

1 Intégration sur un segment (version 7)

1.1 Définition

1. **Primitive.** F est une primitive sur l'intervalle I d'une application f définie sur I si, et seulement si, F est dérivable sur I et vérifie $\underbrace{\forall x \in I, F'(x) = f(x)}_{F'=f}$

2. **Caractérisation des primitives.** Si F est une primitive de f sur un intervalle I , alors

$$G : I \rightarrow \mathbb{K} \text{ est une primitive de } f \text{ sur } I \iff \exists c \in \mathbb{K} : \forall x \in I, G(x) = F(x) + c$$

3. **Primitives des fonctions continues.** Toute fonction continue f sur un intervalle I admet une primitive sur I .

4. **Intégrale des fonctions continues.** Si f est continue sur $[a, b]$, l'intégrale de f de a à b est le nombre

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a),$$

où F désigne n'importe quelle primitive F de f sur $[a, b]$.

5. **Théorème fondamental de l'analyse.** Si f est continue sur un intervalle I contenant a , alors l'unique primitive de f s'annulant en a est l'application F définie par

$$\begin{aligned} F : I &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int_a^x f(t)dt \end{aligned}$$

Par ailleurs, F est dérivable, de dérivée continue sur I (de classe $\mathcal{C}^1$)

6. **Subdivision.** Une subdivision de $[a, b]$ est une famille $(x_0, \dots, x_n)$ de nombres réels vérifiant $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$.

7. **Intégrale des fonctions continues par morceaux (P.M.).** Si $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ est une subdivision adaptée à la fonction continue par morceaux $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, alors l'intégrale de f de a à b est le nombre

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f_k(x)dx,$$

Pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on rappelle que la restriction de f à l'intervalle $]x_{k-1}, x_k[$ est prolongeable par continuité en une fonction continue $f_k : [x_{k-1}, x_k] \rightarrow \mathbb{R}$

8. **Convention.** On pose $\int_a^a f = 0$ et $\int_b^a f := -\int_a^b f$ lorsque l'intégrale de droite est définie.

1.2 Propriétés

9. **Relation de Chasles.** Si f est continue (par morceaux) sur un segment S contenant a , b et c alors $\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$ (les trois intégrales sont définies)

10. **Linéarité.** Si f et g sont continues (p. m.) sur $[a, b]$ et si $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors $\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g$

11. **Positivité.** Si f est continue (par morceaux) sur $[a, b]$, à valeurs positives ou nulles, alors $\int_a^b f \geq 0$

12. **Croissance.** Si f et g sont continues (p. m.) sur $[a, b]$ et si $\underbrace{\forall x \in [a, b], f(x) \leq g(x)}_{f \leq g}$, alors $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

13. **Cas des fonctions continues, positives, d'intégrale nulle.** Si f est continue sur $[a, b]$, à valeurs positives ou nulles, alors

$$\int_a^b f(x)dx = 0 \iff \underbrace{\forall x \in [a, b], f(x) = 0}_{f=0}$$

14. **Valeur absolue.** Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue (par morceaux), alors $|f|$ l'est aussi et $\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$

15. **Sommes de Riemann.** Si f est continue sur $[0, 1]$ alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)dx$.

1.3 Outils fondamentaux

16. **Intégration par partie.** Si f et g deux fonctions dérivables, de dérivées continues (de classe $\mathcal{C}^1$) sur $[a, b]$, alors

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

17. **changement de variable (non bijectif).** Si f est continu sur un intervalle I et si $\varphi : [a, b] \rightarrow I$ est dérivable, de dérivée continue (de classe $\mathcal{C}^1$), alors

$$\int_a^b f(\varphi(u))\varphi'(u)du = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx.$$

18. **Changement de variable.** Si f est continue (par morceaux) sur $[a, b]$ et si

1. $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ est une bijection
 2. φ est dérivable et de dérivée continue (de classe $\mathcal{C}^1$) sur $[c, d]$
 3. φ^{-1} est dérivable, de dérivée continue (de classe $\mathcal{C}^1$) sur $[a, b]$
- alors

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(u))\varphi'(u)du$$

1.4 Dérivées et primitives

19. Pour x dans un intervalle sur lequel les fonctions sont dérivables pour les dérivées (et continues pour les primitives),

$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$	<i>Monômes</i>	$\int x^\alpha dx = \begin{cases} \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c & (\alpha \neq -1) \\ \ln x + c & (\alpha = -1) \end{cases}$
$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0)$	<i>Logarithme</i>	$\int \frac{dx}{x} = \ln x + c$
$(e^x)' = e^x$	<i>Exponentielle</i>	$\int e^x dx = e^x + c$
$\cos'(x) = -\sin(x)$	<i>Cosinus</i>	$\int \sin(x) dx = -\cos(x) + c$
$\sin'(x) = \cos(x)$	<i>Sinus</i>	$\int \cos(x) dx = \sin(x) + c$
$\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$	<i>Tangente</i>	$\int \frac{dx}{\cos^2(x)} = \int (1 + \tan^2(x)) dx = \tan(x) + c$
$\text{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}$	<i>Arctangente</i>	$\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{Arctan}(x) + c$

2 Variables aléatoires réelles (discrètes, sur un univers fini)

Dans tout ce chapitre, $(\Omega, P(\Omega), P)$ désigne un espace probabilisé fini ($\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$). Lorsque $p \in [0, 1]$, on pose $q = 1 - p$.

2.1 Variable aléatoire réelle

1. **VAR.** Une variable aléatoire réelle est une application $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.
2. **VAR certaine.** X est une VAR certaine ssi il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\forall \omega \in \Omega, X(\omega) = c$.
3. **VAR quasi-certaine.** X est une VAR quasi-certaine ssi il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $P(X = c) = 1$.
4. **Univers image.** L'univers image d'une VAR X est $X(\Omega) = \{X(\omega) : \omega \in \Omega\}$.
5. **Système complet.** Le système complet associé à une VAR X est $\{(X = x)\}_{x \in X(\Omega)}$.
6. **loi d'une VAR.** La loi d'une VAR X est la probabilité P_X définie sur $X(\Omega)$ par

$$P_X(A) = P(X \in A) \quad (A \text{ événement de } X(\Omega))$$
Remarque : elle est complètement déterminée par la donnée de $P(X = x)$ pour $x \in X(\Omega)$
7. **fonction de répartition d'une VAR.** La fonction de répartition d'une VAR X est l'application $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ définie par

$$F_X(x) = P(X \leq x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

8. **Propriétés de F_X .** La fonction de répartition F_X d'une var X est croissante sur $\mathbb{R}$, continue à droite et vérifie

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = 1$$

Pour une VAR discrète sur un ensemble fini, elle est aussi en escalier (constante par morceaux)

2.2 Espérance

9. **Espérance.** L'espérance d'une VAR discrète finie X est le nombre réel

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x)$$

10. **VAR centrée.** Une VAR X est centrée ssi son espérance est nulle
11. **Théorème de transfert.** Pour une VAR X et pour $g : X(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, on a

$$E(g(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} g(x)P(X = x)$$

12. **Transformation affine.** Pour une VAR X , on a

$$E(aX + b) = aE(X) + b \quad (a, b \in \mathbb{R})$$
13. **Positivité.** Si X est une VAR vérifiant $\underbrace{\forall \omega \in \Omega, X(\omega) \geq 0}_{X \geq 0}$ (p.s.), alors $E(X) \geq 0$.

