1 Intégration sur un segment (version 6)

1.1 Définition

1. **Primitive.** F est une primitive sur l'intervalle I d'une application f définie sur I si, et seulement si, F est dérivable sur I et vérifie $\underbrace{\forall x \in I, F'(x) = f(x)}_{F'=f}$
2. **Caractérisation des primitives.** Si F est une primitive de f sur un intervalle I, alors

$$G : I \to \mathbb{K} \text{ est une primitive de f sur } I \iff \exists c \in \mathbb{K} : \forall x \in I, G(x) = F(x) + c$$

3. **Primitives des fonctions continues.** Toute fonction continue f sur un intervalle I admet une primitive sur I.
4. **Intégrale des fonctions continues.** Si f est continue sur $[a,b]$, l'intégrale de f de a à b est le nombre
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a),$$
où F désigne n'importe quelle primitive F de f sur $[a,b]$.
5. **Théorème fondamental de l'analyse.** Si f est continue sur un intervalle I contenant a, alors l'unique primitive de f s'annulant en a est l'application F définie par
$$\begin{aligned} F : I &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t \end{aligned}$$
Par ailleurs, F est dérivable, de dérivée continue sur I (de classe $\mathcal{C}^1$)
6. **Subdivision.** Une subdivision de $[a,b]$ est une famille $(x_0, \ldots x_n)$ de nombres réels vérifiant $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$.
7. **Intégrale des fonctions continues par morceaux (P.M.).** Si $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ est une subdivision adaptée à la fonction continue par morceaux $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, alors l'intégrale de f de a à b est le nombre
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f_k(x)\mathrm{d}x,$$
Pour $k \in [\![1,n]\!]$, on rappelle que la restriction de f à l'intervalle $]x_{k-1},x_k[$ est prolongeable par continuité en une fonction continue $f_k : [x_{k-1},x_k] \to \mathbb{K}$
8. **Convention.** On pose $\int_a^a f = 0$ et $\int_b^a f := -\int_a^b f$ lorsque l'intégrale de droite est définie.

1.2 Propriétés

9. **Relation de Chasles.** Si f est continue (par morceaux) sur un segment S contenant a, b et c alors $\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$ (les trois intégrales sont définies)
10. **Linéarité.** Si f et g sont continues (p. m.) sur $[a,b]$ et si $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$, alors $\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g$
11. **Positivité.** Si f est continue (par morceaux) sur $[a,b]$, à valeurs positives ou nulles, alors $\int_a^b f \geqslant 0$
12. **Croissance.** Si f et g sont continues (p. m.) sur $[a,b]$ et si $\underbrace{\forall x \in [a,b], f(x) \leqslant g(x)}_{f \leqslant g}$, alors $\int_a^b f \leqslant \int_a^b g$.
13. **Cas des fonctions continues, positives, d'intégrale nulle.** Si f est continue sur $[a,b]$, à valeurs positives ou nulles, alors
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0 \iff \underbrace{\forall x \in [a,b], f(x) = 0}_{f=0}$$
14. **Valeur absolue.** Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue (par morceaux), alors $|f|$ l'est aussi et $\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f|$
15. **Sommes de Riemann.** Si f est continue sur $[0,1]$ alors $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^n f\left(\dfrac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

1.3 Outils fondamentaux

16. **Intégration par partie.** Si f et g deux fonctions dérivables, de dérivées continues (de classe $\mathcal{C}^1$) sur $[a,b]$, alors
$$\int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x = \big[f(x)g(x)\big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\mathrm{d}x.$$
17. **changement de variable (non bijectif).** Si f est continu sur un intervalle I et si $\varphi : [a,b] \to I$ est dérivable, de dérivée continue (de classe $\mathcal{C}^1$), alors
$$\int_a^b f\big(\varphi(u)\big)\varphi'(u)\mathrm{d}u = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\mathrm{d}x.$$
18. **Changement de variable.** Si f est continue (par morceaux) sur $[a,b]$ et si
    1. $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ est une bijection
    2. φ est dérivable et de dérivée continue (de classe $\mathcal{C}^1$) sur $[c,d]$
    3. φ^{-1} est dérivable, de dérivée continue (de classe $\mathcal{C}^1$) sur $[a,b]$

    alors
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f\big(\varphi(u)\big)\varphi'(u)\mathrm{d}u$$

