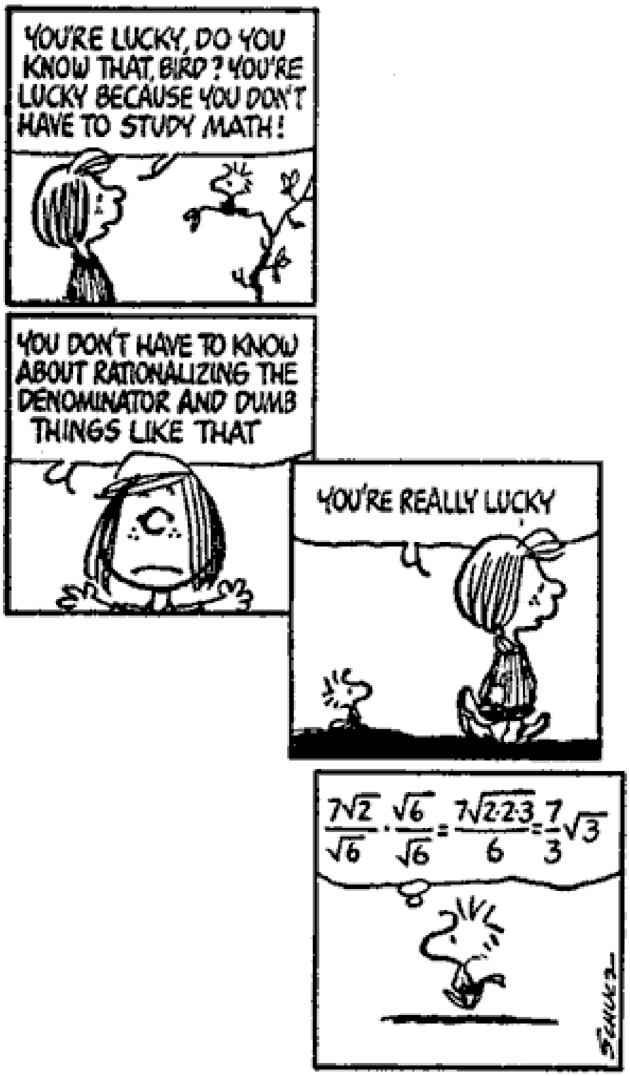
Lycée Fénelon
BCPST 1 2010/2011

Devoir surveillé
20/11/2010

DEVOIR SURVEILLÉ 2

(durée : 3 h 30)



« La nuit, tous les chats sont gris.
Surtout les gris. »

Philippe Geluck

Recommandations

Rédigez vos réponses dans un français correct. Terminez chaque résolution d'exercice par une conclusion $\boxed{\textit{encadrée}}$ *ou* <u>*soulignée*</u>*. Laissez une marge au correcteur.*

Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre. Dans un exercice avec plusieurs questions, on pourra, si besoin est, admettre le résultat d'une question pour répondre aux suivantes.

La calculatrice n'est pas autorisée.

EXERCICE 1

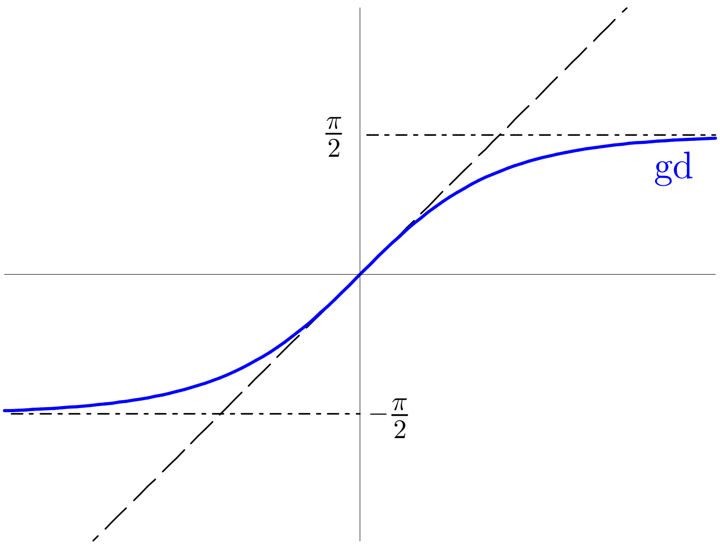
On considère la fonction de Gudermann

$$\mathrm{gd}\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[\\ x & \longmapsto & \mathrm{gd}(x) \end{array}\right.$$

où, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{gd}(x)$ désigne l'unique nombre réel y appartenant à $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$ qui satisfait la relation :

$$(E): \qquad \tan y = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}\cdot$$

Le graphe de cette fonction (en trait plein, avec ses asymptotes horizontales en pointillés) et celui de la première bissectrice (en pointillés larges) sont donnés ci-dessous :



1. a) Sans justification, déterminer $\mathrm{gd}(\mathbb{R})$ et $\mathrm{gd}^{-1}\left(\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[\right)\cdot$

   b) Calculer $\mathrm{gd}\left(\ln(1+\sqrt{2})\right)$ et en déduire, toujours sans justification, $\mathrm{gd}^{-1}\left(\left]-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right[\right)\cdot$

2. a) Pour quelles valeurs de $y \in \mathbb{R}$ l'équation (E) d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ admet-elle des solutions ? Pour une telle valeur de y, résoudre l'équation (E). *On posera* $X = \mathrm{e}^x$.

   b) En déduire que gd réalise une bijection entre $\mathbb{R}$ et $\mathrm{gd}(\mathbb{R})$ et préciser son application réciproque.

   c) Tracer le graphe de cette application réciproque (sur la feuille annexe jointe).