14. **Croissance.** Si X et Y vérifient $\underbrace{\forall \omega \in \Omega, X(\omega) \leq Y(\omega)}_{X \leq Y}$ (p.s.), alors $E(X) \leq E(Y)$.

15. **Cas des VAR positives, d'espérance nulle.** Si X vérifie $\underbrace{\forall \omega \in \Omega, X(\omega) \geq 0}_{X \geq 0}$ (p.s.), alors

$$E(X) = 0 \iff P(X = 0) = 1 \iff X = 0 \text{ p.s.}$$

2.3 Variance et écart type

16. **Variance.** La variance d'une VAR X est le nombre réel positif ou nul

$$V(X) = E\left((X - E(X))^2\right)$$

17. **Formule de Koenig-Huygens.** Pour une VAR X , on a $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

18. **Variance nulle.** Pour une VAR X , on a

$$V(X) = 0 \iff X = E(X) \text{ p.s.}$$

19. **Transformation affine.** Pour une VAR X , on a

$$V(aX + b) = a^2 V(X) \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

20. **Ecart type.** L'écart type d'une VAR X est le nombre réel positif ou nul $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

21. **VAR centrée réduite.** Une VAR X est centrée et réduite ssi son espérance est nulle et sa variance vaut 1 (son écart type vaut 1)

2.4 Loix usuelles

22. **loi certaine.** X suit la loi certaine ssi $X = c$ p.s. Dans ce cas, on a $E(X) = c$ et $V(X) = 0$.

23. **loi de Bernouilli de paramètre $p \in [0, 1]$.**

$$X \hookrightarrow B(p) \iff P(X = 1) = p \text{ et } P(X = 0) = q$$

Dans ce cas, on a $E(X) = p$ et $V(X) = pq$.

24. **loi binomiale de paramètre $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0, 1]$.**

$$X \hookrightarrow B(n, p) \iff P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad (0 \leq k \leq n)$$

Dans ce cas, on a $E(X) = np$ et $V(X) = npq$.

25. **loi uniforme.** X suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$ ssi $X \hookrightarrow U(\llbracket 1, n \rrbracket)$ ssi

$$P(X = k) = \frac{1}{n} \quad (1 \leq k \leq n)$$

Dans ce cas, on a $E(X) = \frac{n+1}{2}$ et $V(X) = \frac{n^2-1}{12}$.

3 Polynômes

3.1 Forme additive

1. **Polynôme.** Un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ est une expression symbolique du type

$$P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \quad (n \geq 0 \text{ et } (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1})$$

L'ensemble de tous les polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathbb{K}[X]$.

2. **Opérations algébriques.** La somme, les multiples (plus généralement les combinaisons linéaires), les produits, les dérivées, les primitives et les composées (obtenus par substitution) de polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ sont des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Pour $n \geq 0$, $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^n b_k X^k$, on a

1. (somme) $P + Q = \sum_{k=0}^n (a_k + b_k) X^k$
2. (multiplication par un scalaire) $\lambda P = \sum_{k=0}^n \lambda a_k X^k$ pour $\lambda \in \mathbb{K}$
3. (produit) $P \times Q = \sum_{k=0}^{2n} c_k X^k$ avec $c_k = \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i}$ ($0 \leq k \leq 2n$)
4. (dérivation) $P' = \sum_{k=1}^n k a_k X^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} X^k$
5. (primitives) Les primitives de P sont les polynômes

$$c + \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k+1} X^{k+1} = c + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{a_{k-1}}{k} X^k \quad (c \in \mathbb{K})$$

6. (substitution) le polynôme $P(Q) = \sum_{k=0}^n a_k Q^k$ est obtenu en substituant Q à l'indéterminée X .

En particulier $P = P(X)$.

3. **degré.** Le degré d'un polynôme non nul $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ est le nombre entier naturel

$$\deg(P) = \max\{k \geq 0 : a_k \neq 0\}.$$

Par convention $\deg(0) = -\infty$.

4. L'ensemble de tous les polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$, de degré au plus n , est noté $\mathbb{K}_n[X]$.

$$\mathbb{K}_n[X] = \{P \in \mathbb{K}[X] : \deg(P) \leq n\}$$

5. Opérations.

1. (multiplication par un scalaire) $\deg(\lambda P) = \deg(P)$ pour $\lambda \in \mathbb{K}^*$.
2. (produit) $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$ pour P et Q polynômes non nuls.
3. (somme) $\deg(P + Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$ avec égalité si $\deg(P) \neq \deg(Q)$.
4. (dérivée) $\deg(P') = \begin{cases} \deg(P) - 1 & \text{si } \deg(P) \geq 1 \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}$

3.2 Forme multiplicative

6. **Division euclidienne.** Pour $P \in \mathbb{K}[X]$ et $D \in \mathbb{K}[X]^*$, il existe un unique $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$$P = QD + R \text{ et } \deg(R) < \deg(D)$$

7. **Diviseur et multiple.** Soient P et Q dans $\mathbb{K}[X]$.

$$\left. \begin{array}{l} D \text{ est un diviseur de } P \\ P \text{ est un multiple de } D \end{array} \right\} \iff D|P \iff \exists Q \in \mathbb{K}[X] \text{ tel que } P = QD$$

8. **Racine.** $a \in \mathbb{K}$ est une racine de $P \in \mathbb{K}[X] \iff P(a) = 0 \iff (X - a)|P$
9. **Multiplicité.** Soit $a \in \mathbb{K}$ et $P \in \mathbb{K}[K]$.

$$a \text{ est racine de } P \text{ de multiplicité } m \iff \begin{cases} P(a) = 0 \\ \vdots \\ P^{(m-1)}(a) = 0 \\ P^{(m)}(a) \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (X - a)^m | P \\ (X - a)^{m+1} \nmid P \end{cases}$$

10. **Théorème de D'Alembert-Gauss.** Tout polynôme non constant $P \in \mathbb{C}[X]$ admet une racine dans $\mathbb{C}$.