1.4 Dérivées et primitives

19. Pour x dans un intervalle sur lequel les fonctions sont dérivables pour les dérivées (et continues pour les primitives),

$$\begin{array}{rcllrcl}
(x^\alpha)' & = & \alpha x^{\alpha-1} \qquad (\alpha\in\mathbb{R}) & \textit{Monômes} & \int x^\alpha \mathrm{d}x & = & \begin{cases} \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c & (\alpha\neq -1)\\ \ln|x|+c & (\alpha=-1)\end{cases}\\
\big(\ln|x|\big)' & = & \frac{1}{x} \qquad (x\neq 0) & \textit{Logarithme} & \int \frac{\mathrm{d}x}{x} & = & \ln|x|+c\\
(\mathrm{e}^x)' & = & \mathrm{e}^x & \textit{Exponentielle} & \int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x & = & \mathrm{e}^x+c\\
\cos'(x) & = & -\sin(x) & \textit{Cosinus} & \int \sin(x)\mathrm{d}x & = & -\cos(x)+c\\
\sin'(x) & = & \cos(x) & \textit{Sinus} & \int \cos(x)\mathrm{d}x & = & \sin(x)+c\\
\tan'(x) & = & \frac{1}{\cos^2(x)}=1+\tan^2(x) & \textit{Tangente} & \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2(x)} & = & \int\big(1+\tan^2(x)\big)\mathrm{d}x=\tan(x)+c\\
\mathrm{Arctan}'(x) & = & \frac{1}{1+x^2} & \textit{Arctangente} & \int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} & = & \mathrm{Arctan}(x)+c
\end{array}$$

2 Variables aléatoires réelles (discrètes, sur un univers fini)

Dans tout ce chapitre, $(\Omega,P(\Omega),P)$ désigne un espace probabilisé fini ($\Omega=\{\omega_1,\dots,\omega_n\}$).
Lorsque $p\in[0,1]$, on pose $q=1-p$.

2.1 Variable aléatoire réelle

1. **VAR.** Une variable aléatoire réelle est une application $X:\Omega\to\mathbb{R}$.
2. **VAR certaine.** X est une VAR certaine ssi il existe $c\in\mathbb{R}$ tel que $\forall\omega\in\Omega, X(\omega)=c$.
3. **VAR quasi-certaine.** X est une VAR quasi-certaine ssi il existe $c\in\mathbb{R}$ tel que $P(X=c)=1$.
4. **Univers image.** L'univers image d'une VAR X est $X(\Omega)=\{X(\omega):\omega\in\Omega\}$.
5. **Système complet.** Le système complet associé à une VAR X est $\{(X=x)\}_{x\in X(\Omega)}$.
6. **loi d'une VAR.** La loi d'une VAR X est la probabilité P_X définie sur $X(\Omega)$ par
$$P_X(A)=P(X\in A)\qquad (A \text{ événement de } X(\Omega))$$
Remarque : elle est complètement déterminée par la donnée de $P(X=x)$ pour $x\in X(\Omega)$
7. **fonction de répartition d'une VAR.** La fonction de répartition d'une VAR X est l'application $F_X:\mathbb{R}\to[0,1]$ définie par
$$F_X(x)=P(X\leqslant x)\qquad (x\in\mathbb{R})$$
8. **Propriétés de F_X.** La fonction de répartition F_X d'une var X est croissante sur $\mathbb{R}$, continue à droite et vérifie
$$\lim_{x\to-\infty}F_X(x)=0 \quad\text{et}\quad \lim_{x\to\infty}F_X(x)=1$$
Pour une VAR discrète sur un ensemble fini, elle est aussi en escalier (constante par morceaux)