EXERCICE 2

Résoudre, en discutant suivant la valeur du paramètre $m \in \mathbb{R}$, le système

$$\mathscr{S} : \left\{ \begin{array}{rcl} x - \ m\,y + m^2 z &=& 2m \\ m\,x - m^2 y + \ m\,z &=& 2m \\ m\,x + \quad y - m^2 z &=& 1 - m \end{array} \right.$$

EXERCICE 3

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \frac{n!\,\mathrm{e}^n}{n^n \sqrt{n}}.$$

0. On souhaite démontrer que, pour tout $x \in]1; +\infty[$, on a

$$\frac{2}{2x-1} < -\ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) < \frac{2x-1}{2x(x-1)}.$$

Pour cela, on vous demande de démontrer l'inégalité de gauche à l'aide d'une étude de fonction puis d'expliquer sommairement (et sans aucun calcul) comment on procéderait pour démontrer l'inégalité de droite.

1. a) Démontrer que, pour tout $n \geqslant 2$, on a

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = \exp\left\{ \left(n - \frac{1}{2}\right) \left[\frac{2}{2n-1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \right] \right\}$$

et en déduire le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$.

b) Démontrer que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente vers une limite positive ou nulle, notée ℓ.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$v_n = u_n\,\mathrm{e}^{-1/(4n)}.$$

a) Quelle est la limite de la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$?

b) Démontrer que, pour tout $n \geqslant 2$, on a

$$\frac{v_n}{v_{n-1}} = \exp\left\{ \left(n - \frac{1}{2}\right) \left[\frac{2n-1}{2n(n-1)} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \right] \right\}$$

et en déduire le sens de variation de la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$. Que peut-on dire des suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$?

c) Justifier que $\ell > 0$.

3. Démontrer que

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \ell\sqrt{n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n.$$

4. À l'aide du résultat de la question précédente, démontrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{2n}}{2^{2n+1}} \binom{2n}{n} = \frac{1}{\ell},$$

où $\binom{2n}{n}$ désigne le coefficient binomial « n parmi $2n$ ».

Remarque : À l'aide des intégrales dites de Wallis, il est possible de démontrer que $\ell = \sqrt{2\pi}$. En reportant cette valeur dans l'équivalent de la question 3, on obtient alors la formule de Stirling :

$$\boxed{n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n}$$

EXERCICE 4

Jojo le glacier propose g variétés de glaces, s variétés de sorbets et 4 variétés d'accompagnements : chantilly, nappage chocolat, nappage caramel, éclats d'amandes.

Le client choisit un certain nombre de boules de glace ou de sorbet (avec éventuellement plusieurs fois le même parfum) et, s'il le désire, un ou plusieurs accompagnement(s). Les éventuels accompagnements sont toujours disposés dans l'ordre suivant : chantilly, nappage, éclats d'amandes (mais l'on n'est pas obligé de mettre les trois). On ne peut pas choisir deux fois le même accompagnement ni choisir simultanément les deux nappages. La commande est servie dans un cornet ou une coupelle, en gauffre.

Les résultats seront donnés sous forme de produits d'entiers. Vous êtes priés de ne pas baver sur vos copies !

1. Dans toute cette question, le client choisit d'être servi dans un cornet. Par conséquent, on tient compte de l'ordre dans lequel les boules sont disposées dans le cornet. Ainsi, le cornet fraise-fraise-chocolat n'est pas le même que le cornet fraise-chocolat-fraise.
   a) α] Combien Jojo peut-il servir de cornets différents avec b boules, de parfums distincts ou non (glace ou sorbet), sans accompagnement ?

      β] Même question dans le cas où le cornet est surmonté d'un (unique) accompagnement.

   b) α] Combien Jojo peut-il servir de cornets différents avec b boules, de parfums distincts (glace ou sorbet), sans accompagnement ?

      β] Même question dans le cas où le cornet est surmonté de deux accompagnements.

   c) α] Combien Jojo peut-il servir de cornets avec 4 boules (de parfums distincts ou non, sans accompagnement) dont au moins une est un sorbet ?

      β] Combien Jojo peut-il servir de cornets avec 4 boules (de parfums distincts ou non, sans accompagnement) dont au moins 3 sont des glaces ?

2. À partir de maintenant, le client choisit d'être servi dans une coupelle. On ne tient donc plus compte de l'ordre dans lequel les boules sont disposées dans la coupelle. Ainsi, la coupelle vanille-passion est identique à la coupelle passion-vanille.
   a) Combien Jojo peut-il servir de coupelles différentes avec b boules de parfums distincts, sans accompagnement ?

   b) Combien Jojo peut-il servir de coupelles différentes avec 2 boules de glace de parfums distincts, 1 boule de sorbet et 3 accompagnements.

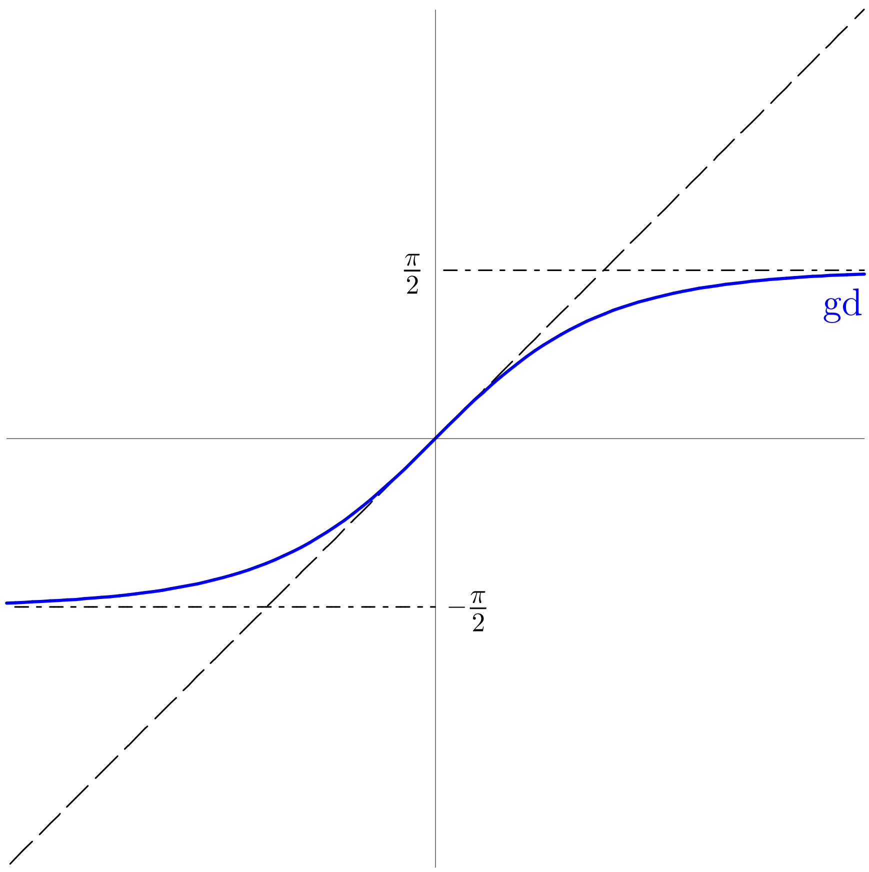
   c) Chaque boule vaut 2 € et chaque accompagnement vaut 1 €. Évéanne veut acheter une coupelle à 5 € dont tous les parfums sont distincts. Combien de coupelles différentes peut lui proposer Jojo ?

