DEVOIR MAISON N$^{\text{o}}$ 13

Pour le lundi 24 avril 2017

EXERCICE 1 – RÉVISIONS DE PROBABILITÉS

1. Soucieux d'améliorer le flux de sa clientèle lors du passage en caisse, un gérant de magasin a réalisé une étude permettant d'établir :

$$P[S=0\cap U=0]=0.4$$
$$P[S=0\cap U=1]=0.3$$
$$P[S=1\cap U=0]=0.2$$
$$P[S=1\cap U=1]=0.1$$

où S représente la variable aléatoire prenant la valeur 0 si le montant des achats est inférieur ou égal à 50 euros, prenant la valeur 1 sinon, et U la variable aléatoire prenant la valeur 0 si la somme est réglée par carte bancaire, prenant la valeur 1 sinon.

   (a) Déterminer les lois de S et U et vérifier que la probabilité que le client règle par carte bancaire est égale à $p=\dfrac{3}{5}$.

   (b) Les variables S et U sont-elles indépendantes ? Justifier.

   (c) Quelle est la probabilité que la somme réglée soit supérieure strictement à 50 euros sachant que le client utilise un autre moyen de paiement que la carte bancaire ?

2. On suppose que les modes de règlement sont indépendants entre les individus.
Une caissière reçoit n clients dans sa journée ($n\geqslant 2$).
On définit trois variables aléatoires C_n, L_1, L_2 par :
   — C_n comptabilise le nombre de clients qui paient par carte bancaire.
   — L_1(resp.L_2) est égale au rang du 1^{er} (resp.du $2^{ème}$) client utilisant la carte bancaire comme moyen de paiement, s'il y en a au moins un (resp.au moins deux) et à zéro sinon.

   (a) Reconnaître la loi de C_n, rappeler la valeur de l'espérance et de la variance de cette variable aléatoire.

   (b) Déterminer la loi de L_1 et vérifier que :

$$\sum_{k=0}^{n} P[L_1=k]=1$$

   (c) Déterminer la loi de L_2.

EXERCICE 2 – ANALYSE

On considère l'application

$$f\ :\ [0;+\infty[\to\mathbb{R},\quad x\mapsto f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x>0\\ 1 & \text{si } x=0\end{cases}$$

I - ÉTUDE DE L'APPLICATION f

1. Écrire une fonction Scilab définissant la fonction f.
2. Montrer que f est continue sur $[0;+\infty[$.
3. On considère l'application

$$A\ :\ [0;+\infty[\to\mathbb{R},\quad x\mapsto A(x)=\frac{x}{1+x}-\ln(1+x).$$

   (a) Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0;+\infty[$ et que, $\forall x\in]0;+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{A(x)}{x^2}$.

   (b) Montrer que f' admet $-\dfrac{1}{2}$ comme limite en 0 à droite (*utiliser un développement limité).*

   (c) Démontrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0;+\infty[$ et préciser $f'(0)$.

   (d) Dresser le tableau de variation de A. En déduire que f est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$.

   (e) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

4. Allure de la courbe au voisinage de 0.

   (a) Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en 0.

   (b) Montrer que f admet un développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0.

   (c) En déduire la position relative locale de $\mathscr{C}_f$ et de sa tangente en 0, au voisinage de 0.

   (d) Tracer l'allure de la courbe représentative de f. On fera apparaitre les résultats des questions précédentes.

   (e) Écrire un programme Scilab qui permette de tracer la courbe de f sur l'intervalle $[0,5]$.

II -UN DÉVELOPPEMENT EN SÉRIE

1. Montrer, pour tout $N\in\mathbb{N}$ et tout $t\in[0;1]$:

$$\frac{1}{1+t}=\sum_{k=0}^{N}(-1)^k t^k+\frac{(-1)^{N+1}t^{N+1}}{1+t}$$

2. En déduire, pour tout $N\in\mathbb{N}$ et tout $x\in[0;1]$:

$$\ln(1+x)=\sum_{k=0}^{N}\frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1}+J_N(x)\,,$$

   où on a noté $J_N(x)=\displaystyle\int_0^x\frac{(-1)^{N+1}t^{N+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

3. Établir, pour tout $N\in\mathbb{N}$ et tout $x\in[0;1]$: $\quad |J_N(x)|\leqslant\dfrac{x^{N+2}}{N+2}$.
4. En déduire que, pour tout $x\in[0;1]$, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$ converge et que :

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$$

EXERCICE 3 – ALGÈBRE

On considère f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ et on note id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^n$.

1. On suppose dans cette question que $f \circ (f - \mathrm{id})^2 = 0$.
   (a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ x = (f - \mathrm{id})^2(x) + f\big((2\mathrm{id} - f)(x)\big)$.
   (b) Montrer que, pour tout $y \in \mathbb{R}^n$, $f^3(y) - 2f^2(y) + f(y) = 0_{\mathbb{R}^n}$.
   (c) En déduire que $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$.
   (d) Déduire de la question (a) que $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f)$.
   (e) Que peut-on déduire des questions (c) et (d) ?
2. On suppose dans cette question que :
$$f \circ (f - \mathrm{id}) \circ (f - 4\mathrm{id}) = 0$$
   (a) Déterminer un polynôme P du premier degré vérifiant :
$$\frac{1}{4}(X-1)(X-4) + XP(X) = 1$$
   On a alors (en utilisant la notion de <u>polynôme d'endomorphisme</u>)
$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \frac{1}{4}(f - \mathrm{id}) \circ (f - 4\mathrm{id})(x) + f\big(P(f)(x)\big) = x$$
   (b) En déduire que : $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$. On pourra s'inspirer de la question 1.
3. Dans cette question f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ et P est un <u>polynôme annulateur</u> de f (ie. $P(f) = 0$), dont le degré est égal à p (avec $p \geqslant 2$), et tel que $\overline{P(0) = 0 \text{ et } P'(0) \neq 0}$.
   (a) Montrer qu'il existe p réels $a_1, \dots, a_p$ avec $a_1 \neq 0$, tels que $P = a_1 X + \cdots + a_p X^p$.
   (b) En déduire que $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$, puis établir que $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.
   (c) En quoi cette question est-elle une généralisation des deux questions précédentes ?