2b) quand $x \rightarrow +\infty$, la quantité $f(x)$ doit tendre vers 0. Pour regarder si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ existe, il faut regarder si f est miroir.
on a $\forall t \in [0,1] \quad e^{-x \ln(1+t^2)} \geq 0$ donc $\int_0^1 e^{-x \ln(1+t^2)} dt \geq 0$

D'où $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \geq 0$ Ainsi f miroir par 0 donc, par th. sur la limite d'une fct miroir $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ existe

3a) $\forall t \in (\frac{1}{2}, 1) \quad \ln(1+(\frac{t}{2})^2) = \ln(\frac{1}{4}) \leq \ln(1+t^2)$ (et on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \geq 0$)

si $x < 0$ donc $x \ln(\frac{1}{4}) \geq x \ln(1+t^2)$ d'où $e^{-x \ln(1+t^2)} \geq e^{-x \ln(\frac{1}{4})} \quad \forall t \in (\frac{1}{2}, 1)$

$$3b) \forall x < 0, f(x) = \int_0^x e^{-x \ln(1+t^2)} dt = \int_0^{1/2} e^{-x \ln(1+t^2)} dt + \int_{1/2}^x e^{-x \ln(1+t^2)} dt \quad (7)$$

car $\forall t \in [0, 1/2] e^{-x \ln(1+t^2)} \geq 0$ donc $\int_0^{1/2} e^{-x \ln(1+t^2)} dt \geq 0$
 or $\forall t \in [1/2, 1] e^{-x \ln(1+t^2)} \geq e^{-x \ln(5/4)}$ donc $\int_{1/2}^x e^{-x \ln(1+t^2)} dt \geq \int_{1/2}^x e^{-x \ln(5/4)} dt$
 $= e^{-x \ln(5/4)} \int_{1/2}^x 1 \cdot dt$

d'où $\forall x < 0, f(x) \geq 0 + e^{-x \ln(5/4)} \cdot (1 - 1/2)$

car $\forall x < 0, f(x) \geq \frac{1}{2} e^{-x \ln(5/4)}$ or $\lim_{x \rightarrow -\infty} -x \ln(5/4) = +\infty$ (car $\ln(5/4) > \ln(1) = 0$)
 d'où $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2} e^{-x \ln(5/4)} = +\infty$

donc par th. de comparaison, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

4a) soit $x > 0, \forall t \in [x, 1] \ln(1+t^2) \leq \ln(1+E^2)$ et $x > 0$ donc $-x \ln(1+t^2) \leq -x \ln(1+E^2)$

i.e. $y \mapsto e^y$ croissante sur $\mathbb{R}$ d'où $\forall t \in [x, 1] e^{-x \ln(1+t^2)} \leq e^{-x \ln(1+E^2)}$
 Alors $\int_x^1 e^{-x \ln(1+t^2)} dt \leq \int_x^1 e^{-x \ln(1+E^2)} dt = e^{-x \ln(1+E^2)} \int_x^1 1 dt$
 $= e^{-x \ln(1+E^2)} (1-x) \leq e^{-x \ln(1+E^2)} \cdot 1$
 ≤ 1 car $x > 0$

d'où $\forall x > 0, \int_x^1 e^{-x \ln(1+t^2)} dt \leq e^{-x \ln(1+E^2)}$

Ainsi $\forall x > 0, f(x) = \int_0^x e^{-x \ln(1+t^2)} dt + \int_x^1 e^{-x \ln(1+t^2)} dt$
 $\leq e^{-x \ln(1+E^2)}$ d'après ce qui précède
 avec $\int_0^x e^{-x \ln(1+t^2)} dt \leq \int_0^x 1 \cdot dt$ (car $\forall t \in [0, x] e^{-x \ln(1+t^2)} \leq 1$)
 car $x \ln(1+t^2) \geq 0$

d'où $\forall x > 0, f(x) \leq (x-0) + e^{-x \ln(1+E^2)}$

car $\forall x > 0, f(x) \leq x + e^{-x \ln(1+E^2)}$

4b) d'après 4a) $\forall x > 0, f(x) \leq x + e^{-x \ln(1+E^2)}$
 or $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ d'après 2b) et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x \ln(1+E^2)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x \ln(1+E^2)} = 0$ (car $\ln(1+E^2) > 0$)
 donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x \ln(1+E^2) = -\infty$

on peut donc faire tendre x vers $+\infty$ dans l'inégalité du 4a) (car toutes les limites existent)

on obtient : $0 \leq L \leq x + 0$ car $0 \leq L \leq x$ d'où $\forall n \in \mathbb{N}^* 0 \leq L \leq \frac{1}{n}$ (car $x = \frac{1}{n}$)

En faisant tendre n vers $+\infty$, on a, par th. d'encadrement $L = 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

5a) on applique la formule de Taylor RI à $\varphi: t \mapsto e^t$ à l'ordre 2

on a : $\varphi(x) = \varphi(0) + \varphi'(0)x + \int_0^x (x-t) \varphi''(t) dt$ avec $\varphi'(t) = e^t \forall t \in \mathbb{R}$
 et $\varphi''(t) = e^t$

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R} |e^x - x - 1| = \left| \int_0^x (x-t) e^t dt \right|$ (8)

on majore ensuite l'intégrale en distinguant les cas $x \geq 0$ et $x \leq 0$.