   d) Les glaces et sorbets de Jojo sont répartis en c catégories contenant chacune 4 parfums. Il y a les « classiques » : vanille, chocolat, café et pistache ; les « fruitées » : fraise, framboise, citron et banane ; les « exotiques » : rhum-raison, noix de coco, passion et mangue ; les « américaines » : noix de pécan, cookies, noix de macadamia et caramel-brownie ; les « italiennes » : amaretto, amarena, straciatella et tiramisu ; etc
      Sébastien veut une coupelle « méga-five » : 5 boules, de parfums distincts, dont deux choisies dans une première catégorie, deux d'une autre catégorie et une dernière d'une troisième catégorie. Le tout agrémenté de trois accompagnements, cela va de soi ! Combien existe-t-il de coupelles « méga-five » différentes ?

   e) Combien Jojo peut-il servir de coupelles différentes avec b boules, de parfums distincts ou non, sans accompagnement ? *Indication : on pourra se servir de gauffrettes pour séparer les parfums...*

Nom :

Prénom :



CORRECTION DU DS 2

(durée : 3 h 30)

EXERCICE 1

Soit la fonction de Gudermann $\mathrm{gd} : \mathbb{R} \longrightarrow \left]-\pi/2;\pi/2\right[$ *telle que, pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{gd}(x)$ *désigne l'unique nombre réel* y *de* $\left]-\pi/2;\pi/2\right[$ *qui satisfait la relation* (E) : $\tan y = (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})/2$.

1. a) *Sans justification, déterminer* $\mathrm{gd}(\mathbb{R})$ *et* $\mathrm{gd}^{-1}([0;\pi/2[)$.

Par lecture graphique, on a

$$\boxed{\mathrm{gd}(\mathbb{R}) = \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\qquad \text{et} \qquad \mathrm{gd}^{-1}\left(\left[0;\frac{\pi}{2}\right[\right) = \mathbb{R}_+.}$$

b) *Calculer* $\mathrm{gd}\left(\ln(1+\sqrt{2})\right)$ *et en déduire, toujours sans justification,* $\mathrm{gd}^{-1}([-\pi/4;\pi/4])$.

Le nombre $\mathrm{gd}\left(\ln(1+\sqrt{2})\right)$ est l'unique réel y satisfaisant la relation

$$\begin{aligned}
& \tan y = \frac{\mathrm{e}^{\ln(1+\sqrt{2})} - \mathrm{e}^{-\ln(1+\sqrt{2})}}{2} \\
\iff \quad & \tan y = \frac{1+\sqrt{2} - \dfrac{1}{1+\sqrt{2}}}{2} \\
\iff \quad & \tan y = \frac{1+\sqrt{2} - \dfrac{1-\sqrt{2}}{1-2}}{2} \\
\iff \quad & \tan y = \frac{1+\sqrt{2}+1-\sqrt{2}}{2} \\
\iff \quad & \tan y = 1 \\
\iff \quad & y = \frac{\pi}{4},
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\mathrm{gd}\left(\ln(1+\sqrt{2})\right) = \frac{\pi}{4}.}$$

Graphiquement, on constate que gd est impaire et strictement croissante donc

$$\boxed{\mathrm{gd}^{-1}\left(\left]-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right[\right) = \left[-\ln(1+\sqrt{2});\ln(1+\sqrt{2})\right].}$$

2. a) *Pour quelles valeurs de* $y \in \mathbb{R}$ *l'équation* (E) *d'inconnue* $x \in \mathbb{R}$ *admet-elle des solutions ? Pour une telle valeur de* y, *résoudre l'équation* (E).

Par définition, l'ensemble des valeurs de $y \in \mathbb{R}$ pour lesquelles l'équation (E) admet des solutions est $\mathrm{gd}(\mathbb{R})$, donc, d'après le résultat de la question 1. a),

$$\boxed{\text{l'équation } (E) \text{ d'inconnue } x \in \mathbb{R} \text{ admet des solutions si, et seulement si, } y \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[.}$$

Pour $y \in \left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$, on a

$$\begin{array}{rcll}(E) & \Longleftrightarrow & \tan y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} & \\ & \Longleftrightarrow & \tan y = \dfrac{X - \dfrac{1}{X}}{2} & \text{en posant } X = e^x\,. \\ & \Longleftrightarrow & \tan y = \dfrac{X^2-1}{2X} & \\ & \Longleftrightarrow & (2\tan y)X = X^2 - 1 & \\ & \Longleftrightarrow & X^2 - (2\tan y)X - 1 = 0. & \end{array}$$

Le discriminant de cette équation du second degré vaut

$$\Delta = (-2\tan y)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 4(\tan^2 y + 1) > 0,$$

donc les solutions valent

$$X_1 = \tan y + \sqrt{\tan^2 y + 1} \qquad \text{et} \qquad X_2 = \tan y - \sqrt{\tan^2 y + 1}.$$

