1 Intégration sur un segment (version 2)

1.1 Définition

1. **Primitive.** F est une primitive sur l'intervalle I d'une application f définie sur I si, et seulement si, F est dérivable sur I et vérifie $\underbrace{\forall x \in I, F'(x) = f(x)}_{F'=f}$
2. **Caractérisation des primitives.** Si F est une primitive de f sur un intervalle I, alors
$$G : I \to \mathbb{K} \text{ est une primitive de f sur } I \iff \exists c \in \mathbb{K} : \forall x \in I, G(x) = F(x) + c$$
3. **Primitives des fonctions continues.** Toute fonction continue f sur un intervalle I admet une primitive sur I.
4. **Intégrale des fonctions continues.** Si f est continue sur $[a,b]$, l'intégrale de f de a à b est le nombre
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a),$$
où F désigne n'importe quelle primitive F de f sur $[a,b]$.
5. **Théorème fondamental de l'analyse.** Si f est continue sur un intervalle I contenant a, alors l'unique primitive de f s'annulant en a est l'application F définie par
$$\begin{array}{rl} F : I & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t \end{array}$$
Par ailleurs, F est dérivable, de dérivée continue sur I (de classe $\mathcal{C}^1$)
6. **Subdivision.** Une subdivision de $[a,b]$ est une famille $(x_0, \ldots x_n)$ de nombres réels vérifiant $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$.
7. **Intégrale des fonctions continues par morceaux (P.M.).** Si $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ est une subdivision adaptée à la fonction continue par morceaux $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, alors l'intégrale de f de a à b est le nombre
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f_k(x)\mathrm{d}x,$$
Pour $k \in [\![1,n]\!]$, on rappelle que la restriction de f à l'intervalle $]x_{k-1},x_k[$ est prolongeable par continuité en une fonction continue $f_k : [x_{k-1},x_k] \to \mathbb{K}$
8. **Convention.** On pose $\int_a^a f = 0$ et $\int_b^a f := -\int_a^b f$ lorsque l'intégrale de droite est définie.

1.2 Propriétés

9. **Relation de Chasles.** Si f est continue (par morceaux) sur un segment S contenant a, b et c alors $\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$ (les trois intégrales sont définies)
10. **Linéarité.** Si f et g sont continues (p. m.) sur $[a,b]$ et si $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$, alors $\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g$
11. **Positivité.** Si f est continue (par morceaux) sur $[a,b]$, à valeurs positives ou nulles, alors $\int_a^b f \geqslant 0$
12. **Croissance.** Si f et g sont continues (p. m.) sur $[a,b]$ et si $\underbrace{\forall x \in [a,b], f(x) \leqslant g(x)}_{f \leqslant g}$, alors $\int_a^b f \leqslant \int_a^b g$.
13. **Cas des fonctions continues, positives, d'intégrale nulle.** Si f est continue sur $[a,b]$, à valeurs positives ou nulles, alors
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0 \iff \underbrace{\forall x \in [a,b], f(x) = 0}_{f=0}$$
14. **Valeur absolue.** Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue (par morceaux), alors $|f|$ l'est aussi et $\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f|$

1.3 Outils fondamentaux

15. **Intégration par partie.** Si f et g deux fonctions dérivables, de dérivées continues (de classe $\mathcal{C}^1$) sur $[a,b]$, alors
$$\int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x = \left[f(x)g(x)\right]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\mathrm{d}x.$$
16. **changement de variable (non bijectif).** Si f est continu sur un intervalle I et si $\varphi : [a,b] \to I$ est dérivable, de dérivée continue (de classe $\mathcal{C}^1$), alors
$$\int_a^b f\big(\varphi(u)\big)\varphi'(u)\mathrm{d}u = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\mathrm{d}x.$$
17. **Changement de variable.** Si f est continue (par morceaux) sur $[a,b]$ et si
    1. $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ est une bijection
    2. φ est dérivable et de dérivée continue (de classe $\mathcal{C}^1$) sur $[c,d]$
    3. φ^{-1} est dérivable, de dérivée continue (de classe $\mathcal{C}^1$) sur $[a,b]$

    alors
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f\big(\varphi(u)\big)\varphi'(u)\mathrm{d}u$$

1.4 Dérivées et primitives

18. Pour x dans un intervalle sur lequel les fonctions sont dérivables pour les dérivées (et continues pour les primitives),

$(x^\alpha)'$	$=$	$\alpha x^{\alpha-1} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$	*Monômes*	$\int x^\alpha \mathrm{d}x$	$=$	$\begin{cases} \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c & (\alpha \neq -1) \\ \ln|x| + c & (\alpha = -1) \end{cases}$
$\big(\ln|x|\big)'$	$=$	$\frac{1}{x} \quad (x \neq 0)$	*Logarithme*	$\int \frac{\mathrm{d}x}{x}$	$=$	$\ln|x| + c$
$(\mathrm{e}^x)'$	$=$	e^x	*Exponentielle*	$\int \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$	$=$	$\mathrm{e}^x + c$
$\cos'(x)$	$=$	$-\sin(x)$	*Cosinus*	$\int \sin(x)\mathrm{d}x$	$=$	$-\cos(x) + c$
$\sin'(x)$	$=$	$\cos(x)$	*Sinus*	$\int \cos(x)\mathrm{d}x$	$=$	$\sin(x) + c$
$\tan'(x)$	$=$	$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$	*Tangente*	$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2(x)}$	$=$	$\int \big(1 + \tan^2(x)\big)\mathrm{d}x = \tan(x) + c$
$\mathrm{Arctan}'(x)$	$=$	$\frac{1}{1+x^2}$	*Arctangente*	$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$	$=$	$\mathrm{Arctan}(x) + c$