2.2 Espérance

9. **Espérance.** L'espérance d'une VAR discrète finie X est le nombre réel
$$E(X)=\sum_{x\in X(\Omega)}xP(X=x)$$
10. **VAR centrée.** Une VAR X est centrée ssi son espérance est nulle
11. **Théorème de transfert.** Pour une VAR X et pour $g:X(\Omega)\to\mathbb{R}$, on a
$$E(g(X))=\sum_{x\in X(\Omega)}g(x)P(X=x)$$
12. **Transformation affine.** Pour une VAR X, on a
$$E(aX+b)=aE(X)+b\qquad (a,b\in\mathbb{R})$$
13. **Positivité.** Si X est une VAR vérifiant $\underbrace{\forall\omega\in\Omega, X(\omega)\geqslant 0}_{X\geqslant 0}$ (p.s.), alors $E(X)\geqslant 0$.
14. **Croissance.** Si X et Y vérifient $\underbrace{\forall\omega\in\Omega, X(\omega)\leqslant Y(\omega)}_{X\leqslant Y}$ (p.s.), alors $E(X)\leqslant E(Y)$.
15. **Cas des VAR positives, d'espérance nulle.** Si X vérifie $\underbrace{\forall\omega\in\Omega, X(\omega)\geqslant 0}_{X\geqslant 0}$ (p.s.), alors
$$E(X)=0 \iff P(X=0)=1 \iff X=0 \text{ p.s.}$$

2.3 Variance et écart type

16. **Variance.** La variance d'une VAR X est le nombre réel positif ou nul
$$V(X)=E\Big(\big(X-E(X)\big)^2\Big)$$
17. **Formule de Koenig-Huygens.** Pour une VAR X, on a $V(X)=E(X^2)-E(X)^2$
18. **Variance nulle.** Pour une VAR X, on a
$$V(X)=0\iff X=E(X)\text{ p.s.}$$
19. **Transformation affine.** Pour une VAR X, on a
$$V(aX+b)=a^2V(X)\qquad (a,b\in\mathbb{R})$$
20. **Ecart type.** L'ecart type d'une VAR X est le nombre réel positif ou nul $\sigma_(X)=\sqrt{V(X)}$
21. **VAR centrée réduite.** Une VAR X est centrée et réduite ssi son espérance est nulle et sa variance vaut 1 (son écart type vaut 1)

2.4 Lois usuelles

22. **loi certaine.** X suit la loi certaine ssi $X=c$ p.s. Dans ce cas, on a $E(X)=c$ et $V(X)=0$.
23. **loi de Bernouilli de paramètre $p\in[0,1]$.**
$$X\hookrightarrow B(p)\iff P(X=1)=p \text{ et } P(X=0)=q$$
Dans ce cas, on a $E(X)=p$ et $V(X)=pq$.
24. **loi binomiale de paramètre $n\in\mathbb{N}^*$ et $p\in[0,1]$.**
$$X\hookrightarrow B(n,p)\iff P(X=k)=\binom{n}{k}p^kq^{n-k}\qquad (0\leqslant k\leqslant n)$$
Dans ce cas, on a $E(X)=np$ et $V(X)=npq$.
25. **loi uniforme.** X suit la loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$ ssi $X\hookrightarrow U([\![1,n]\!])$ ssi
$$P(X=k)=\frac{1}{n}\qquad (1\leqslant k\leqslant n)$$
Dans ce cas, on a $E(X)=\frac{n+1}{2}$ et $V(X)=\frac{n^2-1}{12}$.

3 Polynômes

3.1 Forme additive

1. **Polynôme.** Un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ est une expression symbolique du type

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \qquad (n \geqslant 0 \text{ et } (a_0, \cdots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1})$$

L'ensemble de tous les polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathbb{K}[X]$.

2. **Opérations algébriques.** La somme, les multiples (plus généralement les combinaisons linéaires), les produits, les dérivées, les primitives et les composées (obtenus par substitution) de polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ sont des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.
Pour $n \geqslant 0$, $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$, on a
   1. (somme) $P + Q = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) X^k$
   2. (multiplication par un scalaire) $\lambda P = \sum_{k=0}^{n} \lambda a_k X^k$ pour $\lambda \in \mathbb{K}$
   3. (produit) $P \times Q = \sum_{k=0}^{2n} c_k X^k$ avec $c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} \qquad (0 \leqslant k \leqslant 2n)$
   4. (dérivation) $P' = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} X^k$
   5. (primitives) Les primitives de P sont les polynomes

$$c + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} X^{k+1} = c + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{a_{k-1}}{k} X^k \qquad (c \in \mathbb{K})$$

   6. (substitution) le polynome $P(Q) = \sum_{k=0}^{n} a_k Q^k$ est obtenu en substituant Q à l'indeterminée X.

En particulier $P = P(X)$.

