1 Intégration sur un segment (version 5)

1.1 Définition

1. **Primitive.** F est une primitive sur l'intervalle I d'une application f définie sur I si, et seulement si, F est dérivable sur I et vérifie $\underbrace{\forall x \in I, F'(x) = f(x)}_{F'=f}$
2. **Caractérisation des primitives.** Si F est une primitive de f sur un intervalle I, alors

$$G : I \to \mathbb{K} \text{ est une primitive de f sur } I \iff \exists c \in \mathbb{K} : \forall x \in I, G(x) = F(x) + c$$

3. **Primitives des fonctions continues.** Toute fonction continue f sur un intervalle I admet une primitive sur I.
4. **Intégrale des fonctions continues.** Si f est continue sur $[a,b]$, l'intégrale de f de a à b est le nombre
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a),$$
où F désigne n'importe quelle primitive F de f sur $[a,b]$.
5. **Théorème fondamental de l'analyse.** Si f est continue sur un intervalle I contenant a, alors l'unique primitive de f s'annulant en a est l'application F définie par
$$\begin{aligned} F : I &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t \end{aligned}$$
Par ailleurs, F est dérivable, de dérivée continue sur I (de classe $\mathcal{C}^1$)
6. **Subdivision.** Une subdivision de $[a,b]$ est une famille $(x_0, \ldots x_n)$ de nombres réels vérifiant $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$.
7. **Intégrale des fonctions continues par morceaux (P.M.).** Si $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ est une subdivision adaptée à la fonction continue par morceaux $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, alors l'intégrale de f de a à b est le nombre
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f_k(x)\mathrm{d}x,$$
Pour $k \in [\![1,n]\!]$, on rappelle que la restriction de f à l'intervalle $]x_{k-1},x_k[$ est prolongeable par continuité en une fonction continue $f_k : [x_{k-1},x_k] \to \mathbb{K}$
8. **Convention.** On pose $\int_a^a f = 0$ et $\int_b^a f := -\int_a^b f$ lorsque l'intégrale de droite est définie.

1.2 Propriétés

9. **Relation de Chasles.** Si f est continue (par morceaux) sur un segment S contenant a, b et c alors $\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$ (les trois intégrales sont définies)
10. **Linéarité.** Si f et g sont continues (p. m.) sur $[a,b]$ et si $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$, alors $\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g$
11. **Positivité.** Si f est continue (par morceaux) sur $[a,b]$, à valeurs positives ou nulles, alors $\int_a^b f \geqslant 0$
12. **Croissance.** Si f et g sont continues (p. m.) sur $[a,b]$ et si $\underbrace{\forall x \in [a,b], f(x) \leqslant g(x)}_{f \leqslant g}$, alors $\int_a^b f \leqslant \int_a^b g$.
13. **Cas des fonctions continues, positives, d'intégrale nulle.** Si f est continue sur $[a,b]$, à valeurs positives ou nulles, alors
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0 \iff \underbrace{\forall x \in [a,b], f(x) = 0}_{f=0}$$
14. **Valeur absolue.** Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue (par morceaux), alors $|f|$ l'est aussi et $\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f|$
15. **Sommes de Riemann.** Si f est continue sur $[0,1]$ alors $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^n f\left(\dfrac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

1.3 Outils fondamentaux

16. **Intégration par partie.** Si f et g deux fonctions dérivables, de dérivées continues (de classe $\mathcal{C}^1$) sur $[a,b]$, alors
$$\int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x = \big[f(x)g(x)\big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\mathrm{d}x.$$
17. **changement de variable (non bijectif).** Si f est continu sur un intervalle I et si $\varphi : [a,b] \to I$ est dérivable, de dérivée continue (de classe $\mathcal{C}^1$), alors
$$\int_a^b f\big(\varphi(u)\big)\varphi'(u)\mathrm{d}u = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\mathrm{d}x.$$
18. **Changement de variable.** Si f est continue (par morceaux) sur $[a,b]$ et si
    1. $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ est une bijection
    2. φ est dérivable et de dérivée continue (de classe $\mathcal{C}^1$) sur $[c,d]$
    3. φ^{-1} est dérivable, de dérivée continue (de classe $\mathcal{C}^1$) sur $[a,b]$

    alors
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f\big(\varphi(u)\big)\varphi'(u)\mathrm{d}u$$