Comme $X = e^x$ est strictement positive, on doit rejeter la seconde solution (en effet, on a $\sqrt{\tan^2 y + 1} > \sqrt{\tan^2 y} = |\tan y| \geqslant \tan y$ donc $\tan y - \sqrt{\tan^2 y + 1} < 0$), ce qui donne

$$\begin{array}{rl} & X = \tan y + \sqrt{\tan^2 y + 1} \\ \Longleftrightarrow & e^x = \tan y + \sqrt{\tan^2 y + 1} \\ \Longleftrightarrow & x = \ln\left(\tan y + \sqrt{\tan^2 y + 1}\right). \end{array}$$

Donc

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{pour tout } y \in \left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[\text{, l'équation } (E) \text{ d'inconnue } x \in \mathbb{R} \\ \text{admet une unique solution } x = \ln\left(\tan y + \sqrt{\tan^2 y + 1}\right).\end{array}}$$

Remarque : On a

$$\ln\left(\tan y + \sqrt{\tan^2 y + 1}\right) = \ln\left(\tan y + \frac{1}{\cos y}\right).$$

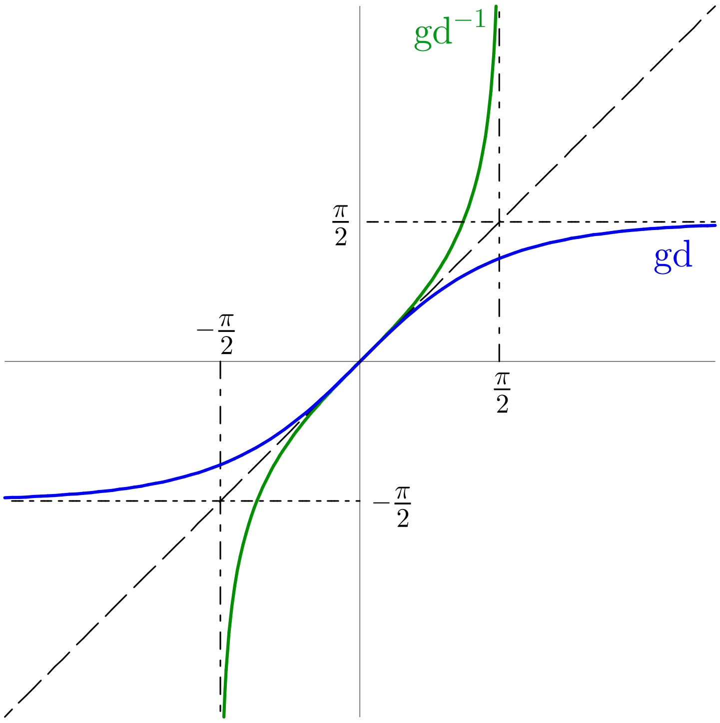
b) *En déduire que* gd *réalise une bijection entre* $\mathbb{R}$ *et* gd($\mathbb{R}$) *et préciser son application réciproque.*

Le résultat de la question précédente implique que

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{la fonction gd réalise une bijection entre } \mathbb{R} \text{ et } \mathrm{gd}(\mathbb{R}) = \left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[\text{ dont} \\ \text{la réciproque est } \mathrm{gd}^{-1} \left\{ \begin{array}{ccc} \left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & \ln\left(\tan y + \sqrt{\tan^2 y + 1}\right). \end{array}\right.\end{array}}$$

c) *Tracer le graphe de cette application réciproque.*

On sait que la courbe représentative de gd^{-1} s'obtient à partir de la courbe de gd en effectuant une réflexion par rapport à la première bissectrice. Par suite, on obtient



EXERCICE 2

Résoudre, suivant la valeur de $m \in \mathbb{R}$*, le système* S : $\left\{\begin{array}{rcl} x - \;\; my + m^2z &=& 2m \\ mx - m^2y + \;\; mz &=& 2m \\ mx + \;\;\;\; y - m^2z &=& 1-m \end{array}\right.$

Appliquons la méthode du pivot en entourant les pivots choisis :

$$\mathscr{S} \iff \left\{\begin{array}{rcll} \boxed{x} - \;\; my + m^2z &=& 2m & L_1 \\ mx - m^2y + \;\; mz &=& 2m & L_2 \\ mx + \;\;\;\; y - m^2z &=& 1-m & L_3 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcll} \boxed{x} - \;\; my + \;\; m^2z &=& 2m & L_1 \\ m(1-m^2)z &=& 2m(1-m) & L_2 - mL_1 \longrightarrow L_2 \\ \boxed{(1+m^2)y} - m^2(1+m)z &=& 1-m-2m^2 & L_3 - mL_1 \longrightarrow L_3 \end{array}\right.$$

On envisage alors plusieurs cas :

▶ Premier cas : $m = -1$: Dans ce cas, on a

$$\mathscr{S} \iff \left\{\begin{array}{rcl} \boxed{x} + \;\; y + z &=& -2 \\ 0 &=& -4 \\ \boxed{2y} &=& 0 \end{array}\right.$$

La seconde ligne est une équation auxiliaire incompatible, donc le système n'a pas de solution dans ce cas.