3. **degré.** Le degré d'un polynôme non nul $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ est le nombre entier naturel

$$\deg(P) = \max\{k \geqslant 0 : a_k \neq 0\}.$$

Par convention $\deg(0) = -\infty$.

4. L'ensemble de tous les polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$, de degré au plus n, est noté $\mathbb{K}_n[X]$.

$$\mathbb{K}_n[X] = \{P \in \mathbb{K}[X] : \deg(P) \leqslant n\}$$

5. **Opérations.**
   1. (multiplication par un scalaire) $\deg(\lambda P) = \deg(P)$ pour $\lambda \in \mathbb{K}^*$.
   2. (produit) $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$ pour P et Q polynômes non nuls.
   3. (somme) $\deg(P + Q) \leqslant \max(\deg(P), \deg(Q))$ avec égalité si $\deg(P) \neq \deg(Q)$.
   4. (dérivée) $\deg(P') = \begin{cases} \deg(P) - 1 & \text{si } \deg(P) \geqslant 1 \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}$

3.2 Forme multiplicative

6. **Division euclidienne.** Pour $P \in \mathbb{K}[X]$ et $D \in \mathbb{K}[X]^*$, il existe un unique $(Q,R) \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$$P = QD + R \text{ et } \deg(R) < \deg(D)$$

7. **Diviseur et multiple.** Soient P et Q dans $\mathbb{K}[X]$.

$$\left.\begin{array}{r} D \text{ est un diviseur de } P \\ P \text{ est un multiple de } D \end{array}\right\} \iff D|P \iff \exists Q \in \mathbb{K}[X] \text{ tel que } P = QD$$

8. **Racine.** $a \in \mathbb{K}$ est une racine de $P \in \mathbb{K}[X] \iff P(a) = 0 \iff (X - a)|P$
9. **Multiplicité.** Soit $a \in \mathbb{K}$ et $P \in \mathbb{K}[K]$.

$$a \text{ est racine de } P \text{ de multiplicité } m \iff \begin{cases} P(a) = 0 \\ \vdots \\ P^{(m-1)}(a) = 0 \\ P^{(m)}(a) \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (X - a)^m | P \\ (X - a)^{m+1} \not| P \end{cases}$$

10. **Théorème de D'Alembert-Gauss.** Tout polynôme non constant $P \in \mathbb{C}[X]$ admet une racine dans $\mathbb{C}$.
11. **Décomposition sur $\mathbb{C}$.** Pour chaque polynôme non constant $P \in \mathbb{C}[X]$, il existe une constante $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et des nombres complexes $(z_1, \cdots, z_n)$ uniques à permutation près tels que

$$P = \alpha \prod_{k=1}^{\deg(P)} (X - z_k)$$

12. **Décomposition sur $\mathbb{C}$ avec multiplicité.** Pour chaque polynôme non constant $P \in \mathbb{C}[X]$, il existe un entier $K \geqslant 1$, une constante $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et des nombres complexes $(z_1, \cdots, z_K)$ associés à des multiplicités $(n_1, \cdots, n_K)$ uniques à permutation près tels que

$$P = \alpha \prod_{k=1}^{K} (X - z_k)^{n_k}$$

De plus, on a $\deg(P) = n_1 + \cdots + n_K$

13. **Décomposition sur $\mathbb{R}$ avec multiplicité.** Pour chaque polynôme non constant $P \in \mathbb{R}[X]$, il existe deux entiers $K \geqslant 0$ et $L \geqslant 0$, une constante $\alpha \in \mathbb{C}^*$, des nombres réels $(r_1, \cdots, r_K)$ et des trinômes du second degré sans racines réelles $(Q_1, \cdots, Q_L)$ (de discriminant strictement négatif) associés à des multiplicités $(n_1, \cdots, n_K)$ et $(m_1, \cdots, m_L)$ uniques à permutation près tels que
$$P = \alpha \prod_{k=1}^{K} (X - r_k)^{n_k} \prod_{\ell=1}^{L} Q_\ell^{m_\ell}$$
De plus, on a $\deg(P) = n_1 + \cdots + n_K + 2m_1 + \cdots + 2m_L$

