Exercice 1 — 1. a) Puisque $I, J \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, toute combinaison linéaire de ces deux matrices est dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ donc f est bien une application de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ à valeurs dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Montrons que f est linéaire. Soient $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix}$ deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

On a $\lambda M + N = \begin{pmatrix} \lambda a + a' & \lambda c + c' \\ \lambda b + b' & \lambda d + d' \end{pmatrix}$ et donc

$$f(\lambda M + N) = \frac{\lambda a + a' + \lambda d + d'}{2} I + \frac{\lambda b + b' + \lambda c + c'}{2} J = \lambda\Big(\frac{a+d}{2} I + \frac{b+c}{2} J\Big) + \frac{a'+d'}{2} I + \frac{b'+c'}{2} J = \lambda f(M) + f(N).$$

Ainsi f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

b) On sait que $\operatorname{Im} f$ est engendrée par $f(E_{1,1}), f(E_{1,2}), f(E_{2,1}), f(E_{2,2})$. Aussi $f(E_{1,1}) = f(E_{2,2}) = \frac{1}{2} I$ et $f(E_{1,2}) = f(E_{2,1}) = \frac{1}{2} J$. Par conséquent $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\big(f(E_{1,1}), f(E_{1,2}), f(E_{2,1}), f(E_{2,2})\big) = \operatorname{Vect}\big(\frac{1}{2} I, \frac{1}{2} J, \frac{1}{2} J, \frac{1}{2} I\big) = \operatorname{Vect}\big(\frac{1}{2} I, \frac{1}{2} J\big) = \operatorname{Vect}(I, J)$.
La famille (I, J) est donc une famille génératrice de $\operatorname{Im} f$. De plus cette famille est libre car constituée de deux matrices non colinéaires. Ainsi (I, J) est une base de $\operatorname{Im} f$.

c) Déterminons les matrices $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ telles que $f(M) = 0_2$. Puisque $f(M) = \frac{a+d}{2} I + \frac{b+c}{2} J = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a+d & b+c \\ b+c & a+d \end{pmatrix}$, on a :

$$f(M) = 0_2 \iff \begin{pmatrix} a+d & b+c \\ b+c & a+d \end{pmatrix} = 0_2 \iff \begin{cases} a+d = 0 \\ b+c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -d \\ b = -c \end{cases}.$$

Ainsi $\operatorname{Ker} f = \left\{ \begin{pmatrix} -d & -c \\ c & d \end{pmatrix}, (c,d) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \left\{ c \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, (c,d) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \operatorname{Vect}(P, Q)$ où $P = E_{2,1} - E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $Q = E_{2,2} - E_{1,1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. La famille (P, Q) engendre donc $\operatorname{Ker} f$ et est libre car formée de deux matrices non colinéaires donc c'est une base de $\operatorname{Ker} f$.

d) Par définition de l'image, pour tout $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on sait que $f(M) \in \operatorname{Im} f$. Ainsi si $M = f(M)$ alors $M \in \operatorname{Im}(f)$.
Réciproquement, si $M \in \operatorname{Vect}(I, J) = \operatorname{Im} f$ alors, M s'écrit $M = \alpha I + \beta J = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
On a alors $f(M) = \dfrac{\alpha + \alpha}{2} I + \dfrac{\beta + \beta}{2} J = \alpha I + \beta J = M$.

2. a) Montrons que (A, B, I, J) est une famille libre. Soient $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ vérifiant $\alpha A + \beta B + \gamma I + \delta J = 0$. Montrons que, nécessairement, $\alpha = \beta = \gamma = 0$.
On a $\alpha A + \beta B + \gamma I + \delta J = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \delta \\ \delta & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + \gamma & \beta + \delta \\ -\beta + \delta & -\alpha + \gamma \end{pmatrix}$. On a donc :

$$\alpha A + \beta B + \gamma I + \delta J = 0_2 \iff \begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ -\alpha + \gamma = 0 \\ \beta + \delta = 0 \\ -\beta + \delta = 0 \end{cases} \underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_4}}{\iff} \begin{cases} 2\gamma = 0 \\ \alpha = \gamma \\ 2\delta = 0 \\ \beta = \delta \end{cases} \iff \begin{cases} \gamma = 0 \\ \alpha = 0 \\ \delta = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

Ceci prouve donc la liberté de la famille (A, B, I, J).

b) Puisque g et f sont des applications linéaires définies sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on sait qu'elles sont égales si elles coïncident sur une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrons ainsi que g et f coïncident sur la base (A, B, I, J).

