1. a. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, prouvons par récurrence la proposition

$$(P_n) \qquad J^n = 3^{n-1}.J$$

La propriété P_1 est vraie car $J^1 = 3^{1-1}J = J$. Supposons P_n pour un entier $n \geqslant 1$.

Il résulte alors de P_n et de la relation $J^2 = 3J$ que

$$J^{n+1} = J \times J^n = J \times 3^{n-1}J = 3^{n-1}J^2 = 3^{n-1} \times 3J = 3^n J.$$

A fortiori, P_{n+1} est vraie. En conclusion, la proposition P_n est vraie pour $n \geqslant 1$.

b. Soit $n \geqslant 0$. Comme $I_3 \times A = A = A \times I_3$, la matrice I_3 commute avec la matrice A de sorte que nous pouvons appliquer le binôme de Newton (deux fois) et utiliser le résultat de la question 1 pour obtenir que

$$\begin{aligned}
A^n &= \tfrac{1}{4^n}(I_3+J)^n = \tfrac{1}{4^n}\textstyle\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} J^k I_3^{n-k} = \tfrac{1}{4^n}\left(\binom{n}{0}J^0 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} J^k\right)\\
&= \tfrac{1}{4^n}\left(I_3 + \textstyle\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 3^{k-1} J\right) = \tfrac{1}{4^n}\left(I_3 + \tfrac{1}{3}\left(\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 3^k\right).J\right)\\
&= \tfrac{1}{4^n}\left(I_3 + \tfrac{1}{3}\left(-\binom{n}{0} + \textstyle\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 3^k\right).J\right)\\
&= \tfrac{1}{4^n}\left(I_3 + \tfrac{1}{3}\left(-1+(1+3)^n\right)J\right)
\end{aligned}$$

En particulier, nous obtenons que

$$A^n = \frac{1}{4^n}\left(I_3 + \frac{4^n-1}{3}J\right) \qquad (n \geqslant 0)$$

2. a. En appliquant la formule des probabilités totales à l'événement R_{n+1} et au système complet $\{R_n, C_n, S_n\}$, nous obtenons que

$$r_{n+1} = P(R_{n+1}) = P(R_{n+1} \cap R_n) + P(R_{n+1} \cap C_n) + P(R_{n+1} \cap S_n)$$

Il résulte alors de la formule des probabilités composées (et des données de l'énoncé) que

$$\begin{aligned}
r_{n+1} &= P(R_n) \times P_{R_n}(R_{n+1}) + P(C_n) \times P_{C_n}(R_{n+1}) + P(S_n) \times P_{S_n}(R_{n+1})\\
&= \tfrac{1}{2}r_n + \tfrac{1}{4}c_n + \tfrac{1}{4}s_n
\end{aligned}$$

De même, nous pouvons établir que

$$\begin{aligned}
c_{n+1} &= \tfrac{1}{4}r_n + \tfrac{1}{2}c_n + \tfrac{1}{4}s_n\\
s_{n+1} &= \tfrac{1}{4}r_n + \tfrac{1}{4}c_n + \tfrac{1}{2}s_n
\end{aligned}$$

b. Il résulte du résultat de la question précédente que nous avons

$$U_{n+1} = A \times U_n \qquad (n \geqslant 0)$$

Par ailleurs, les données initiales de l'énoncées induisent que $c_0 = P_0(C_0) = 1$ de sorte que $U_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et, par suite,

$$U_1 = A \times U_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

c. Il résulte alors des résultats des questions I.2 et II.2 que

$$\begin{pmatrix} r_n \\ c_n \\ s_n \end{pmatrix} = U_n = A^n \times U_0 = \frac{1}{4^n}\left(I_3 + \frac{4^n - 1}{3} J\right) \times U_0 = \frac{U_0}{4^n} + \frac{1}{3} J \times U_0 - \frac{1}{4^n 3} J \times U_0$$

Par passage à la limite, nous obtenons alors que

$$\begin{pmatrix} \lim r_n \\ \lim c_n \\ \lim s_n \end{pmatrix} = \lim U_n = \frac{1}{3} J \times U_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$