▶ Deuxième cas : $m = 0$: Dans ce cas, on a

$$\mathscr{S} \iff \left\{\begin{array}{rcl} \boxed{x} &=& 0 \\ 0 &=& 0 \\ \boxed{y} &=& 1 \end{array}\right.$$

La seconde ligne est une équation auxiliaire compatible donc le système admet des solutions. L'inconnue z étant auxiliaire, on la choisit comme paramètre, ce qui donne

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 0 \\ y &=& 1 \\ z &=& \lambda \end{array}\right. \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

▶ Troisième cas : $m = 1$: Dans ce cas, on a

$$\mathscr{S} \iff \left\{\begin{array}{rcl} \boxed{x} - \;\; y + \;\; z &=& 2 \\ 0 &=& 0 \\ \boxed{2y} - 2z &=& -2 \end{array}\right.$$

La seconde ligne est une équation auxiliaire compatible donc le système admet des solutions. L'inconnue z étant auxiliaire, on la choisit comme paramètre, ce qui donne

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1 \\ y &=& \lambda - 1 \\ z &=& \lambda \end{array}\right. \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

► Quatrième cas : $m \notin \{-1; 0; 1\}$: Dans ce cas, on a $m(1-m^2) \neq 0$, ce qui permet de choisir ce coefficient comme dernier pivot. On obtient alors la réduite de Gauß d'un système de Cramer :

$$\mathscr{S} \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \boxed{x} & - & my & + & m^2 z & = & 2m \\ & & & & \boxed{m(1-m^2)z} & = & 2m(1-m) \\ & & \boxed{(1+m^2)y} & - & m^2(1+m)z & = & 1-m-2m^2 \end{array}\right.$$

donc le système possède une unique solution donnée par

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & \dfrac{m(3+m^2)}{(1+m)(1+m^2)} \\ y & = & \dfrac{1-m}{1+m^2} \\ z & = & \dfrac{2}{1+m} \end{array}\right.$$

► Bilan :

Valeur de m	Ensemble des solutions	Nature géométrique
$m=-1$	$\varnothing$	Que dalle !
$m=0$	$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ y & = & 1 \\ z & = & \lambda \end{array}\right. \quad (\lambda \in \mathbb{R})$	Droite passant par le point $(0,1,0)$ et dirigée par le vecteur $(0,0,1)$
$m=1$	$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1 \\ y & = & \lambda - 1 \\ z & = & \lambda \end{array}\right. \quad (\lambda \in \mathbb{R})$	Droite passant par le point $(1,-1,0)$ et dirigée par le vecteur $(0,1,1)$
$m \notin \{-1;0;1\}$	$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & \dfrac{m(3+m^2)}{(1+m)(1+m^2)} \\ y & = & \dfrac{1-m}{1+m^2} \\ z & = & \dfrac{2}{1+m} \end{array}\right.$	Un point (c'est tout !)

EXERCICE 3

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \dfrac{n!\,\mathrm{e}^n}{n^n\sqrt{n}}\cdot$

0. *On veut démontrer que* $\forall x \in \,]1;+\infty[\,,\ 2/(2x-1) < -\ln(1-1/x) < (2x-1)/\big(2x(x-1)\big)$. *Pour cela, on vous demande de démontrer l'inégalité de gauche et d'expliquer sommairement (et sans aucun calcul) comment on procéderait pour démontrer l'inégalité de droite.*

   Introduisons la fonction
$$f(x) = \frac{2}{2x-1} + \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)\cdot$$
   C'est une fonction dérivable sur $]1;+\infty[$ par théorèmes généraux et l'on peut écrire, pour tout $x \in \,]1;+\infty[$,
$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{4}{(2x-1)^2} + \frac{1}{x^2}\frac{1}{1-1/x} \\ &= -\frac{4}{(2x-1)^2} + \frac{1}{x(x-1)} \\ &= \frac{-4x(x-1)+(2x-1)^2}{(2x-1)^2x(x-1)} \\ &= \frac{1}{(2x-1)^2x(x-1)}, \end{aligned}$$
   ce qui permet de dresser le tableau de variation suivant de la fonction f sur $]1;+\infty[$:

x	1		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	
$f(x)$	$\Vert\ -\infty$	$\nearrow$	0

   On en conclut que $\forall x \in \,]1;+\infty[\,,\ f(x) < 0$, c'est-à-dire
$$\forall x \in \,]1;+\infty[\,, \qquad \frac{2}{2x-1} < -\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)\cdot$$
   En étudiant sur $]1;+\infty[$ la fonction
$$g(x) = \frac{2x-1}{2x(x-1)} + \ln\left(1-\frac{1}{x}\right),$$
   on démontrerait que $\forall x \in \,]1;+\infty[\,,\ g(x) > 0$, c'est-à-dire
$$\forall x \in \,]1;+\infty[\,, \qquad -\ln\left(1-\frac{1}{x}\right) < \frac{2x-1}{2x(x-1)}\cdot$$
   En conclusion,
$$\boxed{\forall x \in \,]1;+\infty[\,, \qquad \frac{2}{2x-1} < -\ln\left(1-\frac{1}{x}\right) < \frac{2x-1}{2x(x-1)}\cdot}$$

1. a) *Démontrer que, pour tout $n \geqslant 2$, on a $u_n/u_{n-1} = \exp\{(n-1/2)[2/(2n-1)+\ln(1-1/n)]\}$ et en déduire le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$.*

Pour tout $n \geqslant 2$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{u_n}{u_{n-1}} &= \frac{n!\,\mathrm{e}^n}{n^n\sqrt{n}} \times \frac{(n-1)^{n-1}\sqrt{n-1}}{(n-1)!\,\mathrm{e}^{n-1}} \\
&= \frac{n!}{(n-1)!} \times \frac{\mathrm{e}^n}{\mathrm{e}^{n-1}} \times \frac{(n-1)^{n-1}\sqrt{n-1}}{n^n\sqrt{n}} \\
&= n \times \mathrm{e} \times \frac{(n-1)^{n-1/2}}{n^{n+1/2}} \\
&= \mathrm{e} \times \frac{(n-1)^{n-1/2}}{n^{n-1/2}} \\
&= \mathrm{e} \times \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1/2} \\
&= \exp\left\{1 + \left(n - \frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{n-1}{n}\right)\right\} \\
&= \exp\left\{\left(n-\frac{1}{2}\right)\left[\frac{2}{2n-1} + \ln\left(\frac{n-1}{n}\right)\right]\right\},
\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\forall n \geqslant 2, \qquad \frac{u_n}{u_{n-1}} = \exp\left\{\left(n-\frac{1}{2}\right)\left[\frac{2}{2n-1} + \ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right]\right\}.}$$

Le résultat de la question 0 nous dit que

$$\forall n \geqslant 2, \qquad \frac{2}{2n-1} + \ln\left(1-\frac{1}{n}\right) < 0.$$