11. **Décomposition sur $\mathbb{C}$.** Pour chaque polynôme non constant $P \in \mathbb{C}[X]$, il existe une constante $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et des nombres complexes $(z_1, \dots, z_n)$ uniques à permutation près tels que

$$P = \alpha \prod_{k=1}^{\deg(P)} (X - z_k)$$

12. **Décomposition sur $\mathbb{C}$ avec multiplicité.** Pour chaque polynôme non constant $P \in \mathbb{C}[X]$, il existe un entier $K \geq 1$, une constante $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et des nombres complexes $(z_1, \dots, z_K)$ associés à des multiplicités $(n_1, \dots, n_K)$ uniques à permutation près tels que

$$P = \alpha \prod_{k=1}^K (X - z_k)^{n_k}$$

De plus, on a $\deg(P) = n_1 + \cdots + n_K$

13. **Décomposition sur $\mathbb{R}$ avec multiplicité.** Pour chaque polynôme non constant $P \in \mathbb{R}[X]$, il existe deux entiers $K \geq 0$ et $L \geq 0$, une constante $\alpha \in \mathbb{C}^*$, des nombres réels $(r_1, \dots, r_K)$ et des trinômes du second degré sans racines réelles $(Q_1, \dots, Q_L)$ (de discriminant strictement négatif) associés à des multiplicités $(n_1, \dots, n_K)$ et $(m_1, \dots, m_L)$ uniques à permutation près tels que

$$P = \alpha \prod_{k=1}^K (X - r_k)^{n_k} \prod_{\ell=1}^L Q_\ell^{m_\ell}$$

De plus, on a $\deg(P) = n_1 + \cdots + n_K + 2m_1 + \cdots + 2m_L$

4 Espaces vectoriels

1. Espace vectoriel.

$$(E, +, \cdot) \text{ } \mathbb{K}\text{-espace vectoriel} \iff \begin{cases} + \text{ loi interne, associative, commutative,} \\ \text{admettant un élément neutre } 0 \in E, \\ \text{tous les } x \in E \text{ sont inversibles pour } + \\ \cdot \text{ loi externe, associative, distributive sur } + \\ \forall x \in E, 1 \cdot x = x \end{cases}$$

2. Combinaisons linéaires.

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$

$$\begin{array}{l} x \text{ combi. linéaire de } x_1, \dots, x_n \in E \\ \text{pour les coeffs } \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K} \end{array} \iff x = \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot x_k$$

3. Produit nul.

Dans un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel $(E, +, \cdot)$, on a

$$\lambda \cdot x = 0 \iff \lambda = 0 \text{ ou } x = 0$$

4. sous-espace vectoriel.

F est un $\mathbb{K}$ -sous-espace vectoriel de E si, et seulement si,

1. F est un ensemble non vide (*en général, on montre que* $0_E \in F$).
2. F est inclus dans E , qui est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.
3. F est stable par combinaison linéaire, c'est-à-dire

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \quad \forall (x, y) \in F^2, \quad \lambda \cdot x + \mu \cdot y \in F,$$

5. intersection.

Une intersection de sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E

6. Espace vectoriel engendré.

L'espace vectoriel engendré par une partie A d'un espace vectoriel E est le plus petit sous-espace vectoriel de E (pour l'inclusion) contenant A .

$$\text{Vect}(A) = \bigcap_{A \subset F \text{ sev de } E} F$$

7. caractérisation.

L'espace vectoriel engendré par une partie A d'un espace vectoriel E est l'ensemble des combinaisons linéaires qu'il est possible de former avec les éléments de A

$$\text{Vect}(A) = \left\{ \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k : n \geq 1, (x_1, \dots, x_n) \in A^n, (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \right\}.$$

Lorsque $A = \{x_1, \dots, x_n\}$, on a plus simplement

$$\text{Vect}(A) = \left\{ \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k : (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \right\}.$$

8. Famille génératrice.

Soit $\mathcal{F} = (e_1, \dots, e_n)$ une famille finie de vecteurs de E . alors

$$\mathcal{F} \text{ engendre } E \iff E = \text{Vect}(\mathcal{F}) \iff \forall x \in E, \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n : x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n.$$

9. Famille libre.

Soit $\mathcal{F} = (e_1, \dots, e_n)$ une famille finie de vecteurs de E . alors

$$\mathcal{F} \text{ est libre si, et seulement si, } \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k = 0 \iff \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$$

Une famille est libre *ssi* il existe une seule combinaison linéaire nulle de ses vecteurs (celle dont tous les coefficients sont nuls).

10. Famille liée.

Une famille finie $\mathcal{F} = (e_1, \dots, e_n)$ est liée si, et seulement si, elle n'est pas libre

$$\mathcal{F} \text{ est liée si, et seulement si, } \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0) : \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k = 0$$

Une telle relation est appelée une relation de dépendance linéaire.

11. Base.

Une base d'un espace vectoriel E est une famille finie de vecteurs de E qui est libre et génératrice.

12. Coordonnées.

Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E , alors chaque vecteur x de E se décompose de manière unique sur $\mathcal{B}$

$$(e_1, \dots, e_n) \text{ base de } E \iff \forall x \in E, \exists! (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n : x = \sum_{k=1}^n x_k e_k$$

Les nombres $(x_1, \dots, x_n)$ sont appelés coordonnées (ou composantes) du vecteur x dans la base $(e_1, \dots, e_n)$. La matrice des coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice colonne

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

13. Espaces vectoriels de référence.

1. $\mathbb{K}^n$ est un espace vectoriel, de base canonique $\left((0, \dots, 0, \underset{k}{1}, 0, \dots, 0) \right)_{1 \leq k \leq n}$
2. $\mathbb{K}_n[X]$ est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel, de base canonique $(X^k)_{0 \leq k \leq n}$
3. $\{0\}$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}^N$, $\mathcal{F}(\mathbb{K}, \mathbb{K})$ sont des $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels
4. $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de base canonique $(1, i)$

5 Théorie de la dimension

1. **Dimension finie.** Un EV E est de dimension finie $\iff$ il existe une famille génératrice finie de E
2. **Cardinal.** Si $\mathcal{F}$ est une famille libre et si $\mathcal{G}$ est une famille génératrice d'un EV E , alors

$$\text{card}(\mathcal{F}) \leq \text{card}(\mathcal{G})$$

3. **Dimension infinie.** Lorsque l'espace vectoriel E n'est pas de dimension finie, on dit qu'il est de dimension infinie et l'on note $\dim_{\mathbb{K}}(E) = +\infty$.

