1 Intégration sur un segment (version 3)

1.1 Définition

1. **Primitive.** F est une primitive sur l'intervalle I d'une application f définie sur I si, et seulement si, F est dérivable sur I et vérifie $\underbrace{\forall x \in I, F'(x) = f(x)}_{F'=f}$

2. **Caractérisation des primitives.** Si F est une primitive de f sur un intervalle I , alors

$$G : I \rightarrow \mathbb{K} \text{ est une primitive de } f \text{ sur } I \iff \exists c \in \mathbb{K} : \forall x \in I, G(x) = F(x) + c$$

3. **Primitives des fonctions continues.** Toute fonction continue f sur un intervalle I admet une primitive sur I .

4. **Intégrale des fonctions continues.** Si f est continue sur $[a, b]$, l'intégrale de f de a à b est le nombre

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a),$$

où F désigne n'importe quelle primitive F de f sur $[a, b]$.

5. **Théorème fondamental de l'analyse.** Si f est continue sur un intervalle I contenant a , alors l'unique primitive de f s'annulant en a est l'application F définie par

$$\begin{aligned} F : I &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int_a^x f(t)dt \end{aligned}$$

Par ailleurs, F est dérivable, de dérivée continue sur I (de classe $\mathcal{C}^1$)

6. **Subdivision.** Une subdivision de $[a, b]$ est une famille $(x_0, \dots, x_n)$ de nombres réels vérifiant $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$.

7. **Intégrale des fonctions continues par morceaux (P.M.).** Si $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ est une subdivision adaptée à la fonction continue par morceaux $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, alors l'intégrale de f de a à b est le nombre

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f_k(x)dx,$$

Pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on rappelle que la restriction de f à l'intervalle $]x_{k-1}, x_k[$ est prolongeable par continuité en une fonction continue $f_k : [x_{k-1}, x_k] \rightarrow \mathbb{R}$

8. **Convention.** On pose $\int_a^a f = 0$ et $\int_b^a f := -\int_a^b f$ lorsque l'intégrale de droite est définie.

1.2 Propriétés

9. **Relation de Chasles.** Si f est continue (par morceaux) sur un segment S contenant a , b et c alors $\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$ (les trois intégrales sont définies)

10. **Linéarité.** Si f et g sont continues (p. m.) sur $[a, b]$ et si $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors $\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g$

11. **Positivité.** Si f est continue (par morceaux) sur $[a, b]$, à valeurs positives ou nulles, alors $\int_a^b f \geq 0$
12. **Croissance.** Si f et g sont continues (p. m.) sur $[a, b]$ et si $\underbrace{\forall x \in [a, b], f(x) \leq g(x)}_{f \leq g}$, alors $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

13. **Cas des fonctions continues, positives, d'intégrale nulle.** Si f est continue sur $[a, b]$, à valeurs positives ou nulles, alors

$$\int_a^b f(x)dx = 0 \iff \underbrace{\forall x \in [a, b], f(x) = 0}_{f=0}$$

14. **Valeur absolue.** Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue (par morceaux), alors $|f|$ l'est aussi et $\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$

15. **Sommes de Riemann.** Si f est continue sur $[0, 1]$ alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)dx$.

1.3 Outils fondamentaux

16. **Intégration par partie.** Si f et g deux fonctions dérivables, de dérivées continues (de classe $\mathcal{C}^1$) sur $[a, b]$, alors

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

17. **changement de variable (non bijectif).** Si f est continu sur un intervalle I et si $\varphi : [a, b] \rightarrow I$ est dérivable, de dérivée continue (de classe $\mathcal{C}^1$), alors

$$\int_a^b f(\varphi(u))\varphi'(u)du = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx.$$

18. **Changement de variable.** Si f est continue (par morceaux) sur $[a, b]$ et si

1. $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ est une bijection
  2. φ est dérivable et de dérivée continue (de classe $\mathcal{C}^1$) sur $[c, d]$
  3. φ^{-1} est dérivable, de dérivée continue (de classe $\mathcal{C}^1$) sur $[a, b]$
- alors

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(u))\varphi'(u)du$$

1.4 Dérivées et primitives

19. Pour x dans un intervalle sur lequel les fonctions sont dérivables pour les dérivées (et continues pour les primitives),

$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$	<i>Monômes</i>	$\int x^\alpha dx = \begin{cases} \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c & (\alpha \neq -1) \\ \ln x + c & (\alpha = -1) \end{cases}$
$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0)$	<i>Logarithme</i>	$\int \frac{dx}{x} = \ln x + c$
$(e^x)' = e^x$	<i>Exponentielle</i>	$\int e^x dx = e^x + c$
$\cos'(x) = -\sin(x)$	<i>Cosinus</i>	$\int \sin(x) dx = -\cos(x) + c$
$\sin'(x) = \cos(x)$	<i>Sinus</i>	$\int \cos(x) dx = \sin(x) + c$
$\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$	<i>Tangente</i>	$\int \frac{dx}{\cos^2(x)} = \int (1 + \tan^2(x)) dx = \tan(x) + c$
$\text{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}$	<i>Arctangente</i>	$\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{Arctan}(x) + c$

2 Variables aléatoires réelles (discrètes, sur un univers fini)

Dans tout ce chapitre, $(\Omega, P(\Omega), P)$ désigne un espace probabilisé fini ($\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$).
Lorsque $p \in [0,1]$, on pose $q = 1 - p$.