Comme $\forall n \geqslant 2,\ n - 1/2 > 0$, on en déduit que

$$\forall n \geqslant 2, \qquad \left(n-\frac{1}{2}\right)\left[\frac{2}{2n-1} + \ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right] < 0$$

et donc

$$\forall n \geqslant 2, \qquad \exp\left\{\left(n-\frac{1}{2}\right)\left[\frac{2}{2n-1} + \ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right]\right\} < 1$$

c'est-à-dire

$$\forall n \geqslant 2, \qquad \frac{u_n}{u_{n-1}} < 1,$$

ou encore (puisque la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est positive)

$$\forall n \geqslant 2, \qquad u_n < u_{n-1}.$$

On peut donc conclure que

$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\geqslant 1} \text{ est strictement décroissante.}}$$

b) *Démontrer que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente vers une limite positive ou nulle, notée ℓ.*

La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et elle est minorée par 0 (puisqu'elle est positive) donc, d'après le théorème de la limite monotone, on peut affirmer que

$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\geqslant 1} \text{ converge vers une limite } \ell \geqslant 0.}$$

2. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = u_n\,\mathrm{e}^{-1/(4n)}$.*

   a) *Quelle est la limite de la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$?*

   Comme $(u_n)_{n\geqslant 1}$ tend vers ℓ et $(\mathrm{e}^{-1/(4n)})_{n\geqslant 1}$ tend vers 1, on voit clairement que

$$\boxed{\text{la suite } (v_n)_{n\geqslant 1} \text{ converge vers } \ell.}$$

   b) *Démontrer que $\forall n \geqslant 2,\ v_n/v_{n-1} = \exp\{(n-1/2)[(2n-1)/\big(2n(n-1)\big) + \ln(1-1/n)]\}$ et en déduire le sens de variation de $(v_n)_{n\geqslant 1}$. Que peut-on dire de $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$?*

   Pour tout $n \geqslant 2$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{v_n}{v_{n-1}} &= \frac{u_n}{u_{n-1}}\,\frac{\mathrm{e}^{-1/(4n)}}{\mathrm{e}^{-1/\left(4(n-1)\right)}} \\
&= \frac{u_n}{u_{n-1}}\exp\left\{\frac{1}{4(n-1)} - \frac{1}{4n}\right\} \\
&= \frac{u_n}{u_{n-1}}\exp\left\{\frac{1}{4n(n-1)}\right\} \\
&= \exp\left\{1 + \left(n-\frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{n-1}{n}\right)\right\}\exp\left\{\frac{1}{4n(n-1)}\right\} \qquad \text{d'après 2. a)} \\
&= \exp\left\{1 + \frac{1}{4n(n-1)} + \left(n-\frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{n-1}{n}\right)\right\} \\
&= \exp\left\{\frac{4n^2-4n+1}{4n(n-1)} + \left(n-\frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{n-1}{n}\right)\right\} \\
&= \exp\left\{\frac{(2n-1)^2}{4n(n-1)} + \left(n-\frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{n-1}{n}\right)\right\} \\
&= \exp\left\{\left(n-\frac{1}{2}\right)\left[\frac{2n-1}{2n(n-1)} + \ln\left(\frac{n-1}{n}\right)\right]\right\},
\end{aligned}$$

   donc

$$\boxed{\forall n \geqslant 2, \qquad \frac{v_n}{v_{n-1}} = \exp\left\{\left(n-\frac{1}{2}\right)\left[\frac{2n-1}{2n(n-1)} + \ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right]\right\}.}$$

   Le résultat de la question 0 nous dit que

$$\forall n \geqslant 2, \qquad \frac{2n-1}{2n(n-1)} + \ln\left(1-\frac{1}{n}\right) > 0,$$

   ce qui donne

$$\forall n \geqslant 2, \qquad \exp\left\{\left(n-\frac{1}{2}\right)\left[\frac{2n-1}{2n(n-1)} + \ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right]\right\} > 1$$

   c'est-à-dire

$$\forall n \geqslant 2, \qquad \frac{v_n}{v_{n-1}} > 1,$$

   ou encore (puisque la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est positive)

$$\forall n \geqslant 2, \qquad v_n > v_{n-1}.$$

   On peut donc conclure que

$$\boxed{\text{la suite } (v_n)_{n\geqslant 1} \text{ est strictement croissante.}}$$

   La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante, la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante et les deux suites tendent vers la même limite ℓ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$. Par conséquent, on peut dire que

$$\boxed{\text{les suites } (u_n)_{n\geqslant 1} \text{ et } (v_n)_{n\geqslant 1} \text{ sont adjacentes.}}$$

c) *Justifier que $\ell > 0$.*

Comme $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ sont adjacentes, on a $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_1 \geqslant u_n \geqslant \ell \geqslant v_n \geqslant v_1$. En particulier, on a $\ell \geqslant v_1$ avec $v_1 = \mathrm{e}^{3/4} > 0$, donc

$$\boxed{\ell > 0.}$$

3. *Démontrer que $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \ell\sqrt{n}\,(n/\,\mathrm{e})^n$.*

La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ tendant vers ℓ et <u>ℓ n'étant pas nul</u>, on peut écrire que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ell$, c'est-à-dire

$$\frac{n!\,\mathrm{e}^n}{n^n\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ell.$$

En multipliant par $\sqrt{n}\,(n/\,\mathrm{e})^n$ (c'est une opération licite dans les équivalents !), il vient alors

$$\boxed{n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \ell\sqrt{n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n.}$$

4. *À l'aide du résultat de la question précédente, démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{2n}\binom{2n}{n}/2^{2n+1} = 1/\ell$.*