4. **Caractérisation de la dimension infinie.** Si E est un espace vectoriel,

$$E \text{ de dimension infinie} \iff E \text{ contient des familles libres de cardinal arbitrairement grand.}$$

5. **Théorème de la base incomplète.** Toute famille libre (ou vide) d'un EV E , engendré par une famille finie $\mathcal{G}$, peut être complétée avec des vecteurs de $\mathcal{G}$ pour en constituer une base.

$$\left\{ \begin{array}{l} (e_1, \dots, e_m) \text{ libre} \\ (f_1, \dots, f_n) \text{ génératrice} \end{array} \right\} \implies \exists p \in \llbracket 0, n \rrbracket \text{ et } 1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n : (e_1, \dots, e_m, f_{i_1}, \dots, f_{i_p}) \text{ base}$$

6. **Existence des bases.** Tout espace vectoriel de dimension finie admet une base.
7. **Dimension.** Par convention, $\dim_{\mathbb{K}}\{0\} = 0$ et la dimension d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel $E \neq \{0\}$ engendré par une famille finie est l'unique nombre entier positif vérifiant

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{K}}(E) &= \max\{\text{card}(\mathcal{F}) : \mathcal{F} \text{ famille libre de } E\} \\ &= \min\{\text{card}(\mathcal{F}) : \mathcal{F} \text{ famille génératrice de } E\} \\ &= \text{card}(\mathcal{B}) \quad (\mathcal{B} \text{ base de } E) \end{aligned}$$

Les bases ont exactement $\dim(E)$ éléments, les familles libres ont au plus $\dim(E)$ éléments et les familles génératrices ont au moins $\dim(E)$ éléments.

8. **Caractérisation des bases.** Si $\mathcal{F}$ est une famille de n vecteurs d'un EV de dimension n , alors

$$\mathcal{F} \text{ libre} \iff \mathcal{F} \text{ génératrice} \iff \mathcal{F} \text{ base}$$

9. **Sous-espace.** Si F est un sous espace d'un espace vectoriel E de dimension finie, alors F est de dimension finie et

$$\dim_{\mathbb{K}}(F) \leq \dim_{\mathbb{K}}(E)$$

10. **Egalité.** Si F est un sous espace d'un espace vectoriel E de dimension finie, alors

$$F = E \iff \dim_{\mathbb{K}}(F) = \dim_{\mathbb{K}}(E)$$

11. **Rang d'une famille.** Le rang d'une famille finie de vecteurs $\mathcal{F}$ est la dimension de l'espace qu'ils engendrent

$$\text{rg}(\mathcal{F}) = \dim \text{Vect}(\mathcal{F})$$

12. **Rang et matrices.** Si $X_1, \dots, X_n$ sont les matrices de $x_1, \dots, x_n$ dans $\mathcal{B}$ et si M est la matrice rectangulaire dont les colonnes sont $X_1, \dots, X_n$ alors

$$\text{rg}(x_1, \dots, x_n) = \text{rg}(X_1, \dots, X_n) = \text{rg}(M)$$

Le rang d'une famille de vecteurs est le rang de leurs matrices coordonnées (dans n'importe quelle base)

13. **Rang et familles.** Si $\mathcal{F}$ est une famille finie de vecteurs d'un espace vectoriel E .

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \text{ famille génératrice de } E &\iff \text{rg}(\mathcal{F}) = \dim(E) \\ \mathcal{F} \text{ famille libre de } E &\iff \text{rg}(\mathcal{F}) = \text{card}(\mathcal{F}) \end{aligned}$$

14. **Dimensions de référence.** pour $n \geq 1$ et $p \geq 1$, on a

$$\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n) = n \quad \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}_n[X]) = n + 1 \quad \dim_{\mathbb{K}}\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = np$$

15. **Espaces sur $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}$.** Si E est un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel, alors E est également un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. De plus, si E est engendré par une famille finie, alors

$$\dim_{\mathbb{R}}(E) = 2 \times \dim_{\mathbb{C}}(E)$$

Si $e_1, \dots, e_n$ est une base du $\mathbb{C}$ -EV E , alors $e_1, \dots, e_n, i.e_1, \dots, i.e_n$ est une base du $\mathbb{R}$ -EV E .

16. **Produit cartésien.** si E et F sont des $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels, alors $E \times F$ l'est également pour les opérations définies par

$$\begin{aligned} (x, y) + (x', y') &= (x + x', y + y') && \text{pour } (x, y) \text{ et } (x', y') \text{ dans } E \times F \\ \lambda.(x, y) &= (\lambda.x, \lambda.y) && \text{pour } \lambda \in \mathbb{K} \text{ et } (x, y) \text{ dans } E \times F \end{aligned}$$

Si E et F sont de dimensions finies, on a

$$\dim_{\mathbb{K}}(E \times F) = \dim_{\mathbb{K}}(E) + \dim_{\mathbb{K}}(F)$$

En particulier, si $e_1, \dots, e_n$ est une base de E et $f_1, \dots, f_k$ est une base de F , alors $(e_1, 0), \dots, (e_n, 0), (0, f_1), \dots, (0, f_k)$ est une base de $E \times F$.

17. **Sommes d'espaces vectoriels.** La somme de n sous-espaces vectoriels $E_1, \dots, E_n$ d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E est l'espace vectoriel

$$E_1 + \dots + E_n = \{x_1 + \dots + x_n : (x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \dots \times E_n\}$$

18. **Somme directe.** On dit que la somme $E_1 + \cdots + E_n$ est directe et l'on note $E_1 \oplus \cdots \oplus E_n$ à la place de $E_1 + \cdots + E_n$ si, et seulement si, pour $(x_1, \cdots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$,

$$x_1 + \cdots + x_n = 0 \implies x_1 = \cdots = x_n = 0$$

19. **Dimension d'une somme directe.** Si $E_1, \cdots, E_n$ sont des sous-espaces de dimension finie d'un espace vectoriel E en somme directe, alors

$$\dim(E_1 \oplus \cdots \oplus E_n) = \dim(E_1) + \cdots + \dim(E_n)$$

20. **Somme de deux espaces.** Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E , alors

$$\begin{aligned} F + G &= \{x + y : x \in F, y \in G\} \\ F \oplus G &\iff F \cap G = \{0\} \end{aligned}$$