2.1 Variable aléatoire réelle

1. **VAR.** Une variable aléatoire réelle est une application $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.
2. **VAR certaine.** X est une VAR certaine ssi il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\forall \omega \in \Omega, X(\omega) = c$.
3. **VAR quasi-certaine.** X est une VAR quasi-certaine ssi il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $P(X = c) = 1$.
4. **Univers image.** L'univers image d'une VAR X est $X(\Omega) = \{X(\omega) : \omega \in \Omega\}$.
5. **Système complet.** Le système complet associé à une VAR X est $\{(X = x)\}_{x \in X(\Omega)}$.
6. **loi d'une VAR.** La loi d'une VAR X est la probabilité P_X définie sur $X(\Omega)$ par

$$P_X(A) = P(X \in A) \quad (A \text{ événement de } X(\Omega))$$

Remarque : elle est complètement déterminée par la donnée de $P(X = x)$ pour $x \in X(\Omega)$

7. **fonction de répartition d'une VAR.** La fonction de répartition d'une VAR X est l'application $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$ définie par

$$F_X(x) = P(X \leq x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

8. **Propriétés de F_X .** La fonction de répartition F_X d'une var X est croissante sur $\mathbb{R}$, continue à droite et vérifie

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = 1$$

Pour une VAR discrète sur un ensemble fini, elle est aussi en escalier (constante par morceaux)

2.2 Espérance

9. **Espérance.** L'espérance d'une VAR discrète finie X est le nombre réel

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x)$$

10. **VAR centrée.** Une VAR X est centrée ssi son espérance est nulle
11. **Théorème de transfert.** Pour une VAR X et pour $g : X(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, on a

$$E(g(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} g(x)P(X = x)$$

12. **Transformation affine.** Pour une VAR X , on a

$$E(aX + b) = aE(X) + b \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

13. **Positivité.** Si X est une VAR vérifiant $\underbrace{\forall \omega \in \Omega, X(\omega) \geq 0}_{X \geq 0}$ (p.s.), alors $E(X) \geq 0$.

14. **Croissance.** Si X et Y vérifient $\underbrace{\forall \omega \in \Omega, X(\omega) \leq Y(\omega)}_{X \leq Y}$ (p.s.), alors $E(X) \leq E(Y)$.

15. **Cas des VAR positives, d'espérance nulle.** Si X vérifie $\underbrace{\forall \omega \in \Omega, X(\omega) \geq 0}_{X \geq 0}$ (p.s.), alors

$$E(X) = 0 \iff P(X = 0) = 1 \iff \underbrace{X = 0}_{X \geq 0} \text{ p.s.}$$

2.3 Variance et écart type

16. **Variance.** La variance d'une VAR X est le nombre réel positif ou nul

$$V(X) = E\left((X - E(X))^2\right)$$

17. **Formule de Koenig-Huygens.** Pour une VAR X , on a $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

18. **Variance nulle.** Pour une VAR X , on a

$$V(X) = 0 \iff X = E(X) \text{ p.s.}$$

19. **Transformation affine.** Pour une VAR X , on a

$$V(aX + b) = a^2V(X) \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

20. **Ecart type.** L'écart type d'une VAR X est le nombre réel positif ou nul $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

21. **VAR centrée réduite.** Une VAR X est centrée et réduite ssi son espérance est nulle et sa variance vaut 1 (son écart type vaut 1)

2.4 Lois usuelles

22. **loi certaine.** X suit la loi certaine ssi $X = c$ p.s. Dans ce cas, on a $E(X) = c$ et $V(X) = 0$.

23. **loi de Bernouilli de paramètre $p \in [0,1]$.**

$$X \hookrightarrow B(p) \iff P(X = 1) = p \text{ et } P(X = 0) = q$$

Dans ce cas, on a $E(X) = p$ et $V(X) = pq$.

24. **loi binomiale de paramètre $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$.**

$$X \hookrightarrow B(n, p) \iff P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad (0 \leq k \leq n)$$

Dans ce cas, on a $E(X) = np$ et $V(X) = npq$.

25. **loi uniforme.** X suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$ ssi $X \hookrightarrow U(\llbracket 1, n \rrbracket)$ ssi

$$P(X = k) = \frac{1}{n} \quad (1 \leq k \leq n)$$

Dans ce cas, on a $E(X) = \frac{n+1}{2}$ et $V(X) = \frac{n^2-1}{12}$.