4 Espaces vectoriels

1. **Espace vectoriel.**

$$(E,+,\cdot)\ \mathbb{K}\text{- espace vectoriel} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} + \text{ loi interne, associative, commutative,} \\ \text{admettant un élément neutre } 0 \in E, \\ \text{tous les } x \in E \text{ sont inversibles pour } + \\ \cdot \text{ loi externe, associative, distributive sur } + \\ \forall x \in E, 1 \cdot x = x \end{array}\right.$$

2. **Combinaisons linéaires.** Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$

$$\begin{array}{r} x \text{ combi. linéaire de } x_1, \cdots, x_n \in E \\ \text{pour les coeffs } \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K} \end{array} \Longleftrightarrow x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k . x_k$$

3. **Produit nul.** Dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $(E,+,\cdot)$, on a

$$\lambda . x = 0 \Longleftrightarrow \lambda = 0 \text{ ou } x = 0$$

4. **sous-espace vectoriel.** F est un $\mathbb{K}$-sous-espace vectoriel de E si, et seulement si,
   1. F est un ensemble non vide *(en général, on montre que* $0_E \in F$*)*.
   2. F est inclus dans E, qui est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
   3. F est stable par combinaison linéaire, c'est-à-dire

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \qquad \forall (x,y) \in F^2, \qquad \lambda . x + \mu . y \in F,$$

5. **intersection.** Une intersection de sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E
6. **Espace vectoriel engendré.** L'espace vectoriel engendré par une partie A d'un espace vectoriel E est le plus petit sous-espace vectoriel de E (pour l'inclusion) contenant A.

$$\mathrm{Vect}(A) = \bigcap_{A \subset F \text{ sev de } E} F$$

7. **caractérisation.** L'espace vectoriel engendré par une partie A d'un espace vectoriel E est l'ensemble des combinaisons linéaires qu'il est possible de former avec les éléments de A

$$\mathrm{Vect}(A) = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k : n \geqslant 1, (x_1, \cdots, x_n) \in A^n, (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \right\}.$$

Lorsque $A = \{x1, \cdots, x_n\}$, on a plus simplement

$$\mathrm{Vect}(A) = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k : (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \right\}.$$

8. **Famille génératrice.** Soit $\mathcal{F} = (e_1, \cdots, e_n)$ une famille finie de vecteurs de E. alors

$$\mathcal{F} \text{ engendre } E \Longleftrightarrow E = \mathrm{Vect}(\mathcal{F}) \Longleftrightarrow \forall x \in E, \exists (\lambda 1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n : x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n.$$

9. **Famille libre.** Soit $\mathcal{F} = (e_1, \cdots, e_n)$ une famille finie de vecteurs de E. alors

$$\mathcal{F} \text{ est libre si, et seulement si, } \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = 0 \Longleftrightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$$

Une famille est libre *ssi* il existe une seule combinaison linéaire nulle de ses vecteurs (celle dont tous les coefficients sont nuls).

10. **Famille liée.** Une famille finie $\mathcal{F} = (e_1, \cdots, e_n)$ est liée si, et seulement si, elle n'est pas libre

$$\mathcal{F} \text{ est liée si, et seulement si, } \exists (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \neq (0, \cdots, 0) : \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = 0$$

Une telle relation est appelée une relation de dépendance linéaire.

11. **Base.** Une base d'un espace vectoriel E est une famille finie de vecteurs de E qui est libre et génératrice.
12. **Coordonnées.** Si $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ est une base d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, alors chaque vecteur x de E se décompose de manière unique sur $\mathcal{B}$

$$(e_1, \cdots, e_n) \text{ base de } E \Longleftrightarrow \forall x \in E, \exists ! (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^n : x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$$

Les nombres $(x_1, \cdots, x_n)$ sont appelés coordonnées (ou composantes) du vecteur x dans la base $(e_1, \cdots, e_n)$. La matrice des coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice colonne

$$\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

13. **Espaces vectoriels de référence.**
    1. $\mathbb{K}^n$ est un espace vectoriel, de base canonique $\left((0, \cdots, 0, \underset{k}{1}, 0, \cdots, 0)\right)_{1 \leqslant k \leqslant n}$
    2. $\mathbb{K}_n[X]$ est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel, de base canonique $\left(X^k\right)_{0 \leqslant k \leqslant n}$
    3. $\{0\}$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}^N$, $\mathcal{F}(\mathbb{K},\mathbb{K})$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels
    4. $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de base canonique $(1,i)$