- Notons d'abord que A et B sont dans $\operatorname{Ker} f$. En effet $A = -P$ et $B = -Q$ ((P, Q) est la base de $\operatorname{Ker} f$ définie en **1.c)**). Par conséquent $f(A) = 0_2$ et $g(A) = f(f(A)) = g(0_2) = 0_2$. De même $g(B) = f(B) = 0_2$.
- Concernant I et J, notons que ces deux matrices sont dans $\operatorname{Vect}(I, J)$ de sorte que, d'après **1d)**, on a $f(I) = I$ et $f(J) = J$. Ainsi $g(I) = f(f(I)) = f(I) = I$ et, de même, $g(J) = J$.

En conclusion, puisque $f(A) = g(A)$, $f(B) = g(B)$, $f(I) = g(I)$ et $f(J) = g(J)$ et puisque (A, B, I, J) est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, les applications linéaires f et g sont égales.

Exercice 2 — 1. a) Etant donné $i \in [\![1, n]\!]$, l'événement $[X_i = 1]$ signifie que l'urne i contient toujours ses n boules après les n tirages, donc qu'elle n'a jamais été choisie. On a ainsi $[X_i = 1] = \bigcap_{k=1}^{n} \overline{U}_{i,k}$.

Les $(U_{i,k})_{k \in [\![1,n]\!]}$ sont indépendants (car les choix des urnes le sont) donc $P(X_i = 1) = \prod_{k=1}^{n} P(\overline{U}_{i,k}) = \prod_{k=1}^{n} (1 - P(U_{i,k}))$.

Enfin le choix de l'urne est fait en situation d'équiprobabilité donc $P(U_{i,k}) = \frac{1}{n}$ et $P(X_i = 1) = \prod_{k=1}^{n} (1 - \frac{1}{n}) = (1 - \frac{1}{n})^n$

b) On a $X_i(\Omega) = \{0,1\}$ donc X_i suit la loi de Bernoulli de paramètre $P(X_i = 1) = (1-\frac{1}{n})^n$. Ainsi $E(X_i) = P(X_i = 1) = (1-\frac{1}{n})^n$.

2. En utilisant la formule admise, on a $E(Y_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} (1-\frac{1}{n})^n = (1-\frac{1}{n})^n \sum\limits_{i=1}^{n} 1 = n(1-\frac{1}{n})^n = n\exp(n\ln(1-\frac{1}{n}))$.

Or on sait que $\ln(1-\frac{1}{n}) \sim -\frac{1}{n}$ donc $n\ln(1-\frac{1}{n}) \sim -1$ ce que l'on peut encore écrire $n\ln(1-\frac{1}{n}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -1$.

Par conséquent $\exp(n\ln(1-\frac{1}{n})) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \exp(-1) = \frac{1}{e}$ c'est à dire $\exp(n\ln(1-\frac{1}{n})) \sim \frac{1}{e}$ et donc $E(Y_n) \sim \frac{n}{e}$.

3. a) N_i est la variable aléatoire qui compte le nombre de fois où l'urne i a été choisie au cours de n épreuves indépendantes, la probabilité de choisir l'urne i étant de $\frac{1}{n}$. Par conséquent N_i suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, \frac{1}{n})$ et $E(N_i) = n \times \frac{1}{n} = 1$.

b) On sait que X_i vaut 0 si l'urne i a été choisie au moins une fois au cours des n épreuves. Aussi, si l'urne i n'a été choisie aucune fois, alors N_i vaut 0. Par conséquent on a, de façon certaine, $N_iX_i = 0$.

Exercice 3 — 1. • $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est croissante :* Pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t^{n+1}} - \frac{1}{1+t^n} = \int_0^1 \frac{(1+t^n)-(1+t^{n+1})}{(1+t^{n+1})(1+t^n)}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{t^n - t^{n+1}}{(1+t^{n+1})(1+t^n)}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{t^n(1-t)}{(1+t^{n+1})(1+t^n)}\,\mathrm{d}t.$$

Aussi, lorsque $0 \le t \le 1$, on a $\dfrac{t^n(1-t)}{(1+t^{n+1})(1+t^n)} \ge 0$ donc, par positivité de l'intégrale, on en déduit que $u_{n+1} - u_n \ge 0$.