1.4 Dérivées et primitives

19. Pour x dans un intervalle sur lequel les fonctions sont dérivables pour les dérivées (et continues pour les primitives),

$$
\begin{array}{rcll|lrcl}
(x^\alpha)' & = & \alpha x^{\alpha-1} \qquad (\alpha \in \mathbb{R}) & & \textit{Monômes} & \int x^\alpha \mathrm{d}x & = & \begin{cases} \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c & (\alpha \neq -1) \\ \ln|x| + c & (\alpha = -1) \end{cases} \\
\big(\ln|x|\big)' & = & \frac{1}{x} \qquad (x \neq 0) & & \textit{Logarithme} & \int \frac{\mathrm{d}x}{x} & = & \ln|x] + c \\
(\mathrm{e}^x)' & = & \mathrm{e}^x & & \textit{Exponentielle} & \int \mathrm{e}^x \mathrm{d}x & = & \mathrm{e}^x + c \\
\cos'(x) & = & -\sin(x) & & \textit{Cosinus} & \int \sin(x)\mathrm{d}x & = & -\cos(x) + c \\
\sin'(x) & = & \cos(x) & & \textit{Sinus} & \int \cos(x)\mathrm{d}x & = & \sin(x) + c \\
\tan'(x) & = & \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x) & & \textit{Tangente} & \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2(x)} & = & \int \big(1 + \tan^2(x)\big)\mathrm{d}x = \tan(x) + c \\
\mathrm{Arctan}'(x) & = & \frac{1}{1+x^2} & & \textit{Arctangente} & \int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} & = & \mathrm{Arctan}(x) + c
\end{array}
$$

2 Variables aléatoires réelles (discrètes, sur un univers fini)

Dans tout ce chapitre, $(\Omega,P(\Omega),P)$ désigne un espace probabilisé fini ($\Omega = \{\omega_1,\ldots,\omega_n\}$).
Lorsque $p \in [0,1]$, on pose $q = 1 - p$.

2.1 Variable aléatoire réelle

1. **VAR.** Une variable aléatoire réelle est une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$.
2. **VAR certaine.** X est une VAR certaine ssi il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\forall \omega \in \Omega, X(\omega) = c$.
3. **VAR quasi-certaine.** X est une VAR quasi-certaine ssi il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $P(X = c) = 1$.
4. **Univers image.** L'univers image d'une VAR X est $X(\Omega) = \{X(\omega) : \omega \in \Omega\}$.
5. **Système complet.** Le système complet associé à une VAR X est $\{(X = x)\}_{x\in X(\Omega)}$.
6. **loi d'une VAR.** La loi d'une VAR X est la probabilité P_X définie sur $X(\Omega)$ par
$$P_X(A) = P(X \in A) \qquad (A \text{ événement de } X(\Omega))$$
Remarque : elle est complètement déterminée par la donnée de $P(X = x)$ pour $x \in X(\Omega)$
7. **fonction de répartition d'une VAR.** La fonction de répartition d'une VAR X est l'application $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ définie par
$$F_X(x) = P(X \leqslant x) \qquad (x \in \mathbb{R})$$
8. **Propriétés de F_X.** La fonction de répartition F_X d'une var X est croissante sur $\mathbb{R}$, continue à droite et vérifie
$$\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1$$
Pour une VAR discrète sur un ensemble fini, elle est aussi en escalier (constante par morceaux)

2.2 Espérance

9. **Espérance.** L'espérance d'une VAR discrète finie X est le nombre réel
$$E(X) = \sum_{x\in X(\Omega)} xP(X = x)$$
10. **VAR centrée.** Une VAR X est centrée ssi son espérance est nulle
11. **Théorème de transfert.** Pour une VAR X et pour $g : X(\Omega) \to \mathbb{R}$, on a
$$E(g(X)) = \sum_{x\in X(\Omega)} g(x)P(X = x)$$
12. **Transformation affine.** Pour une VAR X, on a
$$E(aX + b) = aE(X) + b \qquad (a,b \in \mathbb{R})$$
13. **Positivité.** Si X est une VAR vérifiant $\underbrace{\forall \omega \in \Omega, X(\omega) \geqslant 0}_{X\geqslant 0}$ (p.s.), alors $E(X) \geqslant 0$.
14. **Croissance.** Si X et Y vérifient $\underbrace{\forall \omega \in \Omega, X(\omega) \leqslant Y(\omega)}_{X\leqslant Y}$ (p.s.), alors $E(X) \leqslant E(Y)$.
15. **Cas des VAR positives, d'espérance nulle.** Si X vérifie $\underbrace{\forall \omega \in \Omega, X(\omega) \geqslant 0}_{X\geqslant 0}$ (p.s.), alors
$$E(X) = 0 \iff P(X = 0) = 1 \iff X = 0 \text{ p.s.}$$