21. **Dimension de la somme de deux espaces.** Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de dimension finie de E , alors

$$\begin{aligned} \dim(F + G) &= \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G) \\ \dim(F \oplus G) &= \dim(F) + \dim(G) \end{aligned}$$

22. **Supplémentaire.** Si F et G sont des sous-espaces d'un espace vectoriel E , alors

$$F \text{ et } G \text{ sont supplémentaires dans } E \iff E = F \oplus G \iff \begin{cases} E = F + G \\ F \cap G = \{0\} \end{cases}$$

23. **Supplémentaire en dimension finie.** Tout sous-espace F d'un espace vectoriel E de dimension finie admet un supplémentaire G dans E . De plus, on a

$$\dim_{\mathbb{K}}(G) = \dim_{\mathbb{K}}(E) - \dim_{\mathbb{K}}(F)$$

24. **Sommes directes et bases.** Soient $E_1, \cdots, E_n$ des sous-espaces vectoriels de E munis de bases (finies) $\mathcal{B}_1, \cdots, \mathcal{B}_n$. Alors

$$E_1 \oplus \cdots \oplus E_n \iff (\mathcal{B}_1, \cdots, \mathcal{B}_n) \text{ est une base de } E_1 + \cdots + E_n$$

6 Etude asymptotique

6.1 suites

1. **suite négligeable.** Une suite u est négligeable devant une suite v si, et seulement s'il existe une suite ε de limite nulle telle que $u_n = v_n \varepsilon_n$ à partir d'un certain rang

$$u_n = o(v_n) \iff u_n = v_n \varepsilon_n \text{ pour } n \geq N \text{ avec } \lim \varepsilon_n = 0$$

A la condition que la suite v ne s'annule pas à partir d'un certain rang, on a

$$u_n = o(v_n) \iff \lim \frac{u_n}{v_n} = 0$$

2. **opérations.** Soient u, v, u', v' et w des suites. Alors

$$\begin{array}{lll} u = o(v) \text{ et } v = o(w) & \implies & u = o(w) \quad (\text{transitivité}) \\ u = o(w) \text{ et } v = o(w) & \implies & u + v = o(w) \quad (\text{addition}) \\ u = o(v) & \iff & \lambda u = o(v) \quad (\text{multiple, } \lambda \in \mathbb{R}^*) \\ & \iff & u = o(\lambda w) \quad (\text{multiple, } \lambda \in \mathbb{R}^*) \\ u = o(v) \text{ et } u' = o(v') & \implies & uv = o(vv') \quad (\text{multiplication 1}) \\ u = o(v) & \implies & uw = o(vw) \quad (\text{multiplication 2}) \end{array}$$

Remarque, ce sont ces propriétés qui justifient que

$$\begin{array}{ll} \ln(n) = o(n) = o(n^2) & -5o(1) = o(1) = o(12) \\ o(1) + o(1) = o(1) & \ln(n).o(n) = o(n \ln(n)) = o(n^2) \end{array}$$

3. **suite équivalente.** La suite u est équivalente à la suite v si, et seulement s'il existe une suite α de limite 1 telle que $u_n = v_n \alpha_n$ à partir d'un certain rang

$$u_n \sim v_n \iff u_n = v_n + o(v_n) \iff u_n = v_n \alpha_n \text{ pour } n \geq N \text{ avec } \lim \alpha_n = 1$$

A la condition que la suite v ne s'annule pas à partir d'un certain rang, on a

$$u_n \sim v_n \iff \lim \frac{u_n}{v_n} = 1$$

4. **signe.** si $u \sim v$ alors u et v ont le même signe à partir d'un certain rang. De plus, si u ne s'annule pas à partir d'un certain rang, alors, v ne s'annule pas non plus à partir d'un certain rang
5. **opérations.** Soient u, v, U, V et w des suites. Alors

$$\begin{array}{lll} u \sim u & & (\text{reflexivité}) \\ u \sim v & \iff & v \sim u \quad (\text{symétrie}) \\ u \sim v \text{ et } v \sim w & \implies & u \sim w \quad (\text{transitivité}) \\ u \sim v & \iff & \lambda u \sim \lambda v \quad (\text{multiple, } \lambda \in \mathbb{R}^*) \\ u \sim v \text{ et } U \sim V & \implies & uU \sim vV \quad (\text{compatibilité avec la multiplication}) \\ u \sim v & \implies & u^n \sim v^n \quad (\text{compatibilité avec les puissances, } n \in \mathbb{N}) \\ u \sim v & \implies & u^n \sim v^n \quad (\text{compatibilité avec les puissances, } n \in \mathbb{Z}^*, u_n \neq 0 \text{ pour } n \geq N) \\ u \sim v \text{ et } U \sim V & \implies & \frac{u}{U} \sim \frac{v}{V} \quad (\text{compatibilité avec le quotient, } U_n \neq 0 \text{ pour } n \geq N) \end{array}$$

Remarque, ce sont ces propriétés qui justifient que

$$n \sim n+1 \sim n+2 \quad n+2 \sim n+1 \sim n \quad n^3 = (n+1)^3 \quad \frac{(n+2)^2}{(n+1)^3} \sim \frac{n^2}{n^3} = \frac{1}{n}$$

6. **limites.** Soient u une suite et $\ell \in \mathbb{R}^*$.

$$\begin{array}{ll} \lim u = 0 & \iff u = o(1) \\ \lim u = \ell & \iff u \sim \ell \end{array}$$

7. **Théorème de croissance comparée.** Pour $\alpha > 0$, on a

$$\ln(n) = o(n^\alpha) \quad n = o(e^{\alpha n}) \quad e^{\alpha n} = o(n!)$$

6.2 Fonctions

Dans cette section, les fonctions sont définies sur un ensemble $D \subset \mathbb{R}$ qui contient ou est au contact de $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Pour simplifier les énoncés, on note $\mathcal{V}_a$ et l'on appelle voisinage de a tout ensemble du type

$$\mathcal{V}_a = \begin{cases} D \cap]a - \delta, a + \delta[& (\delta > 0) & \text{si } a \in \mathbb{R} \\ D \cap [b, +\infty[& (b \in \mathbb{R}) & \text{si } a = +\infty \\ D \cap]-\infty, b[& (b \in \mathbb{R}) & \text{si } a = -\infty \end{cases}$$

Pour une fonction, on doit toujours préciser en quel point a l'estimation a lieu

Les propriétés suivantes sont les mêmes que pour les suites avec $x \rightarrow a$ au lieu de $n \rightarrow +\infty$.

