Exo 14

Etablir l'existence d'un unique triplet (a,b,c) de nombres réels tels que

$$\frac{x^2 + 1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x-3}$$

Exo 17

Résoudre le système d'inconnues complexes et de paramètre complexe m

$$(S) \quad \begin{cases} x + y + mz = m \\ x + my - z = 1 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

Exo 20

Résoudre le système d'inconnues complexes et de paramètre complexe m

$$(S) \quad \begin{cases} x - y + z = m \\ mx + y - z = 1 \\ x - y + mz = 1 \end{cases}$$

Exo 22

Résoudre le système d'inconnues complexes et de paramètre complexe λ

$$(S) \quad \begin{cases} \lambda x + y + z = \lambda^2 \\ x + \lambda y - \lambda z = \lambda \\ x - y + \lambda z = 1 \end{cases}$$

Correction de l'exo 14

En mettant sous le même dénominateur nous obtenons que

$$\begin{aligned} \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x-3} &= \frac{a(x-2)(x-3) + b(x-1)(x-3) + c(x-2)(x-1)}{(x-1)(x-2)(x-3)} \\ &= x^2(a+b+c) + x(-5a-4b-3c) + (6a+3b+2c) \end{aligned}$$

De sorte que, par identification des coefficients du polynôme au dénominateur, l'identité de l'énoncé est équivalente au système

$$(S) \quad \begin{cases} a + b + c = 1 \\ -5a - 4b - 3c = 0 \\ 6a + 3b + 2c = 1 \end{cases}$$

En procédant aux opérations $L_2 \leftarrow L_2 + 5L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 6L_1$, puis $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$ et $L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2$ pour terminer par $L_1 \leftarrow L_1 + L_3$ et $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3$ nous obtenons alors que

$$\begin{aligned} (S) &\iff \begin{cases} a + b + c = 1 \\ b + 2c = 5 \\ -3b - 4c = -5 \end{cases} \iff \begin{cases} a - c = -4 \\ b + 2c = 5 \\ 2c = 10 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a - c = -4 \\ b + 2c = 5 \\ c = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = -5 \\ c = 5 \end{cases} \end{aligned}$$

Correction de l'exo 17

En procédant aux opérations $L_1 \leftarrow L_1 - L_3$ et $L_2 \leftarrow L_2 - L_3$, il vient

$$(S) \iff \begin{cases} (m+1)z = m-1 \\ (m-1)y = 0 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

Lorsque $m = -1$, ce système n'admet pas de solution et lorsque $m = 1$, ce système admet une infinité de solution de la forme

$$(S) \iff \begin{cases} z = 0 \\ y = 1 - x \end{cases}$$

Par contre, lorsque $m \in \{-1, 1\}$, nous procédons aux opérations $L_1 \leftarrow L_1/(m+1)$, $L_2 \leftarrow L_2/(m-1)$ pour en déduire que

$$(S) \iff \begin{cases} z & = \frac{m-1}{m+1} \\ y & = 0 \\ x & = 1 + z = \frac{2m}{m+1} \end{cases}$$

Correction de l'exo 20

En procédant aux opérations $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, il vient

$$(S) \iff \begin{cases} x & -y & +z & = m \\ (m+1)x & & & = m+1 \\ & & (m-1)z & = 1-m \end{cases}$$

Lorsque $m = -1$, ce système admet une infinité de solution de la forme

$$(S) \iff \begin{cases} z & = 1 \\ y & = -2 + y \end{cases}$$

et lorsque $m = 1$, ce système admet une infinité de solution de la forme

$$(S) \iff \begin{cases} x & = 1 \\ y & = z \end{cases}$$

Par contre, lorsque $m \in \{-1, 1\}$, nous procédons aux opérations $L_2 \leftarrow L_2/(m+1)$ et $L_3 \leftarrow L_3/(m-1)$ pour en déduire que

$$(S) \iff \begin{cases} x & = 1 \\ y & = x + z - m = -m \\ z & = -1 \end{cases}$$

Correction de l'exo 22

En procédant aux opérations $L_1 \leftarrow L_1 - \lambda L_3$ et $L_2 \leftarrow L_2 - L_3$, il vient

$$(S) \iff \begin{cases} (\lambda+1)y & + (1-\lambda^2)z & = \lambda^2 - \lambda \\ (\lambda+1)y & - 2\lambda z & = \lambda - 1 \\ x & - y & + \lambda z & = 1 \end{cases}$$

Il résulte alors des opérations $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$ et $L_3 \leftarrow (\lambda+1)L_3 + L_2$ que

$$(S) \iff \begin{cases} & & (1+2\lambda-\lambda^2)z & = \lambda^2 - 2\lambda + 1 \\ & (\lambda+1)y & - 2\lambda z & = \lambda - 1 \\ (\lambda+1)x & & + \lambda(\lambda-1)z & = 2\lambda \end{cases}$$

Lorsque λ est l'une des deux racines de $1 + 2\lambda - \lambda^2$, le système n'a pas de solution. Lorsque $\lambda = -1$, S n'a pas de solution. Et lorsque $\lambda \neq -1$ n'est pas une racine de $1 + 2\lambda - \lambda^2$, le système possède une unique solution donnée par

$$(S) \iff \begin{cases} z & = \frac{\lambda^2 - 2\lambda + 1}{(1+2\lambda-\lambda^2)} \\ y & = \frac{\lambda - 1 + 2\lambda z}{\lambda + 1} \\ x & = \frac{2\lambda - \lambda(\lambda-1)z}{\lambda + 1} \end{cases}$$