2.3 Variance et écart type

16. **Variance.** La variance d'une VAR X est le nombre réel positif ou nul
$$V(X) = E\Big(\big(X - E(X)\big)^2\Big)$$
17. **Formule de Koenig-Huygens.** Pour une VAR X, on a $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$
18. **Variance nulle.** Pour une VAR X, on a
$$V(X) = 0 \iff X = E(X) \text{ p.s.}$$
19. **Transformation affine.** Pour une VAR X, on a
$$V(aX + b) = a^2V(X) \qquad (a,b \in \mathbb{R})$$
20. **Ecart type.** L'ecart type d'une VAR X est le nombre réel positif ou nul $\sigma_(X) = \sqrt{V(X)}$
21. **VAR centrée réduite.** Une VAR X est centrée et réduite ssi son espérance est nulle et sa variance vaut 1 (son écart type vaut 1)

2.4 Lois usuelles

22. **loi certaine.** X suit la loi certaine ssi $X = c$ p.s. Dans ce cas, on a $E(X) = c$ et $V(X) = 0$.
23. **loi de Bernouilli de paramètre $p \in [0,1]$.**
$$X \hookrightarrow B(p) \iff P(X = 1) = p \text{ et } P(X = 0) = q$$
Dans ce cas, on a $E(X) = p$ et $V(X) = pq$.
24. **loi binomiale de paramètre $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$.**
$$X \hookrightarrow B(n,p) \iff P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \qquad (0 \leqslant k \leqslant n)$$
Dans ce cas, on a $E(X) = np$ et $V(X) = npq$.
25. **loi uniforme.** X suit la loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$ ssi $X \hookrightarrow U([\![1,n]\!])$ ssi
$$P(X = k) = \frac{1}{n} \qquad (1 \leqslant k \leqslant n)$$
Dans ce cas, on a $E(X) = \frac{n+1}{2}$ et $V(X) = \frac{n^2-1}{12}$.

3 Polynômes

3.1 Forme additive

1. **Polynôme.** Un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ est une expression symbolique du type

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \qquad (n \geqslant 0 \text{ et } (a_0, \cdots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1})$$

L'ensemble de tous les polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathbb{K}[X]$.

2. **Opérations algébriques.** La somme, les multiples (plus généralement les combinaisons linéaires), les produits, les dérivées, les primitives et les composées (obtenus par substitution) de polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ sont des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.
Pour $n \geqslant 0$, $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$, on a
   1. (somme) $P + Q = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) X^k$
   2. (multiplication par un scalaire) $\lambda P = \sum_{k=0}^{n} \lambda a_k X^k$ pour $\lambda \in \mathbb{K}$
   3. (produit) $P \times Q = \sum_{k=0}^{2n} c_k X^k$ avec $c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} \qquad (0 \leqslant k \leqslant 2n)$
   4. (dérivation) $P' = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} X^k$
   5. (primitives) Les primitives de P sont les polynomes

$$c + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} X^{k+1} = c + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{a_{k-1}}{k} X^k \qquad (c \in \mathbb{K})$$

   6. (substitution) le polynome $P(Q) = \sum_{k=0}^{n} a_k Q^k$ est obtenu en substituant Q à l'indeterminée X.

En particulier $P = P(X)$.

3. **degré.** Le degré d'un polynôme non nul $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ est le nombre entier naturel

$$\deg(P) = \max\{k \geqslant 0 : a_k \neq 0\}.$$

Par convention $\deg(0) = -\infty$.

