Exercice 1 — Soient I et J les éléments de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définis par $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On considère l'application f qui à toute matrice $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ associe la matrice $f(M) = \frac{a+d}{2} I + \frac{b+c}{2} J$.

Dans tout l'exercice $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ désigne la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

b) Déterminer une base de l'image de f.

c) Déterminer les éléments $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ du noyau de f et donner une base de $\operatorname{Ker} f$.

d) Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Justifier que si $f(M) = M$ alors $M \in \operatorname{Im}(f)$.
Réciproquement, vérifier que si $M \in \operatorname{Vect}(I, J)$ alors $f(M) = M$.

2. On pose $A = E_{1,1} - E_{2,2}$, $B = E_{1,2} - E_{2,1}$ et on considère la famille (A, B, I, J).

a) Justifier que (A, B, I, J) est une famille libre. On admet que cette famille est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

b) On pose $g = f \circ f$. En utilisant la base précédente, montrer que les applications f et g sont égales.

Exercice 2 — On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On dispose de n urnes, numérotées de 1 à n, contenant chacune n boules. On répète n épreuves, chacune consistant à choisir une urne au hasard et à en extraire une boule au hasard et sans remise. On suppose que les choix des urnes sont indépendants les uns des autres.
Pour tout i de $[\![1, n]\!]$, on note X_i la variable aléatoire prenant la valeur 1 si l'urne numérotée i contient toujours n boules au bout de ces n épreuves, et qui prend la valeur 0 sinon.

1. a) Pour tout i et tout k de $[\![1, n]\!]$, on note $U_{i,k}$ l'événement "l'urne numéro i est choisie à la $k^{\text{ème}}$ épreuve".
En écrivant l'événement $[X_i = 1]$ à l'aide de certains des événements $U_{i,k}$, montrer :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ P(X_i = 1) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n.$$

b) Pour $i \in [\![1, n]\!]$ donner sans calcul la loi de X_i ainsi que son espérance.

2. On pose $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ et on admet que l'espérance de Y_n est donnée par la formule $E(Y_n) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$.
Calculer $E(Y_n)$ en utilisant la formule précédente puis en déduire que $E(Y_n) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{n}{e}$.

3. Pour tout i de $[\![1, n]\!]$, on note N_i la variable aléatoire égale au nombre de boules manquantes dans l'urne numérotée i à la fin de ces n épreuves.

a) Donner sans calcul la loi de N_i ainsi que la valeur de $E(N_i)$.

b) Montrer que la variable $N_i X_i$ est certaine et donner sa valeur.

Exercice 3 — Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t^n}\,\mathrm{d}t$.

1. Prouver que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par 1. Que peut-on en déduire ?

2. On se propose de montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

a) Vérifier que $1 - u_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n}\,\mathrm{d}t$ pour tout entier naturel n puis établir : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq 1 - u_n \leq \frac{1}{n+1}$.

b) Conclure.

3. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1 - u_n = \frac{\ln 2}{n} - \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t$.

4. Soit x un réel strictement positif. Montrer que $0 \leq \ln(1+x) \leq x$.

5. En déduire que $u_n = 1 - \frac{\ln 2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

6. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \int_0^n \frac{1}{n^n + x^n}\,\mathrm{d}x$. A l'aide du changement de variable $x = nt$, prouver que $v_n \sim \frac{1}{n^{n-1}}$.