Devoir à la maison 7 à rendre au plus tard le lundi 1 février 2016

Exercice 1:

Faire l'exercice 12 de la feuille 13 sur les intégrales de Wallis.
On pourra rajouter une question préliminaire pour se mettre en jambes : calculer W_0 et W_1.
Dans cet exercice, toutes les méthodes sont classiques, mais les calculs sont parfois astucieux, notamment dans les questions 2. et 3. N'hésitez pas à me solliciter !

Exercice 2:

On pourra admettre dans cet exercice la limite suivante : $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\sin t - t}{t^2} = 0$

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \int_x^{2x} \frac{\sin t}{t^2} dt$ si $x \neq 0$ et $f(0) = \ln(2)$.
ainsi que la fonction g définie par $g(t) = \begin{cases} \frac{\sin t - t}{t^2} & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

1. Justifier soigneusement que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. (a) Vérifier que g est continue sur $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer alors que : $\lim\limits_{x\to 0} \int_x^{2x} g(t)dt = 0$.
   (c) En déduire que f est continue en 0.
3. Montrer que f est paire.
4. (a) Montrer que f est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ et calculer $f'(x)$, pour tout réel x non nul.
   (b) Dresser le tableau de variations de f sur $[-2\pi, 2\pi]$.
   (c) Montrer que $f(\pi) < 0$.
   (d) Montrer que $f(2\pi) = \int_{2\pi}^{3\pi} (\frac{1}{t^2} - \frac{1}{(t+\pi)^2}) \sin t dt$. (*On pourra couper l'intégrale, puis changer de variable*).
   En déduire $f(2\pi) > 0$.
   (e) Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ sur $[-2\pi, 2\pi]$.
5. (a) Montrer que : $\forall x \in]0, +\infty[$, $|f(x)| \leq \frac{1}{2x}$.
   (b) En déduire $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

Devoir à la maison 7 à rendre au plus tard le lundi 1 février 2016

Exercice 3:

Faire l'exercice 12 de la feuille 13 sur les intégrales de Wallis.
On pourra rajouter une question préliminaire pour se mettre en jambes : calculer W_0 et W_1.
Dans cet exercice, toutes les méthodes sont classiques, mais les calculs sont parfois astucieux, notamment dans les questions 2. et 3. N'hésitez pas à me solliciter !

Exercice 4:

On pourra admettre dans cet exercice la limite suivante : $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\sin t - t}{t^2} = 0$

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \int_x^{2x} \frac{\sin t}{t^2} dt$ si $x \neq 0$ et $f(0) = \ln(2)$.
ainsi que la fonction g définie par $g(t) = \begin{cases} \frac{\sin t - t}{t^2} & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

1. Justifier soigneusement que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. (a) Vérifier que g est continue sur $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer alors que : $\lim\limits_{x\to 0} \int_x^{2x} g(t)dt = 0$.
   (c) En déduire que f est continue en 0.
3. Montrer que f est paire.
4. (a) Montrer que f est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ et calculer $f'(x)$, pour tout réel x non nul.
   (b) Dresser le tableau de variations de f sur $[-2\pi, 2\pi]$.
   (c) Montrer que $f(\pi) < 0$.
   (d) Montrer que $f(2\pi) = \int_{2\pi}^{3\pi} (\frac{1}{t^2} - \frac{1}{(t+\pi)^2}) \sin t dt$. (*On pourra couper l'intégrale, puis changer de variable*).
   En déduire $f(2\pi) > 0$.
   (e) Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ sur $[-2\pi, 2\pi]$.
5. (a) Montrer que : $\forall x \in]0, +\infty[$, $|f(x)| \leq \frac{1}{2x}$.
   (b) En déduire $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.