8. **fonctions négligeables.** Une fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est négligeable devant une fonction $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ au voisinage de a si, et seulement s'il existe une fonction $\varepsilon : D \rightarrow \mathbb{R}$ de limite nulle en a telle que $f(x) = g(x)\varepsilon(x)$ au voisinage de a (pour $x \in \mathcal{V}_a$)

$$f(x) = o_a(g(x)) \iff f(x) = g(x)\varepsilon(x) \text{ pour } x \in \mathcal{V}_a \text{ avec } \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$$

A la condition que la fonction f ne s'annule sur un voisinage de a , on a

$$f(x) = o_a(g(x)) \iff \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

9. **opérations.** Soient f, g, h, F, G des fonctions de $D \rightarrow \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} f(x) = o_a(g(x)) \text{ et } g(x) = o_a(h(x)) &\implies f(x) = o_a(h(x)) && \text{(transitivité)} \\ f(x) = o_a(h(x)) \text{ et } g(x) = o_a(h(x)) &\implies f(x) + g(x) = o_a(h(x)) && \text{(addition)} \\ f(x) = o_a(g(x)) &\iff \lambda f(x) = o_a(g(x)) && \text{(multiple, } \lambda \in \mathbb{R}^*) \\ &\iff f(x) = o_a(\lambda g(x)) && \text{(multiple, } \lambda \in \mathbb{R}^*) \\ f(x) = o_a(g(x)) \text{ et } F(x) = o_a(G(x)) &\implies f(x)g(x) = o_a(F(x)G(x)) && \text{(multiplication 1)} \\ f(x) = o_a(g(x)) &\implies f(x)h(x) = o_a(g(x)h(x)) && \text{(multiplication 2)} \end{aligned}$$

10. **fonction équivalente.** La fonction f est équivalente à la fonction g en a si, et seulement s'il existe une fonction α de limite 1 en a telle que $f(x) = g(x)\alpha(x)$ au voisinage de a

$$f(x) \underset{a}{\sim} g(x) \iff f(x) = g(x) + o_a(g(x)) \iff f(x) = g(x)\alpha(x) \text{ pour } x \in \mathcal{V}_a \text{ avec } \lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 1$$

A la condition que la suite $g(x)$ ne s'annule pas au voisinage de a , on a

$$f(x) \underset{a}{\sim} g(x) \iff \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

11. **signe.** si $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$ alors f et g ont le même signe au voisinage de a . De plus, si f ne s'annule pas au voisinage de a , alors, g ne s'annule pas non plus au voisinage de a .

12. **opérations.** Soient f, g, F, H et g des fonctions de D dans $\mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} f &\underset{a}{\sim} f && \text{(reflexivité)} \\ f &\underset{a}{\sim} g \iff g &\underset{a}{\sim} f && \text{(symétrie)} \\ f \underset{a}{\sim} g \text{ et } g &\underset{a}{\sim} h \implies f &\underset{a}{\sim} h && \text{(transitivité)} \\ f &\underset{a}{\sim} g \iff \lambda f &\underset{a}{\sim} \lambda g && \text{(multiple, } \lambda \in \mathbb{R}^*) \\ f \underset{a}{\sim} g \text{ et } F &\underset{a}{\sim} G \implies fF &\underset{a}{\sim} gG && \text{(compatibilité avec la multiplication)} \\ f &\underset{a}{\sim} g \implies f^n &\underset{a}{\sim} g^n && \text{(compatibilité avec les puissances, } n \in \mathbb{N}) \\ f &\underset{a}{\sim} g \implies f^n &\underset{a}{\sim} g^n && \text{(compatibilité avec les puissances, } n \in \mathbb{Z}^*, f(x) \neq 0 \text{ pour } x \in \mathcal{V}_a) \\ f \underset{a}{\sim} g \text{ et } F &\underset{a}{\sim} G \implies \frac{f}{F} &\underset{a}{\sim} \frac{g}{G} && \text{(compatibilité avec le quotient, } F(x) \neq 0 \text{ pour } x \in \mathcal{V}_a) \end{aligned}$$

13. **limites.** Soient $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $\ell \in \mathbb{R}^*$.

$$\begin{aligned} \lim_a f(x) = 0 &\iff f(x) = o_a(1) \\ \lim_a f(x) = \ell &\iff f(x) \underset{a}{\sim} \ell \end{aligned}$$

14. **Théorème de croissance comparée.** Pour $\alpha > 0$, on a

$$\ln(x) = o_\infty(x^\alpha) \quad x = o_\infty(e^{\alpha x}) \quad x^\alpha \ln(x) = o_{0+}(1) \quad xe^{\alpha x} = o_{-\infty}(1)$$

15. **Développements limités de référence.** Pour $n \geq 0$, on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-u} &= \sum_{k=0}^n u^k + o_0(u^n) \\ e^u &= \sum_{k=0}^n \frac{u^k}{k!} + o_0(u^n) \\ \ln(1+u) &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{u^k}{k} + o_0(u^n) \\ \cos(u) &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{u^{2k}}{(2k)!} + o_0(u^{2n}) \\ \sin(u) &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{u^{2k+1}}{(2k+1)!} + o_0(u^{2n+1}) \\ (1+u)^\alpha &= 1 + \sum_{k=1}^n \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1) \frac{u^k}{k!} + o_0(u^n) \\ \text{Arctan}(u) &= u + o_0(u) \end{aligned}$$

Remarque, la formule $(1+u)^\alpha = 1 + \alpha u + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} u^2 + o_0(u^2)$ suffit en général dans les exercices.

7 Séries numériques

Dans ce chapitre, u désigne une suite de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et S désigne la suite des sommes partielles de u définie par

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k \quad (n \geq 0)$$

Remarque : une suite v peut être considérée comme une série de terme général u défini par

$$u_0 = v_0 \text{ et } u_k = v_k - u_{v-1} \quad (k \geq 1)$$

7.1 séries quelconques

1. **Série.** On dit que la série de terme général $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ converge ou qu'elle est de nature convergente si, et seulement si, la suite des sommes partielles de u converge

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k \text{ converge} \iff S \text{ converge}$$

En cas de divergence de S , on dit que la série diverge ou qu'elle est de nature divergente.

2. **Somme de la série.** En cas de convergence de la suite S des sommes partielles, sa limite ℓ est appelée somme de la série et est notée

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k = \ell = \lim S = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n u_k$$

3. **Suite des restes.** La suite des restes R d'une série convergente de terme général u est définie par

$$R_n = \sum_{k=0}^{\infty} u_k - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \quad (n \geq 0)$$

En particulier, on a $\sum_{k=0}^{\infty} u_k = S_n + R_n$ pour $n \geq 0$

4. **Condition nécessaire de convergence.** Si $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est le terme général d'une série convergente, alors u converge vers 0.