• $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est majorée par 1 :* Pour tout $t \in [0,1]$, on a $1+t^n \ge 1 > 0$ donc $\dfrac{1}{1+t^n} \le 1$.

L'inégalité précédente valant pour tout $t \in [0,1]$ on a, par croissance de l'intégrale, $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^n}\,\mathrm{d}t \le \int_0^1 1\,\mathrm{d}t = 1$.

On en déduit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $l \le 1$.

2. a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $1 - u_n = \displaystyle\int_0^1 1\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{1}{1+t^n}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 1 - \frac{1}{1+t^n}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n}\,\mathrm{d}t$.

Or, pour tout $t \in [0,1]$, $0 \le \dfrac{t^n}{1+t^n} \le t^n$. Par croissance de l'intégrale, il vient $0 \le 1 - u_n \le \displaystyle\int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{n+1}t^{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$.

b) On sait que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \le 1 - u_n \le \dfrac{1}{n+1}$. Or $\dfrac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Le théorème d'encadrement permet donc d'affirmer que $1 - u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Autrement dit $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $1-u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\int_0^1 t \times \frac{nt^{n-1}}{1+t^n}\,\mathrm{d}t$. On choisit de poser, pour $t \in [0,1]$, $\begin{cases} u'(t) = \dfrac{nt^{n-1}}{1+t^n}, & u(t) = \ln(1+t^n) \\ v(t) = t, & v'(t) = 1 \end{cases}$

Les fonction u et v ainsi définies sont de classe C^1 sur $[0,1]$ et on a, par intégration par parties :

$$1 - u_n = \frac{1}{n}\left(\int_0^1 u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t\right) = \frac{1}{n}\left(\Big[u(t)v(t)\Big]_0^1 - \int_0^1 u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t\right) = \frac{1}{n}\left(\Big[t\ln(1+t)\Big]_0^1 - \int_0^1 \ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t\right) = \frac{1}{n}\left(\ln 2 - \int_0^1 \ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t\right)$$

4. Deux méthodes (au moins) sont possibles :

- *1re méthode.* On se donne un réel $x > 0$. On considère alors la fonction f définie sur l'intervalle $[0,x]$ par $f(t) = \ln(1+t)$.
  La fonction f est dérivable et, pour $t \in [0,x]$, $f'(t) = \dfrac{1}{1+t}$. On a donc $\forall t \in [0,x],\ 0 \le f'(t) \le 1$.
  L'inégalité des accroissements finis donne alors $(x-0)\times 0 \le f(x) - f(0) \le (x-0)\times 1$ *i.e* $0 \le \ln(1+x) \le x$.
- *2e méthode.* Pour la première inégalité, on remarque que, par croissance de ln, $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \ln(1+x) \ge \ln 1 = 0$.
  Pour l'autre, on pose, pour $x \in \mathbb{R}_+$, $\phi(x) = x - \ln(1+x)$ et on montre que $\phi \ge 0$ en étudiant les variations de ϕ.

5. On sait que $u_n = 1 - \dfrac{\ln 2}{n} + \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t$. Montrons que $\dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t = o\Big(\frac{1}{n}\Big)$.

D'après la question précédente on a : $\forall t \in [0,1],\ 0 \le \ln(1+t^n) \le t^n$. (l'encadrement est évident pour $t = 0$).

Par croissance de l'intégrale on en déduit que $0 \le \displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t \le \int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}$.

Par encadrement, on en déduit que $\int_0^1 \ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ ce que l'on peut écrire $\int_0^1 \ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t = o(1)$ d'où l'on déduit que $\dfrac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t = o\Big(\dfrac{1}{n}\Big)$. Ainsi $u_n = 1 - \dfrac{\ln 2}{n} + o\Big(\dfrac{1}{n}\Big)$.

6. On effectue le changement de variable $x = nt$ (qui est licite car $t \mapsto nt$ est de classe C^1). En posant $x = nt$ et donc $\mathrm{d}x = n\,\mathrm{d}t$, on a $v_n = \displaystyle\int_0^n \frac{1}{n^n + x^n}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{n^n + (nt)^n}\,n\,\mathrm{d}t = \frac{n}{n^n}\int_0^1 \frac{1}{1+t^n}\,n\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n^{n-1}}u_n \sim \frac{1}{n^{n-1}} \times 1$ (ceci car $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ donc $u_n \sim 1$).