Devoir sur table nº 3

— Durée : 4 heures —

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite

Exercice 1 — On note $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

Partie I

1. a) Justifier que f est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

b) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

2. a) Étudier les variations de la fonction $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $u(x) = (1-x)e^x - 1$ (*le calcul des limites à l'infini n'est pas demandé*).

b) Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f'(x) < 0$.

c) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$ puis dresser le tableau de variation de f.

d) Montrer que la courbe représentative de f admet une asymptote oblique en $-\infty$.

e) Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

Partie II

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Résoudre l'équation $f(x) = x$. On notera α la solution obtenue.

2. a) Établir : $\forall x \in [0, +\infty[,\ e^{2x} - 2x\,e^x - 1 \geq 0$.

b) Montrer : $\forall x \in]0, +\infty[,\ f'(x) + \dfrac{1}{2} = \dfrac{e^{2x} - 2x\,e^x - 1}{2(e^x - 1)^2}$.

c) Montrer : $\forall x \in]0, +\infty[,\ -\frac{1}{2} \leq f'(x) < 0$.

d) Établir : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$.

3. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}(1 - \alpha)$.

4. Conclure que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.

5. Écrire un programme Scilab qui calcule et affiche le plus petit entier naturel n tel que $|u_n - \alpha| < 10^{-9}$.

Exercice 2 — On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = x^x$ si $x > 0$ et $f(0) = 1$.

1. Vérifier que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Montrer que f est continue (à droite) en 0. Est-elle dérivable (à droite) en 0 ?

3. Dresser le tableau de variation de f.

4. On note g la restriction de f à l'intervalle $I = [\frac{1}{e}, +\infty[$. Montrer que g réalise une bijection de I sur un intervalle J que l'on précisera.

5. Montrer qu'il existe une application $\varphi : J \to I$ telle que : $\forall x \in J,\ \varphi(x)^{\varphi(x)} = x$.

6. Démontrer que $\dfrac{\varphi(x)}{\ln x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

7. Déterminer l'ensemble K des points en lesquels φ est dérivable et montrer : $\forall x \in K,\ \varphi'(x) = \dfrac{\varphi(x)}{x(\varphi(x) + \ln x)}$.

8. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{T}_n$ la tangente à la courbe représentative de φ en n et u_n l'abscisse du point d'intersection de $\mathcal{T}_n$ avec l'axe des abscisses. Exprimer u_n en fonction de n et de $\varphi(n)$ puis montrer que $\dfrac{u_n}{-n\ln n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Exercice 3 — *Dans tout l'exercice p est un réel de l'intervalle $]0,1[$ et $q = 1 - p$*

Sur une table sont placées deux pilules bleues (étape 0). Une des deux pilules est choisie au hasard et éliminée de la table. Ensuite, indépendamment de la pilule éliminée, on repose sur la table :

- soit une pilule rouge, avec la probabilité p ;
- soit une pilule bleue, avec la probabilité $q = 1 - p$.

On a alors atteint l'étape 1.

Cette action est répétée ainsi indéfiniment de sorte qu'à chaque étape k, deux pilules sont sur la table :

- soit deux bleues (événement noté A_k) ;
- soit une bleue et une rouge (événement noté B_k) ;
- soit deux rouges (événement noté C_k) .

A chaque étape, une des deux pilules est choisie *au hasard* puis remplacée comme précédemment soit par une pilule rouge avec la probabilité p soit par une pilule bleue avec la probabilité $q = 1 - p$.
Pour $k \in \mathbb{N}$, on note également $a_k = P(A_k)$, $b_k = P(B_k)$, $c_k = P(C_k)$ et on considère les matrices suivantes :

$$M = \begin{pmatrix} q & \frac{q}{2} & 0 \\ p & \frac{1}{2} & q \\ 0 & \frac{p}{2} & p \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & q & q^2 \\ -2 & p-q & 2pq \\ 1 & -p & p^2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad U_k = \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{pmatrix}, \quad \text{avec} \quad U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1. a) Calculer le produit PD.

b) Calculer le produit MP et, en utilisant la relation $p + q = 1$, vérifier que $MP = PD$.

2. a) Donner a_0, b_0 et c_0 puis justifier que $a_1 = q$, $b_1 = p$ et $c_1 = 0$.

b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Justifier que : $P_{A_k}(A_{k+1}) = q$, $P_{B_k}(A_{k+1}) = \frac{q}{2}$ et $P_{C_k}(A_{k+1}) = 0$.
Donner aussi $P_{A_k}(B_{k+1})$, $P_{B_k}(B_{k+1})$, $P_{C_k}(B_{k+1})$, $P_{A_k}(C_{k+1})$, $P_{B_k}(C_{k+1})$ et $P_{C_k}(C_{k+1})$.
Indication : On pourra utiliser les événements suivants, indépendants à l'étape k, E :« Retirer une pilule rouge de la table » et F :« Poser une pilule rouge sur la table ».

c) Montrer que pour tout entier naturel k non nul, $U_{k+1} = MU_k$.

d) En utilisant la question **1.b)**, montrer par récurrence que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $U_k = PD^k \begin{pmatrix} p^2 \\ 2p \\ 1 \end{pmatrix}$.

e) En déduire, pour tout entier naturel k non nul, les valeurs de a_k, b_k et c_k en fonction de k et montrer que $\lim\limits_{k\to+\infty} a_k = q^2$, $\lim\limits_{k\to+\infty} b_k = 2pq$ et $\lim\limits_{k\to+\infty} c_k = p^2$.

Exercice 4 — On considère les matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $L = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

On pose $B = I - A$ (où I est la matrice identité) et, pour tout entier naturel n non nul, on note $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} A^k$.

Partie I

1. Ecrire la matrice B explicitement (*et sans faute !*) puis montrer que B est inversible et calculer son inverse.

2. a) Calculer LM, ML, L^2 et M^2.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $L^n = 3^{n-1}L$ et $M^n = 3^{n-1}M$. (On ne détaillera qu'une des deux relations)

c) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = 3^{n-1}L - (-3)^{n-1}M$.

d) En déduire, pour tout entier naturel n non nul, une expression de S_n en fonction de I, L, M et n.

3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = B^{-1}(I - A^n)$.

Partie II

1. On pose $X_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}$ puis on définit $X_n \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $X_n = AX_{n-1} + U$.

a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $X_n = A^n X_0 + S_n U$.

b) En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, une expression explicite de X_n en fonction de n.

2. On pose $Y_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $V_n = \begin{pmatrix} -\frac{7}{3}n \\ -5n \\ \frac{1}{3}n \end{pmatrix}$.

On définit $Y_n \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $Y_n = AY_{n-1} + V_n$.

a) Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.

Pour tout entier n, on pose alors $Z_n = P^{-1}Y_n$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que Z_n est donné par $Z_n = DZ_{n-1} + W_n$ où $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est une matrice diagonale et $W_n \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ (on déterminera D et W_n).

c) On note $Z_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$. Montrer que $u_n = -7n$, $v_n = 3v_{n-1}$ et $w_n = -3w_{n-1} + 8n$, ceci pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

d) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $p_n = 2n + \frac{3}{2}$ et $q_n = w_n - p_n$. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = -3p_{n-1} + 8n$ et en déduire que la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $q_n = w_n - p_n$, est une suite géométrique.

e) En déduire une expression de Z_n puis une expression de Y_n en fonction de n.