5 Théorie de la dimension

1. **Dimension finie.** Un EV E est de dimension finie $\iff$ il existe une famille génératrice finie de E
2. **Cardinal.** Si $\mathcal{F}$ est une famille libre et si $\mathcal{G}$ est une famille génératrice d'un EV E, alors

$$\operatorname{card}(\mathcal{F}) \leqslant \operatorname{card}(\mathcal{G})$$

3. **Dimension infinie.** Lorsque l'espace vectoriel E n'est pas de dimension finie, on dit qu'il est de dimension infinie et l'on note $\dim_{\mathbb{K}}(E) = +\infty$.

4. **Caractérisation de la dimension infinie.** Si E est un espace vectoriel,

$$E \text{ de dimension infinie } \iff E \text{ contient des familles libres de cardinal arbitrairement grand.}$$

5. **Théorème de la base incomplète.** Toute famille libre (ou vide) d'un EV E, engendré par une famille finie $\mathcal{G}$, peut être complétée avec des vecteurs de $\mathcal{G}$ pour en constituer une base.

$$\begin{cases} (e_1,\cdots,e_m) \text{ libre} \\ (f_1,\cdots,f_n) \text{ génératrice} \end{cases} \Longrightarrow \begin{array}{l} \exists p \in [\![0,n]\!] \text{ et } 1 \leqslant i_1 < \cdots < i_p \leqslant n : \\ \qquad (e_1,\cdots,e_m,f_{i_1},\cdots,f_{i_p}) \text{ base} \end{array}$$

6. **Existence des bases.** Tout espace vectoriel de dimension finie admet une base.
7. **Dimension.** Par convention, $\dim_{\mathbb{K}}\{0\} = 0$ et la dimension d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E \neq \{0\}$ engendré par une famille finie est l'unique nombre entier positif vérifiant

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{K}}(E) &= \max\{\operatorname{card}(\mathcal{F}) : \mathcal{F} \text{ famille libre de } E\} \\ &= \min\{\operatorname{card}(\mathcal{F}) : \mathcal{F} \text{ famille génératrice de } E\} \\ &= \operatorname{card}(\mathcal{B}) \qquad (\mathcal{B} \text{ base de } E) \end{aligned}$$

Les bases ont exactement $\dim(E)$ *éléments, les familles libres ont au plus* $\dim(E)$ *éléments et les familles génératrices ont au moins* $\dim(E)$ *éléments.*

8. **Caractérisation des bases.** Si $\mathcal{F}$ est une famille de n vecteurs d'un EV de dimension n, alors

$$\mathcal{F} \text{ libre } \iff \mathcal{F} \text{ génératrice} \iff \mathcal{F} \text{ base}$$

9. **Sous-espace.** Si F est un sous espace d'un espace vectoriel E de dimension finie, alors F est de dimension finie et

$$\dim_{\mathbb{K}}(F) \leqslant \dim_{\mathbb{K}}(E)$$

10. **Egalité.** Si F est un sous espace d'un espace vectoriel E de dimension finie, alors

$$F = E \iff \dim_{\mathbb{K}}(F) = \dim_{\mathbb{K}}(E)$$

11. **Rang d'une famille.** Le rang d'une famille finie de vecteurs $\mathcal{F}$ est la dimension de l'espace qu'ils engendrent

$$\operatorname{rg}(\mathcal{F}) = \dim \operatorname{Vect}(\mathcal{F})$$

12. **Rang et matrices.** Si $X_1,\cdots,X_n$ sont les matrices de $x_1,\cdots,x_n$ dans $\mathcal{B}$ et si M est la matrice rectangulaire dont les colonnes sont $X_1,\cdots,X_n$ alors

$$\operatorname{rg}(x_1,\cdots,x_n) = \operatorname{rg}(X_1,\cdots,X_n) = \operatorname{rg}(M)$$

Le rang d'une famille de vecteurs est le rang de leurs matrices coordonnées (dans n'importe quelle base)

13. **Rang et familles.** Si $\mathcal{F}$ est une famille finie de vecteurs d'un espace vectoriel E.