On a

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{2n}}{2^{2n+1}}\binom{2n}{n} &= \frac{\sqrt{2n}}{2^{2n+1}}\frac{(2n)!}{(n!)^2}\\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2n}}{2^{2n+1}}\frac{\ell\sqrt{(2n)}\left(\dfrac{2n}{\mathrm{e}}\right)^{2n}}{\left[\ell\sqrt{n}\left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n\right]^2}\\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2n}}{2^{2n+1}}\frac{2^{2n+1/2}\ell\sqrt{n}\left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^{2n}}{\ell^2 n\left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^{2n}}\\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\ell},
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{2n}}{2^{2n+1}}\binom{2n}{n} = \frac{1}{\ell}.}$$

EXERCICE 4

Jojo le glacier propose g variétés de glaces, s variétés de sorbets et 4 variétés d'accompagnements : chantilly, nappage chocolat, nappage caramel, éclats d'amandes. Le client choisit un certain nombre de boules de glace ou de sorbet (avec éventuellement plusieurs fois le même parfum) et, s'il le désire, un ou plusieurs accompagnement(s). Les éventuels accompagnements sont toujours disposés dans l'ordre suivant : chantilly, nappage, éclats d'amandes (mais l'on n'est pas obligé de mettre les trois). On ne peut pas choisir deux fois le même accompagnement ni choisir simultanément les deux nappages. La commande est servie dans un cornet ou une coupelle, en gauffre.

1. *Dans toute cette question, le client choisit d'être servi dans un cornet. Par conséquent, on tient compte de l'ordre dans lequel les boules sont disposées dans le cornet. Ainsi, le cornet fraise-fraise-chocolat n'est pas le même que le cornet fraise-chocolat-fraise.*

   a) α] *Combien Jojo peut-il servir de cornets différents avec b boules, de parfums distincts ou non (glace ou sorbet), sans accompagnement ?*

   Pour servir un cornet avec b boules, de parfums distincts ou non (glace ou sorbet), sans accompagnement, Jojo doit choisir sucessivement :

   - ▶ 1 première boule parmi les $g + s$ parfums : $g + s$ choix ;
   - ▶ 1 deuxième boule parmi les $g + s$ parfums : $g + s$ choix ;

   $\vdots$

   - ▶ 1 b-ème boule parmi les $g + s$ parfums : $g + s$ choix.

   Donc

   > Jojo peut servir $(g + s)^b$ cornets de b boules, de parfums distincts ou non (glace ou sorbet), sans accompagnement.

   β] *Même question dans le cas où le cornet est surmonté d'un (unique) accompagnement.*

   Pour servir un cornet avec b boules, de parfums distincts ou non (glace ou sorbet), avec un (unique) accompagnement, Jojo doit servir sucessivement :

   - ▶ 1 cornet de b boules : $(g + s)^b$ choix (d'après α]) ;
   - ▶ 1 accompagnement parmi les 4 disponibles : 4 choix.

   Donc

   > Jojo peut servir $4(g + s)^b$ cornets de b boules, de parfums distincts ou non (glace ou sorbet), surmonté d'un unique accompagnement.

   b) α] *Combien Jojo peut-il servir de cornets différents avec b boules, de parfums distincts (glace ou sorbet), sans accompagnement ?*

   Pour servir un cornet avec b boules, de parfums distincts (glace ou sorbet), sans accompagnement, Jojo doit choisir sucessivement :

   - ▶ 1 première boule parmi les $g + s$ parfums : $g + s$ choix ;
   - ▶ 1 deuxième boule parmi les $g + s - 1$ parfums restants : $g + s - 1$ choix ;

   $\vdots$

   - ▶ 1 b-ème boule parmi les $g + s - (b - 1)$ parfums restants : $g + s - b + 1$ choix.

   Donc

   > Jojo peut servir $(g + s)(g + s - 1)\dots(g + s - b + 1) = A^b_{g+s}$ cornets de b boules, de parfums distincts (glace ou sorbet), sans accompagnement.

β] *Même question dans le cas où le cornet est surmonté de deux accompagnements.*

Pour servir un cornet avec b boules, de parfums distincts (glace ou sorbet), avec 2 accompagnements, Jojo doit choisir sucessivement :

▶ 1 cornet de b goûts distincts : $(g+s)(g+s-1)\dots(g+s-b+1)$ choix (par α]) ;

▶ 2 accompagnements parmi 4, sauf le double-nappage : $\binom{4}{2} - 1 = 5$ choix.

Donc

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Jojo peut servir } 5(g+s)(g+s-1)\dots(g+s-b+1) \text{ cornets de } b \text{ boules,}\\ \text{de parfums distincts (glace ou sorbet), avec deux accompagnements.}\end{array}}$$

c) α] *Combien Jojo peut-il servir de cornets avec 4 boules (de parfums distincts ou non, sans accompagnement) dont au moins une est un sorbet ?*

Nous allons passer au complémentaire.
Le nombre de cornets avec 4 boules de glace ou sorbet, de parfums distincts ou non, sans accompagnement, a été déterminé à la question 1. a) α] et vaut $(g+s)^4$.
En tenant un raisonnement similaire à la question 1. a) α] sans les sorbets, on voit que le nombre de cornets avec 4 boules de glace (sans sorbet), de parfums distincts ou non, sans accompagnement, est égal à g^4.
Donc,

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Jojo peut servir } (g+s)^4 - g^4 \text{ cornets de 4 boules (de parfums distincts}\\ \text{ou non, sans accompagnement) dont au moins une est un sorbet.}\end{array}}$$

β] *Combien Jojo peut-il servir de cornets avec 4 boules (de parfums distincts ou non, sans accompagnement) dont au moins 3 sont des glaces ?*

Cette fois, un passage au complémentaire serait contre-productif. Nous allons plutôt découper le dénombrement en deux cas : celui des cornets avec exactement 3 glaces (et donc 1 sorbet) et celui des cornets avec exactement 4 glaces (c'est-à-dire que des glaces !).

Pour servir un cornet avec 4 boules, de parfums distincts ou non, sans accompagnement, avec exactement 3 glaces et 1 sorbet, Jojo doit choisir sucessivement :

▶ 1 position pour le sorbet : 4 choix ;

▶ 1 boule de sorbet : s choix ;

▶ 1 boule de glace pour la première des trois positions restantes : g choix ;

▶ 1 boule de glace pour la deuxième des trois positions restantes : g choix ;

▶ 1 boule de glace pour la dernière des trois positions restantes : g choix ;

ce qui donne $4g^3s$ cornets de ce type.