4. L'ensemble de tous les polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$, de degré au plus n, est noté $\mathbb{K}_n[X]$.

$$\mathbb{K}_n[X] = \{P \in \mathbb{K}[X] : \deg(P) \leqslant n\}$$

5. **Opérations.**
   1. (multiplication par un scalaire) $\deg(\lambda P) = \deg(P)$ pour $\lambda \in \mathbb{K}^*$.
   2. (produit) $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$ pour P et Q polynômes non nuls.
   3. (somme) $\deg(PQ) \leqslant \max(\deg(P), \deg(Q))$ avec égalité si $\deg(P) \neq \deg(Q)$.
   4. (dérivée) $\deg(P') = \begin{cases} \deg(P) - 1 & \text{si } \deg(P) \geqslant 1 \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}$

3.2 Forme multiplicative

6. **Division euclidienne.** Pour $P \in \mathbb{K}[X]$ et $D \in \mathbb{K}[X]^*$, il existe un unique $(Q,R) \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$$P = QD + R \text{ et } \deg(R) < \deg(D)$$

7. **Diviseur et multiple.** Soient P et Q dans $\mathbb{K}[X]$.

$$\left.\begin{array}{r} D \text{ est un diviseur de } P \\ P \text{ est un multiple de } D \end{array}\right\} \iff D|P \iff \exists Q \in \mathbb{K}[X] \text{ tel que } P = QD$$

8. **Racine.** $a \in \mathbb{K}$ est une racine de $P \in \mathbb{K}[X] \iff P(a) = 0 \iff (X - a)|P$
9. **Multiplicité.** Soit $a \in \mathbb{K}$ et $P \in \mathbb{K}[K]$.

$$a \text{ est racine de } P \text{ de multiplicité } m \iff \begin{cases} P(a) = 0 \\ \vdots \\ P^{(m-1)}(a) = 0 \\ P^{(m)}(a) \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (X-a)^m | P \\ (X-a)^{m+1} \not| P \end{cases}$$

10. **Théorème de D'Alembert-Gauss.** Tout polynôme non constant $P \in \mathbb{C}[X]$ admet une racine dans $\mathbb{C}$.
11. **Décomposition sur $\mathbb{C}$.** Pour chaque polynôme non constant $P \in \mathbb{C}[X]$, il existe une constante $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et des nombres complexes $(z_1, \cdots, z_n)$ uniques à permutation près tels que

$$P = \alpha \prod_{k=1}^{\deg(P)} (X - z_k)$$

12. **Décomposition sur $\mathbb{C}$ avec multiplicité.** Pour chaque polynôme non constant $P \in \mathbb{C}[X]$, il existe un entier $K \geqslant 1$, une constante $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et des nombres complexes $(z_1, \cdots, z_K)$ associés à des multiplicités $(n_1, \cdots, n_K)$ uniques à permutation près tels que

$$P = \alpha \prod_{k=1}^{K} (X - z_k)^{n_k}$$

De plus, on a $\deg(P) = n_1 + \cdots + n_K$

13. **Décomposition sur $\mathbb{R}$ avec multiplicité.** Pour chaque polynôme non constant $P \in \mathbb{R}[X]$, il existe deux entiers $K \geqslant 0$ et $L \geqslant 0$, une constante $\alpha \in \mathbb{C}^*$, des nombres réels $(r_1, \cdots, r_K)$ et des trinômes du second degré sans racines réelles $(Q_1, \cdots, Q_L)$ (de discriminant strictement négatif) associés à des multiplicités $(n_1, \cdots, n_K)$ et $(m_1, \cdots, m_L)$ uniques à permutation près tels que
$$P = \alpha \prod_{k=1}^{K} (X - r_k)^{n_k} \prod_{\ell=1}^{L} Q_\ell^{m_\ell}$$
De plus, on a $\deg(P) = n_1 + \cdots + n_K + 2m_1 + \cdots + 2m_L$

4 Espaces vectoriels

1. **Espace vectoriel.**

$$(E,+,\cdot)\ \mathbb{K}\text{- espace vectoriel} \iff \left\{\begin{array}{c} +\ \text{loi interne, associative, commutative,} \\ \text{admettant un élément neutre } 0\in E, \\ \text{tous les } x\in E \text{ sont inversibles pour } + \\ \cdot\ \text{loi externe, associative, distributive sur } + \\ \forall x\in E, 1\cdot x = x \end{array}\right.$$