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k \text{ converge} \implies \lim u = 0$$

5. **Relation de Chasles.** Pour $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $m \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k \text{ converge} \iff \sum_{k=m}^{\infty} u_k \text{ converge}$$

Et en cas de convergence, on a

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k = \sum_{k=0}^{m-1} u_k + \sum_{k=m}^{\infty} u_k$$

Remarque : la convergence d'une série ne dépend que de ce qui se passe au voisinage de l'infini.

6. **Linéarité.** Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et u et v les termes généraux de deux séries convergentes. Alors

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\lambda u_k + \mu v_k) \text{ converge et } \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda u_k + \mu v_k) = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} u_k + \mu \sum_{k=0}^{\infty} v_k$$

7. **Addition.** Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, alors $\sum (u_n + v_n)$ converge. Si $\sum u_n$ converge et si $\sum v_n$ diverge, alors $\sum (u_n + v_n)$ diverge.

8. **Convergence absolue.** On dit qu'une série de terme général u converge absolument si et seulement si la série de terme général $|u|$ converge

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k \text{ converge absolument} \iff \sum_{k=0}^{\infty} |u_k| \text{ converge}$$

9. **Convergence absolue et simple.** Si la série $\sum u_k$ converge absolument, alors la série $\sum u_k$ converge et de plus

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} u_k \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |u_k|$$

7.2 séries à termes positifs

Dans cette section u est à terme positifs ou nuls (mais les énoncés sont aussi valables pour les suites négatives ou nulles quitte à tout multiplier par -1) En pratique, il faut que u reste de signe constant à partir d'un certain rang.

10. **équivalent.** Soient u et v deux suites à termes positifs ou nuls. Si $u \sim v$, alors les séries de termes généraux u et v ont la même nature. Plus généralement, on a

$$\left. \begin{array}{l} u \sim v \\ u_n \text{ de signe constant pour } n \geq N \end{array} \right\} \implies \sum_{n=0}^{\infty} u_n \text{ a même nature que } \sum_{n=0}^{\infty} v_n$$

11. **inégalité.** Soient u et v deux suites telles que $0 \leq u_n \leq v_n$ pour $n \geq 0$.

Si $\sum u_k$ diverge, alors $\sum v_k$ diverge

Si $\sum v_k$ converge, alors $\sum u_k$ converge et on a

$$0 \leq \sum_{n=0}^{\infty} u_k \leq \sum_{n=0}^{\infty} v_k$$

12. **petit o.** Soient u et v deux suites à termes positifs ou nuls telles que $u_n = o(v_n)$.

Si $\sum u_k$ diverge, alors $\sum v_k$ diverge

Si $\sum v_k$ converge, alors $\sum u_k$ converge.

7.3 séries de référence

13. **Série de Riemann.** Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge} \iff \alpha > 1$$

14. **Série géométrique et dérivées.** Pour $x \in \mathbb{R}$, les séries $\sum x^n$, $\sum nx^{n-1}$ et $\sum n(n-1)x^{n-2}$ convergent si, et seulement si, $-1 < x < 1$. De plus, on a

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} x^n &= \frac{1}{1-x} \\ \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} &= \frac{1}{(1-x)^2} \quad -1 < x < 1 \\ \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} &= \frac{2}{(1-x)^3} \end{aligned}$$

15. **Exponentielle.** Pour $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, converge et

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \quad -1 < x < 1$$

8 Probabilités sur un espace quelconque

Dans tout ce chapitre, Ω désigne un ensemble quelconque.
Lorsque $p \in [0,1]$, on pose $q = 1 - p$.

8.1 Espace probabilisé

1. **Ensemble dénombrable.** Soit E un ensemble.

$$\begin{aligned} E \text{ est dénombrable} &\iff \text{il existe une surjection } f : \mathbb{N} \rightarrow E \\ &\iff \text{il existe une injection } f : E \rightarrow \mathbb{N} \end{aligned}$$

2. **Ensembles dénombrables de référence.** $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables alors que $\mathbb{R}$ ne l'est pas.
Un sous-ensemble d'un ensemble dénombrable est dénombrable (tout ensemble fini est dénombrable).
3. **Réunion et intersection.** I ensemble et $(A_i)_{i \in I}$ famille de parties de Ω indicée par I

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in \Omega : \exists i \in I, x \in A_i\} \quad \text{et} \quad \bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in \Omega : \forall i \in I, x \in A_i\}$$

4. **Tribu.** Une tribu d'événements de Ω est un ensemble $A \subset P(\Omega)$ de parties de Ω contenant Ω et stable par passage au complémentaire et par réunion dénombrable

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega \in A \\ \forall A \in A, \quad \bar{A} \in A \\ \forall (A_i)_{i \in I} \in A^I \text{ avec } I \text{ dénombrable,} \quad \bigcup_{i \in I} A_i \in A \end{array} \right.$$

On appelle aussi σ -algèbres les tribus et σ -additivité la stabilité par réunion dénombrable

5. **Propriétés.** Une tribu A contient l'ensemble vide $\emptyset$ et est stable par intersection dénombrable

$$\forall (A_i)_{i \in I} \in A^I \text{ avec } I \text{ dénombrable,} \quad \bigcap_{i \in I} A_i \in A$$

6. **Exemples.** $P(\Omega)$ est la tribu discrète et $\{\Omega, \emptyset\}$ est la tribu grossière de Ω .
7. **Espace probabilisable.** (Ω, A) est un espace probabilisable $\iff A$ est une tribu de Ω .
8. **Système complet.** Un système complet d'événements d'un espace probabilisable (Ω, A) est une famille dénombrable $(A_i)_{i \in I} \in A^I$ d'événements dont la réunion vaut Ω et incompatibles deux à deux

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \Omega \quad \text{et} \quad i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset$$

9. **Tribu engendrée.** La tribu T engendrée par un ensemble E de parties de Ω est la plus petite tribu (au sens de l'inclusion) de Ω contenant E .

$$T = \bigcap_{E \subset A \text{ tribu de } \Omega} A$$

10. **Tribu engendrée par un système complet d'événements.** La tribu T engendrée par un système complet d'événements $(A_i)_{i \in I}$ est la tribu définie par

$$T = \left\{ \bigcup_{j \in J} A_j : J \subset I \right\}$$

avec la convention que $\bigcup_{j \in \emptyset} A_j = \emptyset$

11. **Probabilité.** Une probabilité sur un espace probabilisable (Ω, A) est une application $P : A \rightarrow [0,1]$ vérifiant $P(\Omega) = 1$ et

12. **Espace Probabilisé.** (Ω, A, P) est un espace probabilisé si, et seulement si, (Ω, A) est un espace probabilisable dont P est une probabilité.