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \text{ famille génératrice de } E &\iff \operatorname{rg}(\mathcal{F}) = \dim(E) \\ \mathcal{F} \text{ famille libre de } E &\iff \operatorname{rg}(\mathcal{F}) = \operatorname{card}(\mathcal{F}) \end{aligned}$$

14. **Dimensions de référence.** pour $n \geqslant 1$ et $p \geqslant 1$, on a

$$\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n) = n \qquad \dim_{\mathbb{K}}\big(\mathbb{K}[X]\big) = n+1 \qquad \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = np$$

15. **Espaces sur $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}$.** Si E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, alors E est également un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. De plus, si E est engendré par une famille finie, alors

$$\dim_{\mathbb{R}}(E) = 2 \times \dim_{\mathbb{C}}(E)$$

Si $e_1,\cdots,e_n$ *est une base du* $\mathbb{C}$*-EV* E*, alors* $e_1,\cdots,e_n,i.e_1,\cdots,i.e_n$ *est une base du* $\mathbb{R}$*-EV* E*.*

16. **Produit cartésien.** si E et F sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, alors $E \times F$ l'est également pour les opérations définies par

$$\begin{aligned} (x,y) + (x',y') &= (x+x',y+y') \qquad \text{pour } (x,y) \text{ et } (x',y') \text{ dans } E \times F \\ \lambda.(x,y) &= (\lambda.x,\lambda.y) \qquad \text{pour } \lambda \in \mathbb{K} \text{ et } (x,y) \text{ dans } E \times F \end{aligned}$$

Si E et F sont de dimensions finies, on a

$$\dim_{\mathbb{K}}(E \times F) = \dim_{\mathbb{K}}(E) + \dim_{\mathbb{K}}(F)$$

En particulier, si $e_1,\cdots,e_n$ *est une base de* E *et* $f_1,\cdots,f_k$ *est une base de* F*, alors* $(e_1,0),\cdots,(e_n,0),(0,f_1),\cdots,(0,f_k)$ *est une base de* $E \times F$*.*

17. **Sommes d'espaces vectoriels.** La somme de n sous-espaces vectoriels $E_1,\cdots E_n$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est l'espace vectoriel

$$E_1 + \cdots + E_n = \{x_1 + \cdots + x_n : (x_1,\cdots,x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n\}$$

18. **Somme directe.** On dit que la somme $E_1 + \cdots + E_n$ est directe et l'on note $E_1 \oplus \cdots \oplus E_n$ à la place de $E_1 + \cdots + E_n$ si, et seulement si, pour $(x_1, \cdots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$,

$$x_1 + \cdots + x_n = 0 \implies x_1 = \cdots = x_n = 0$$

19. **Dimension d'une somme directe.** Si $E_1, \cdots, E_n$ sont des sous-espaces de dimension finie d'un espace vectoriel E en somme directe, alors

$$\dim(E_1 \oplus \cdots \oplus E_n) = \dim(E_1) + \cdots + \dim(E_n)$$

20. **Somme de deux espaces.** Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, alors

$$\begin{aligned} F + G &= \{x + y : x \in F, y \in G\} \\ F \oplus G &\iff F \cap G = \{0\} \end{aligned}$$

21. **Dimension de la somme de deux espaces.** Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de dimension finie de E, alors

$$\begin{aligned} \dim(F + G) &= \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G) \\ \dim(F \oplus G) &= \dim(F) + \dim(G) \end{aligned}$$

22. **Supplémentaire.** Si F et G sont des sous-espaces d'un espace vectoriel E, alors

$$F \text{ et } G \text{ sont supplémentaires dans } E \iff E = F \oplus G \iff \begin{cases} E = F + G \\ F \oplus G \end{cases}$$

23. **Supplémentaire en dimension finie.** Tout sous-espace F d'un espace vectoriel E de dimension finie admet un supplémentaire G dans E. De plus, on a

$$\dim_{\mathbb{K}}(G) = \dim_{\mathbb{K}}(E) - \dim_{\mathbb{K}}(F)$$

24. **Sommes directes et bases.** Soient $E_1, \cdots, E_n$ des sous-espaces vectoriels de E munis de bases (finies) $\mathcal{B}_1, \cdots, \mathcal{B}_n$. Alors

$$E_1 \oplus \cdots \oplus E_n \iff \big(\mathcal{B}_1, \cdots, \mathcal{B}_n\big) \text{ est une base de } E_1 + \cdots + E_n$$