Par ailleurs, nous avons déjà dit (à la question précédente) que le nombre de cornets avec 4 boules de glace (sans sorbet), de parfums distincts ou non, sans accompagnement, est égal à g^4.

En conclusion,

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Jojo peut servir } 4g^3s + g^4 \text{ cornets de 4 boules (de parfums distincts}\\ \text{ou non, sans accompagnement) dont au moins trois sont des glaces.}\end{array}}$$

2. *À partir de maintenant, le client choisit d'être servi dans une coupelle. On ne tient donc plus compte de l'ordre dans lequel les boules sont disposées dans la coupelle. Ainsi, la coupelle vanille-passion est identique à la coupelle passion-vanille.*

   a) *Combien Jojo peut-il servir de coupelles différentes avec b boules de parfums distincts, sans accompagnement ?*

   L'ordre dans lequel sont disposées les boules n'ayant plus d'importance, Jojo peut servir un cornet de b boules de parfums distincts et sans accompagnement en choisissant simultanément b parfums parmi les $g+s$ disponibles : $\binom{g+s}{b}$ choix. Donc

   $$\boxed{\begin{array}{l}\text{Jojo peut servir } \binom{g+s}{b} \text{ coupelles différentes de } b \text{ boules,}\\ \text{de parfums distincts (glace ou sorbet), sans accompagnement.}\end{array}}$$

   b) *Combien Jojo peut-il servir de coupelles différentes avec 2 boules de glace de parfums distincts, 1 boule de sorbet et 3 accompagnements.*

   Pour servir une coupelle avec 2 boules de glace, 1 boule de sorbet et 3 accompagnements, Jojo doit choisir sucessivement :

   ▶ 2 boules de glace parmi les g parfums : $\binom{g}{2}$ choix ;

   ▶ 1 boule de sorbet parmi les s parfums : s choix ;

   ▶ 3 accompagnements, i.e. chantilly, amandes et un des deux nappages : 2 choix.

   Donc

   $$\boxed{\begin{array}{l}\text{Jojo peut servir } 2\binom{g}{2}s \text{ coupelles avec 2 boules}\\ \text{de glace, 1 boule de sorbet et 3 accompagnements.}\end{array}}$$

   c) *Chaque boule vaut 2 € et chaque accompagnement vaut 1 €. Évéanne veut acheter une coupelle à 5 € dont tous les parfums sont distincts. Combien de coupelles différentes peut lui proposer Jojo ?*

   Une coupelle à 5 € peut contenir ou bien 2 boules et 1 accompagnement ou bien 1 boule et 3 accompagnements.

   Pour servir une coupelle avec 2 boules et 1 accompagnement, Jojo doit choisir successivement :

   ▶ 2 boules parmi les $g+s$ parfums : $\binom{g+s}{2}$ choix ;

   ▶ 1 accompagnement parmi les 4 disponibles : 4 choix ;

   ce qui donne $4\binom{g+s}{2}$ coupelles de ce type.

   Pour servir une coupelle avec 1 boules et 3 accompagnements, Jojo doit choisir successivement :

   ▶ 1 boule parmi les $g+s$ parfums : $g+s$ choix ;

   ▶ 3 accompagnements, i.e. chantilly, amandes et un des deux nappages : 2 choix ;

   ce qui donne $2(g+s)$ coupelles de ce type.

   Donc

   $$\boxed{\text{Jojo peut proposer } 4\binom{g+s}{2} + 2(g+s) \text{ coupelles différentes à 5 €.}}$$

   Remarque : On a $4\binom{g+s}{2} + 2(g+s) = 2(g+s)^2$.

d) *Les glaces et sorbets de Jojo sont répartis en c catégories contenant chacune 4 parfums. Sébastien veut une coupelle « méga-five » : 5 boules, de parfums distincts, dont deux choisies dans une première catégorie, deux d'une autre catégorie et une dernière d'une troisième catégorie. Le tout agrémenté de trois accompagnements, cela va de soi ! Combien existe-t-il de coupelles « méga-five » différentes ?*

Pour servir une coupelle « méga-five », Jojo doit choisir sucessivement :

- ▶ 2 catégories parmi les c disponibles : $\binom{c}{2}$ choix ;
- ▶ 2 boules dans la première catégorie choisie : $\binom{4}{2}$ choix ;
- ▶ 2 boules dans la seconde catégorie choisie : $\binom{4}{2}$ choix ;
- ▶ 1 catégorie parmi les $c-2$ restantes : $c-2$ choix ;
- ▶ 1 boule dans cette catégorie : 4 choix ;
- ▶ 3 accompagnements, i.e. chantilly, amandes et un des deux nappages : 2 choix.

Donc

$$\boxed{\text{il y a } 8(c-2)\binom{c}{2}\binom{4}{2}^2 \text{ coupelles « méga-five » différentes.}}$$

Remarque : On a $8(c-2)\binom{c}{2}\binom{4}{2}^2 = 144c(c-1)(c-2)$.

e) *Combien Jojo peut-il servir de coupelles différentes avec b boules, de parfums distincts ou non, sans accompagnement ? Indication : on pourra se servir de gauffrettes pour séparer les parfums…*

Pour séparer les $g+s$ parfums vendus par Jojo, nous introduisons $g+s-1$ gaufrettes. Dans une coupelle de b boules, on va donc trouver $b+g+s-1$ objets : les b boules et les $g+s-1$ gaufrettes. Par conséquent, déterminer le contenu d'une coupelle revient à choisir simultanément les b positions des gaufrettes parmi les $b+g+s-1$ objets de la coupelle. Par conséquent,

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{il y a } \binom{b+g+s-1}{b} \text{ coupelles avec } b \text{ boules, de} \\ \text{parfums distincts ou non, sans accompagnement.}\end{array}}$$