• si $x \geq 0$ $\left| \int_0^x (x-t) e^t dt \right| \leq \int_0^x |x-t| \cdot |e^t| dt$ (i.e. $a=0 \leq b=x$)

or $\forall t \in [0, x] 0 \leq e^t \leq e^x$ donc $\int_0^x |x-t| e^t dt \leq \int_0^x (x-t) e^x dt = e^x \cdot \left[-\frac{(x-t)^2}{2} \right]_{t=0}^{t=x}$
 $= e^x \cdot (0 + \frac{x^2}{2})$

d'où $\boxed{\text{si } x \geq 0 \left| \int_0^x (x-t) e^t dt \right| \leq \frac{x^2}{2} e^x = \frac{x^2}{2} e^{|x|}}$ (car $x \geq 0$ donc $x = |x|$)

• si $x \leq 0$ $\left| \int_0^x (x-t) e^t dt \right| = \left| -\int_x^0 (x-t) e^t dt \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| \int_x^0 (x-t) e^t dt \right| = \left| \int_x^0 e^t (x-t) dt \right|$

et $\left| \int_x^0 (x-t) e^t dt \right| \leq \int_x^0 |x-t| \cdot |e^t| dt$ (on applique $\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$ avec $a=x \leq b=0$)
 or $\forall t \in [x, 0] e^x \leq e^t \leq e^0 = 1$ donc $\int_x^0 (x-t) e^t dt \leq \int_x^0 1 \cdot (t-x) dt = \left[\frac{(t-x)^2}{2} \right]_x^0$
 $= \frac{(0-x)^2}{2} - 0 = \frac{x^2}{2}$

d'où $\left| \int_x^0 (x-t) e^t dt \right| \leq \frac{x^2}{2}$ avec $\frac{x^2}{2} \leq \frac{x^2}{2} e^{|x|}$ car i.e. $x \leq 0$ donc $|x| = -x \geq 0$

Alors $\boxed{\text{si } x \leq 0 \left| \int_0^x (x-t) e^t dt \right| \leq \frac{x^2}{2} e^{|x|}}$ d'où $\forall x \leq 0 \frac{x^2}{2} \leq \frac{x^2}{2} e^{|x|}$

Finalement, dans les deux cas, on a : $\left| \int_0^x (x-t) e^t dt \right| \leq \frac{x^2}{2} e^{|x|}$

d'où $\boxed{\forall x \in \mathbb{R} |e^x - x - 1| \leq \frac{x^2}{2} e^{|x|}}$

5b) $\forall x_0 \in \mathbb{R} \forall |h| < 1$ $f(x_0+h) - f(x_0) - Lg(x_0) = \int_0^1 \left[e^{-(x_0+th) \ln(1+t^2)} - e^{-x_0 \ln(1+t^2)} + h \ln(1+t^2) e^{-x_0 \ln(1+t^2)} \right] dt$

$= \int_0^1 e^{-x_0 \ln(1+t^2)} \left[e^{-h \ln(1+t^2)} - 1 + h \ln(1+t^2) \right] dt$

d'où $|f(x_0+h) - f(x_0) - Lg(x_0)| \leq \int_0^1 \left| e^{-x_0 \ln(1+t^2)} \right| \left| e^{-h \ln(1+t^2)} - 1 + h \ln(1+t^2) \right| dt$

$= e^{-x_0 \ln(1+t^2)} \geq 0$

or $\forall t \in [0, 1] |e^{-h \ln(1+t^2)} - 1 + h \ln(1+t^2)| \leq \frac{(h \ln(1+t^2))^2}{2} e^{-h \ln(1+t^2)}$

donc $\forall t \in [0, 1] |e^{-h \ln(1+t^2)} - 1 + h \ln(1+t^2)| \leq \frac{h^2}{2} [\ln(1+t^2)]^2 e^{-h \ln(1+t^2)}$

or i.e. $|h| < 1$ donc $\forall t \in [0, 1] e^{-h \ln(1+t^2)} \leq e^{1 \cdot \ln(1+t^2)} = 1+t^2 \leq 1+1^2 = 2$

d'où $\forall t \in [0, 1] \frac{h^2}{2} [\ln(1+t^2)]^2 e^{-h \ln(1+t^2)} \leq \frac{h^2}{2} [\ln(1+t^2)]^2 \cdot 2 = h^2 [\ln(1+t^2)]^2$

Alors $\forall t \in [0, 1] |e^{-h \ln(1+t^2)} - 1 + h \ln(1+t^2)| \leq h^2 [\ln(1+t^2)]^2 e^{-x_0 \ln(1+t^2)}$

En intégrant entre 0 et 1 on a : $|f(x_0+h) - f(x_0) - Lg(x_0)| \leq h^2 \int_0^1 [\ln(1+t^2)]^2 e^{-x_0 \ln(1+t^2)} dt = h^2 \cdot K$

5c) $\forall |h| < 1 \left| \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - g(x_0) \right| \leq \frac{h^2}{|h|} K = |h| \cdot K$ avec $\lim_{h \rightarrow 0} |h| \cdot K = 0$

donc par th. d'encadrement, $\lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - g(x_0) \right| = 0$ car $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = g(x_0)$ (dérivable en x_0)
 car $f'(x_0) = g(x_0)$