Devoir à la maison 6 à rendre le jeudi 10 décembre 2015

Exercice 1:

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \frac{1+x}{x}\exp(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1. Montrer que f est continue à gauche en 0. Qu'en est-il à droite en 0 ?
2. Montrer que f est dérivable à gauche en 0 et déterminer $f'_g(0)$. Qu'en est-il à droite en 0 ?
3. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \neq 0$ puis dresser le tableau de variations complet de f.
4. Représenter graphiquement la fonction f.
5. (a) Montrer que pour tout $n \geq 2$, il existe un unique réel strictement positif noté u_n vérifiant $f(u_n) = n$.
   (b) Montrer que pour tout réel $x \geq 1$: $1 + \frac{\ln x}{2} \leq \sqrt{x}$.
   (c) Etablir alors que : $\forall n \geq 2$, $f(\frac{1}{\ln(\sqrt{n})}) \leq n$.
   (d) En déduire un encadrement de u_n puis la valeur de la limite de u_n quand $n \to +\infty$.
   (e) En revenant à la définition de u_n, montrer que $nu_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

Exercice 2:

Faire l'exercice 17 Feuille 10

Devoir à la maison 6 à rendre le jeudi 10 décembre 2015

Exercice 3:

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \frac{1+x}{x}\exp(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1. Montrer que f est continue à gauche en 0. Qu'en est-il à droite en 0 ?
2. Montrer que f est dérivable à gauche en 0 et déterminer $f'_g(0)$. Qu'en est-il à droite en 0 ?
3. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \neq 0$ puis dresser le tableau de variations complet de f.
4. Représenter graphiquement la fonction f.
5. (a) Montrer que pour tout $n \geq 2$, il existe un unique réel strictement positif noté u_n vérifiant $f(u_n) = n$.
   (b) Montrer que pour tout réel $x \geq 1$: $1 + \frac{\ln x}{2} \leq \sqrt{x}$.
   (c) Etablir alors que : $\forall n \geq 2$, $f(\frac{1}{\ln(\sqrt{n})}) \leq n$.
   (d) En déduire un encadrement de u_n puis la valeur de la limite de u_n quand $n \to +\infty$.
   (e) En revenant à la définition de u_n, montrer que $nu_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

Exercice 4:

Faire l'exercice 17 Feuille 10

Devoir à la maison 6 à rendre le jeudi 10 décembre 2015

Exercice 5:

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \frac{1+x}{x}\exp(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1. Montrer que f est continue à gauche en 0. Qu'en est-il à droite en 0 ?
2. Montrer que f est dérivable à gauche en 0 et déterminer $f'_g(0)$. Qu'en est-il à droite en 0 ?
3. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \neq 0$ puis dresser le tableau de variations complet de f.
4. Représenter graphiquement la fonction f.
5. (a) Montrer que pour tout $n \geq 2$, il existe un unique réel strictement positif noté u_n vérifiant $f(u_n) = n$.
   (b) Montrer que pour tout réel $x \geq 1$: $1 + \frac{\ln x}{2} \leq \sqrt{x}$.
   (c) Etablir alors que : $\forall n \geq 2$, $f(\frac{1}{\ln(\sqrt{n})}) \leq n$.
   (d) En déduire un encadrement de u_n puis la valeur de la limite de u_n quand $n \to +\infty$.
   (e) En revenant à la définition de u_n, montrer que $nu_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

Exercice 6:

Faire l'exercice 17 Feuille 10