## Partie I : Calcul des puissances $n$-ièmes d'une matrice.

1. Soit $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $J^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Soit $A = \frac{1}{4}(I_3 + J)$ où $I_3$ est la matrice identité de taille 3. Calculer $A^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

## Partie II : Application à un problème de probabilités.

Une société de location de voitures possède trois agences en région parisienne : une à Orly, une à Roissy et une au centre de Paris. Lorsqu'un client loue une voiture, un jour donné, dans une des trois agences, il la restitue le jour même dans une de ces trois agences. On suppose qu'une voiture donnée n'est louée qu'une seule fois dans la journée.
Une étude statistique a permis de montrer que, pour une voiture donnée :

- si elle est louée à Orly un certain jour, alors elle est rendue le soir à Orly avec la probabilité $\frac{1}{2}$, tandis qu'elle est rendue à Roissy avec la probabilité $\frac{1}{4}$ ;
- si elle est louée à Roissy, alors elle est rendue à Roissy avec la probabilité $\frac{1}{2}$, tandis qu'elle est rendue à Orly avec la probabilité $\frac{1}{4}$ ;
- de même, si elle est louée au centre de Paris, elle est rendue au centre de Paris avec la probabilité $\frac{1}{2}$, et rendue à Roissy avec la probabilité $\frac{1}{4}$.

Pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, on note $R_n$ (respectivement $C_n$) l'événement “ la voiture se trouve à Roissy (respectivement Centre de Paris) le soir du $n$-ième jour ” et on note $S_n$ l'événement “ la voiture se trouve à Orly le soir du $n$-ième jour ” (La lettre $S$ a été choisie pour Sud de Paris, j'ai préféré évité la lettre $O$ pour qu'il n'y ait pas de confusion possible avec 0=zéro)
On considère les probabilités suivantes : $r_n = P(R_n)$, $c_n = P(C_n)$, $s_n = P(S_n)$.
On suppose qu'au matin du premier jour, la voiture se trouve au centre de Paris.

1. Pour $n \geq 0$, calculer $r_{n+1}, c_{n+1}$ et $s_{n+1}$ en fonction de $r_n, c_n$ et $s_n$.
2. On note $U_n$ la matrice unicolonne : $U_n = \begin{pmatrix} P(R_n) \\ P(C_n) \\ P(S_n) \end{pmatrix}$. Préciser $U_0$ et $U_1$. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $U_{n+1} = AU_n$.
3. En déduire les expressions générales de $r_n, c_n$ et $s_n$, et leurs limites lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

*Chaînes de Markov : Supposez qu'il y a un système physique ou mathématique qui a $n$ états possibles et à n'importe quel moment, le système est dans un et seulement un de ces $n$ états. Supposez aussi que, durant une période d'observation donnée, disons la $k$-ième période, la probabilité que le système soit dans un état particulier dépend seulement de son statut à la période $k-1$. Un tel système s'appelle chaîne de Markov ou processus de Markov.*
*Dans l'exemple étudié ci-dessus, le système est la voiture, et les trois états possibles sont “être à Orly”, “être à Roissy” et “être au centre de paris”.*
*C'est Markov lui-même qui a le premier appliqué ses chaînes à un domaine autre que les mathématiques. Il s'en est servi pour analyser les successions de lettres dans l'alphabet russe. Le même type d'applications se retrouve aujourd'hui dans les téléphones portables : les chaînes de Markov sont mises à contribution par les logiciels d'écriture de SMS, qui essaient de deviner ce que vous allez écrire. Plus sérieusement, les chaînes de Markov sont devenues un outil très employé, pour l'anlyse de l'ADN, la prédiction de l'évolution des épidémies,.... Voir par exemple : http ://www.bibmath.net/*