Exercice 1 — 1. L'application f est bien à valeurs dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
De plus f est linéaire : soient $M, N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$, on a
$f(\lambda M+N) = (\lambda M+N)A - A(\lambda M+N) = \lambda MA + NA - \lambda AM - AN = \lambda(MA-AM) + NA - AN = \lambda f(M) + f(N)$.

2. a) Pour $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on a

$$f(M) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2c & 2a+2b-2d \\ -2c & 2c \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} -c & a+b-d \\ -c & c \end{pmatrix}$$

b) Déterminons les matrices $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $f(M) = 2\begin{pmatrix} -c & a+b-d \\ -c & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
On a successivement :

$$f(M) = 0_2 \iff \begin{pmatrix} -c & a+b-d \\ -c & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -c = 0 \\ a+b-d = 0 \\ -c = 0 \\ c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} c = 0 \\ a = -b+d \end{cases}$$

En conséquence $\operatorname{Ker} f = \left\{ \begin{pmatrix} -b+d & b \\ 0 & d \end{pmatrix},\ (b,d) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \left\{ b\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ (b,d) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \operatorname{Vect}(J, I)$ où l'on a posé $J = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
La famille (J, I) engendre donc $\operatorname{Ker} f$. En outre cette famille est libre car formée de deux matrices non colinéaires de sorte que (J, I) est une base de $\operatorname{Ker} f$.

c) $\operatorname{Ker} f$ n'est pas réduit à la matrice nulle d'après la question précédente (par exemple $I \in \operatorname{Ker} f$) donc f n'est pas injective.

3. a) Tous calculs faits, on trouve $f(E_{1,1}) = f(E_{1,2}) = -f(E_{2,2}) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $f(E_{2,1}) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Le cours nous enseigne que $\operatorname{Im} f$ est engendrée par les matrices $f(E_{1,1})$, $f(E_{1,2})$, $f(E_{2,1})$ et $f(E_{2,2})$. Ainsi

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} f &= \operatorname{Vect}(f(E_{1,1}), f(E_{1,2}), f(E_{2,1}), f(E_{2,2})) \\ &= \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \\ &= \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\right) \\ &= \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right). \end{aligned}$$

Cette dernière famille étant constituée de deux matrices non colinéaires, elle est également libre ce qui prouve qu'il s'agit d'une base de $\operatorname{Im} f$.

Exercice 2 — 1. a) Si $P = a + bX + cX^2 + dX^3 \in \mathbb{R}_3[X]$, alors :

$$\begin{aligned} f(P) = P'' + X^2P' - 3X(P - P(0)) &= (2c + 6dX) + X^2\left(b + 2cX + 3dX^2\right) - 3X\left(a + bX + cX^2 + dX^3 - a\right) \\ &= 2c + 6dX - 2bX^2 - cX^3. \end{aligned}$$

b) Au vu du calcul précédent, commençons par noter que , pour tout $P \in \mathbb{R}_3[X]$, on a bien $f(P) \in \mathbb{R}_3[X]$. De plus pour tout $P, Q \in \mathbb{R}_3[X]$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned} f(\lambda P + Q) &= (\lambda P + Q)'' + X^2(\lambda P + Q)' - 3X((\lambda P + Q) - (\lambda P + Q)(0)) \\ &= \lambda P'' + Q'' + X^2(\lambda P' + Q') - 3X(\lambda P + Q - \lambda P(0) - Q(0)) \\ &= \lambda\left(P'' + X^2P' - 3X(P - P(0))\right) + Q'' + X^2Q' - 3X(Q - Q(0)) = \lambda f(P) + f(Q). \end{aligned}$$

Ainsi f est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.

2. a) En utilisant le calcul fait plus haut, pour tout $P = a + bX + cX^2 + dX^3 \in \mathbb{R}_3[X]$, on a

$$P \in \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow f(P) = 0 \Leftrightarrow 2c + 6dX - 2bX^2 - cX^3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2c = 0 \\ 6d = 0 \\ -2b = 0 \\ -c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow b = c = d = 0 \Leftrightarrow P = a$$

Le noyau de f est donc l'ensemble des polynômes constants : $\operatorname{Ker} f = \mathbb{R}_0[X] = \operatorname{Vect}(1)$. Une base en est (1) (par exemple).

b) La famille $(1, X, X^2, X^3)$ étant une base de $\mathbb{R}_3[X]$, on sait que $\operatorname{Im} f$ est engendré par la famille $(f(1), f(X), f(X^2), f(X^3))$. En utilisant la formule trouvée pour $f(P)$ en **1a)** (ou bien en calculant via la définition initiale de f), on obtient :

$$f(1) = 0, \qquad f(X) = -2X^2, \qquad f(X^2) = 2 - X^3, \qquad f(X^3) = 6X.$$

Par conséquent $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(0, -2X^2, 2 - X^3, 6X) = \operatorname{Vect}(-2X^2, 2 - X^3, 6X) = \operatorname{Vect}(X^2, 2 - X^3, X)$.
La famille $(X^2, 2 - X^3, X)$ est donc une famille génératrice de $\operatorname{Im} f$. Montrons que cette famille est libre ce qui assurera qu'il s'agit d'une base de $\operatorname{Im} f$. Pour ce faire, résolvons l'équation $\alpha X^2 + \beta(2 - X^3) + \gamma X = 0$ d'inconnue (α, β, γ) et montrons qu'elle a pour unique solution $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, 0, 0)$. On a :

$$\alpha X^2 + \beta(2 - X^3) + \gamma X = 0 \iff 2\beta + \gamma X + \alpha X^2 - \beta X^3 = 0 \iff \begin{cases} 2\beta = 0 \\ \gamma = 0 \\ \alpha = 0 \\ -\beta = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \beta = 0 \\ \gamma = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases}$$

Ceci assure donc la liberté de la famille $(X^2, 2 - X^3, X)$ et prouve donc bien qu'il s'agit d'une base de $\operatorname{Im} f$.