Corrigé du devoir maison 6

Exercice 1 : `edhec Ast1 2010`

1. A gauche en 0 : FI $\infty\times 0$. On se ramène aux croissances comparées en posant $y=\frac{1}{x}\underset{x\to 0^-}{\longrightarrow}-\infty$. Alors pour $x<0$, $f(x)=(\frac{1}{x}+1)e^{1/x}=\frac{1}{x}e^{1/x}+e^{1/x}=ye^y+e^y\underset{y\to-\infty}{\longrightarrow}0=f(0)$. Donc f continue à gauche en 0.
   A droite en 0 : $f(x)\underset{x\to 0^+}{\longrightarrow}+\infty$ donc asymptote verticale d'équation $x=0$.
2. f n'étant pas continue à droite en 0, ne peut pas être dérivable à droite en 0. Donc étude à gauche en 0 : pour $x<0$, $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{f(x)}{x}=\frac{1+x}{x^2}e^{1/x}=\frac{1}{x^2}e^{1/x}+\frac{1}{x}e^{1/x}=y^2e^y+ye^y\underset{y\to-\infty}{\longrightarrow}0\in\mathbb{R}$ (croissances comparées, avec le même changement de variable). D'où f est dérivable à gauche en 0 et $f'_g(0)=0$.
3. f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour $x\neq 0$, $f'(x)=\frac{x-(1+x)}{x^2}e^{1/x}+\frac{1+x}{x}(-\frac{1}{x^2})e^{1/x}=\frac{-2x-1}{x^3}e^{1/x}$. Donc sur $]0,+\infty[$, $f'(x)<0$ et f est strictement décroissante, et sur $]-\infty,0[$, $x^3<0$ et $-2x-1<0\Leftrightarrow -\frac{1}{2}<x$ donc f y admet un minimum en $x=-1/2$ de valeur $f(-1/2)=-e^{-2}$.
   Limites en $\pm\infty$: $\frac{x+1}{x}=1+\frac{1}{x}\underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow}1$ d'où $f(x)\underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow}1$.
4. Penser aux asymptotes horizontales (en $\pm\infty$) et verticale (en 0) ; à la tangente horizontale en $-\frac{1}{2}$.
5. (a) f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, donc f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $f(\mathbb{R}_+^*)=]1,+\infty[$. Donc comme pour tout entier $n\geq 2$, $n\in]1,+\infty[$, par définition de la bijection, il existe un unique $u_n\in\mathbb{R}_+^*$ tel que $f(u_n)=n$.
   (b) Poser $g(x)=\sqrt{x}-1-\frac{1}{2}\ln x$ sur $[1,+\infty[$. Alors g est dérivable sur $[1,+\infty[$ et $g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2x}=\frac{\sqrt{x}-1}{2x}\geq 0$. Donc g est croissante sur $[1,+\infty[$, et comme $g(1)=0$, on obtient que g est positive sur $[1,+\infty[$.
   (c) Pour $n\geq 2$, $f(\frac{1}{\ln(\sqrt{n})})=\frac{1+1/\ln(\sqrt{n})}{1/\ln(\sqrt{n})}e^{\ln(\sqrt{n})}=(\ln(\sqrt{n})+1)\sqrt{n}=(\frac{1}{2}\ln(n)+1)\sqrt{n}\leq\sqrt{n}\sqrt{n}=n$ par b).
   (d) $u_n>0$ et par c), on obtient que pour $n\geq 2$, $f(\frac{1}{\ln(\sqrt{n})})\leq n=f(u_n)$ d'où par stricte décroissance de f sur $\mathbb{R}_+^*$, $u_n\leq\frac{1}{\ln(\sqrt{n})}$. D'où l'encadrement : $0<u_n\leq\frac{1}{\ln(\sqrt{n})}$.
   Théorème d'encadrement : $u_n\to 0$.
   (e) Par définition de u_n, $f(u_n)=n$ d'où $\frac{1+u_n}{u_n}e^{1/u_n}=n$, soit $nu_n=(1+u_n)e^{1/u_n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$ car $u_n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0^+$.