2. **Combinaisons linéaires.** Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$

$$\begin{array}{r} x \text{ combi. linéaire de } x_1,\cdots,x_n\in E \\ \text{pour les coeffs } \lambda_1,\cdots,\lambda_n\in\mathbb{K} \end{array} \iff x=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k.x_k$$

3. **Produit nul.** Dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $(E,+,\cdot)$, on a

$$\lambda.x=0 \iff \lambda=0 \text{ ou } x=0$$

4. **sous-espace vectoriel.** F est un $\mathbb{K}$-sous-espace vectoriel de E si, et seulement si,
   1. F est un ensemble non vide *(en général, on montre que $0_E\in F$).*
   2. F est inclus dans E, qui est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
   3. F est stable par combinaison linéaire, c'est-à-dire

$$\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2,\qquad \forall(x,y)\in F^2,\qquad \lambda.x+\mu.y\in F,$$

5. **intersection.** Une intersection de sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E
6. **Espace vectoriel engendré.** L'espace vectoriel engendré par une partie A d'un espace vectoriel E est le plus petit sous-espace vectoriel de E (pour l'inclusion) contenant A.

$$\mathrm{Vect}(A)=\bigcap_{A\subset F \text{ sev de } E} F$$

7. **caractérisation.** L'espace vectoriel engendré par une partie A d'un espace vectoriel E est l'ensemble des combinaisons linéaires qu'il est possible de former avec les éléments de A

$$\mathrm{Vect}(A)=\left\{\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k : n\geqslant 1, (x_1,\cdots,x_n)\in A^n, (\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n\right\}.$$

Lorsque $A=\{x1,\cdots,x_n\}$, on a plus simplement

$$\mathrm{Vect}(A)=\left\{\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k : (\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n\right\}.$$

8. **Famille génératrice.** Soit $\mathcal{F}=(e_1,\cdots,e_n)$ une famille finie de vecteurs de E. alors

$$\mathcal{F} \text{ engendre } E \iff E=\mathrm{Vect}(\mathcal{F}) \iff \forall x\in E, \exists(\lambda 1,\cdots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n : x=\lambda_1 e_1+\cdots+\lambda_n e_n.$$

9. **Famille libre.** Soit $\mathcal{F}=(e_1,\cdots,e_n)$ une famille finie de vecteurs de E. alors

$$\mathcal{F} \text{ est libre si, et seulement si, } \sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k=0 \iff \lambda_1=\cdots=\lambda_n=0$$

Une famille est libre *ssi* il existe une seule combinaison linéaire nulle de ses vecteurs (celle dont tous les coefficients sont nuls).

10. **Famille liée.** Une famille finie $\mathcal{F}=(e_1,\cdots,e_n)$ est liée si, et seulement si, elle n'est pas libre

$$\mathcal{F} \text{ est liée si, et seulement si, } \exists(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\neq(0,\cdots,0) : \sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k=0$$

Une telle relation est appelée une relation de dépendance linéaire.

11. **Base.** Une base d'un espace vectoriel E est une famille finie de vecteurs de E qui est libre et génératrice.
12. **Coordonnées.** Si $\mathcal{B}=(e_1,\cdots,e_n)$ est une base d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, alors chaque vecteur x de E se décompose de manière unique sur $\mathcal{B}$

$$(e_1,\cdots,e_n) \text{ base de } E \iff \forall x\in E, \exists!(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{K}^n : x=\sum_{k=1}^{n}x_k e_k$$

Les nombres $(x_1,\cdots,x_n)$ sont appelés coordonnées (ou composantes) du vecteur x dans la base $(e_1,\cdots,e_n)$. La matrice des coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice colonne

$$\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(x)=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

13. **Espaces vectoriels de référence.**
    1. $\mathbb{K}^n$ est un espace vectoriel, de base canonique $\Big((0,\cdots,0,\underset{k}{1},0,\cdots,0)\Big)_{1\leqslant k\leqslant n}$
    2. $\mathbb{K}_n[X]$ est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel, de base canonique $\left(X^k\right)_{0\leqslant k\leqslant n}$
    3. $\{0\}$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}^N$, $\mathcal{F}(\mathbb{K},\mathbb{K})$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels
    4. $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de base canonique $(1,i)$