Exercice 2 :

1. Poser la fonction $f(x)=e^x-3-2x$ définie sur $\mathbb{R}^-$ et faire son T.V. : f est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$ donc f réalise une bijection de $\mathbb{R}^-$ sur $f(]-\infty,0])=[f(0),\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)[=[-2,+\infty[$.
   Or $0\in[-2,+\infty[$ donc l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution $\alpha\in\mathbb{R}^-$.
   $f(-2)=1+\frac{1}{e^2}\geq 0$ et $f(-1)=\frac{1}{e}-1\leq 0$ donc $f(-1)\leq f(\alpha)\leq f(-2)$ et par stricte décroissance de f sur $\mathbb{R}^-$, $-1\geq\alpha\geq -2$.
2. a) Soit $x\in\mathbb{R}^-$; $g(x)=x\Leftrightarrow e^x-3=2x\Leftrightarrow f(x)=0\Leftrightarrow x=\alpha$ par 1. Donc α unique point fixe de g sur $\mathbb{R}^-$.
   b) Faire le tableau de variations de g : g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x\in\mathbb{R}$, $g'(x)=e^x/2>0$.
   On trouve que $g(]-\infty,0])=]-3/2,-1]\subset]-\infty,0]$ donc $\forall x\in]-\infty,0]$, $g(x)\in]-\infty,0]$.
   De plus $x\leq 0\Rightarrow e^x\leq e^0=1$ (par croissance de l'exp) $\Rightarrow e^x/2<\frac{1}{2}$. Et $g'(x)\geq 0$ donc pour $x\leq 0$, $|g'(x)|=g'(x)\leq\frac{1}{2}$.
3. (a) Récurrence : supposons $u_n\leq 0$, alors $u_n\in]-\infty,0]$, et par 2.b) $u_{n+1}=g(u_n)\in]-\infty,0]$ d'où $u_{n+1}\leq 0$.
   (ou utiliser la monotonie de g pour construire l'inégalité sur u_{n+1} ... mais moins dans l'esprit de l'énoncé).
   (b) g est dérivable sur $\mathbb{R}^-$ et $\forall x\in\mathbb{R}^-$, $|g'(x)|\leq\frac{1}{2}$, donc on peut appliquer l'IAF à g aux points $u_n\in\mathbb{R}^-$ et $\alpha\in\mathbb{R}^-$: $|g(u_n)-g(\alpha)|\leq\frac{1}{2}|u_n-\alpha|\Leftrightarrow|u_{n+1}-\alpha|\leq\frac{1}{2}|u_n-\alpha|$ car $g(\alpha)=\alpha$ d'après 2.a)
   Montrer alors par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}$, $|u_n-\alpha|\leq\frac{1}{2^n}$.
   initialisation : Attention, l'initialisation est difficile ici, donc bien tout justifier ! $|u_0-\alpha|=|-1-\alpha|$.
   Or $-2\leq\alpha\leq-1\Rightarrow 2\geq-\alpha\geq 1\Rightarrow -1+2\geq-1-\alpha\geq-1+1\Rightarrow 1\geq-1-\alpha\geq 0\Rightarrow|-1-\alpha|\leq 1$.
   D'où $|u_0-\alpha|\leq 1=\frac{1}{2^0}$.
   hérédité : supposons $|u_n-\alpha|\leq\frac{1}{2^n}$ et montrons $|u_{n+1}-\alpha|\leq\frac{1}{2^{n+1}}$.
   Or $|u_{n+1}-\alpha|\leq\frac{1}{2}|u_n-\alpha|$ (par ce qui précède) $\leq\frac{1}{2}\frac{1}{2^n}$ (H.R.) $=\frac{1}{2^{n+1}}$. *Conclure.*
   (c) Théorème d'encadrement : $\frac{1}{2^n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$ (car $2>1$) donc $u_n-\alpha\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0\Leftrightarrow u_n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\alpha$....
   (d) Comme (u_n) converge vers α, si n est suffisamment grand, u_n donnera une bonne valeur approchée de α. On cherche donc n tel que $|u_n-\alpha|\leq 10^{-9}$: pour cela, il suffit que $\frac{1}{2^n}\leq 10^{-9}$ car alors $|u_n-\alpha|\leq\frac{1}{2^n}\leq 10^{-9}$. Puis $\frac{1}{2^n}\leq 10^{-9}\Leftrightarrow 10^9\leq 2^n\Leftrightarrow\ln(10^9)\leq\ln(2^n)$ (par stricte croissance du ln) $\Leftrightarrow 9\ln(10)\leq n\ln(2)\Leftrightarrow\frac{9\ln(10)}{\ln(2)}\leq n$ (car $\ln(2)>0$). Le premier n qui convient est $n_0=\lfloor\frac{9\ln(10)}{\ln(2)}\rfloor+1$.
   Il reste à écrire un programme qui calcule n_0 puis renvoie u_{n_0} : `u=-1; n=floor[9*log(10)/log(2)]+1; for k=1:n; u=(exp(u)-3)/2 ; end; disp(u)`