13. **Additivité.** Si $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont des événements mutuellement incompatibles alors

$$P\left(\bigcup_{1 \leq i \leq n} A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

14. **Complémentaire.** Si A est un événement, alors $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

15. **Réunion.** Si A et B sont des événements, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

16. **Événements.** Soit A un événement

$$\begin{aligned} A \text{ est presque sûr} &\iff P(A) = 1 \\ A \text{ est négligeable} &\iff P(A) = 0 \end{aligned}$$

Un événement presque sûr est aussi appelé événement quasi certain

17. **Théorème de la limite monotone.** Pour toute suite croissante (au sens de l'inclusion) d'événements $(A_n)_{n \geq 0}$, on a

$$P\left(\bigcup_{n \geq 0} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$$

Pour toute suite décroissante (au sens de l'inclusion) d'événements $(A_n)_{n \geq 0}$, on a

$$P\left(\bigcap_{n \geq 0} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$$

18. **Corrolaire.** Pour toute suite d'événements $(A_n)_{n \geq 0}$, on a

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{n \geq 0} A_n\right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{0 \leq i \leq n} A_i\right) \\ P\left(\bigcap_{n \geq 0} A_n\right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcap_{0 \leq i \leq n} A_i\right) \end{aligned}$$

19. **Indépendance mutuelle.** Des événements $(A_i)_{i \in I}$ sont mutuellement indépendants (avec I dénombrable) si, et seulement si

$$\forall J \subset I, \quad P\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} P(A_j)$$

8.2 Variable aléatoire réelle

20. **VAR.** Une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A})$ est une application $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A}$$

Autrement dit, les ensembles $[X \leq x]$ sont des événements pour $x \in \mathbb{R}$

Remarque : la loi d'une VAR X est la probabilité P_X définie sur $\mathbb{R}$ par

$$P_X(A) = P([X \in A]) \quad (A \text{ événement de } \mathbb{R}),$$

l'ensemble $\mathbb{R}$ étant muni de la tribu engendrée par les intervalles du type $]-\infty, x]$ pour $x \in \mathbb{R}$.

21. **fonction de répartition d'une VAR.** La fonction de répartition d'une VAR X est l'application $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ définie par

$$F_X(x) = P(X \leq x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

Remarque : la loi de X est complètement déterminée par la donnée de F_X

22. **Propriétés de F_X .** La fonction de répartition F_X d'une var X est croissante sur $\mathbb{R}$, continue à droite et vérifie

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = 1$$

8.3 Variable aléatoires réelles discrètes

23. **VAR discrète.** Une VAR $X : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{R}$ est discrète $\iff X(\Omega)$ est dénombrable.

Remarque : La loi d'une VAR discrète est complètement déterminée par la donnée des valeurs $P(X = x)$ pour $x \in X(\Omega)$.

24. **Tribu engendrée par une VAR discrète.** La tribu $\mathcal{A}_X$ des événements liés à X est la tribu engendrée par le système complet $([X = x])_{x \in X(\Omega)}$.

Cette tribu est appelée tribu engendrée par la VAR X et constitue l'information apportée par X .

Remarque : Si X est une VAR discrète et si $g : X(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ est une application, alors $Y = g(X)$ est une VAR discrète.

25. **Espérance.** X VAR discrète admet une espérance $\iff \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x)$ converge absolument.

Auquel cas, l'espérance de X est la somme de cette série

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x)$$

26. **Théorème de transfert.** Soit X une VAR discrète et $g : X(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$. La VAR discrète $g(X)$ admet une espérance si, et seulement si, la série $\sum_{x \in X(\Omega)} g(x)P(X = x)$ converge absolument. Dans ce cas, on a

$$E(g(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} g(x)P(X = x)$$

27. **Transformation affine.** Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$. Une VAR X admet une espérance si, et seulement si la VAR $aX + b$ admet une espérance. Dans ce cas, on a

$$E(aX + b) = aE(X) + b \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

28. **Moments.** Le moment d'ordre $r \in \mathbb{N}$ d'une VAR discrète X est, s'il existe, le nombre

$$m_r(X) = E(X^r)$$

Remarque si X admet un moment d'ordre $r \in \mathbb{N}^*$ alors X admet des moments d'ordre $k \in \llbracket 0, r \rrbracket$.

29. **Positivité.** Si X est une VAR discrète vérifiant $\underbrace{\forall \omega \in \Omega, X(\omega) \geq 0}_{X \geq 0}$ (p.s.), alors $E(X) \geq 0$.

30. **Croissance.** Si X et Y vérifient $\underbrace{\forall \omega \in \Omega, X(\omega) \leq Y(\omega)}_{X \leq Y}$ (p.s.), alors $E(X) \leq E(Y)$.

31. **Cas des VAR positives, d'espérance nulle.** Si X vérifie $\underbrace{\forall \omega \in \Omega, X(\omega) \geq 0}_{X \geq 0}$ (p.s.), alors

$$E(X) = 0 \iff P(X = 0) = 1 \iff X = 0 \text{ p.s.}$$

8.4 Variance et écart type

32. **Variance.** La variance d'une VAR discrète X est, lorsqu'elle existe, le nombre réel positif ou nul

$$V(X) = E\left((X - E(X))^2\right)$$

Remarque : Une VAR discrète admet un moment d'ordre 2 $\Longleftrightarrow$ elle admet une espérance et une variance.

33. **Formule de Koenig-Huygens.** Si une VAR discrète X admet un moment d'ordre 2, alors

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

34. **Variance nulle.** Pour une VAR discrète X , on a

$$V(X) = 0 \Longleftrightarrow X = E(X) \text{ p.s.}$$

35. **Transformation affine.** Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$. Une VAR discrète X admet une variance si, et seulement si la VAR discrète $aX + b$ admet une variance. Dans ce cas, on a

$$V(aX + b) = a^2 V(X) \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

La formule est trivialement vraie si $a = 0$

36. **Ecart type.** L'écart type d'une VAR discrète X admettant une variance est le nombre réel positif ou nul $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

37. **VAR centrée réduite.** Une VAR discrète X est centrée et réduite ssi son espérance est nulle et sa variance vaut 1 (son écart type vaut 1)

8.5 Lois usuelles

38. **loi certaine.** X suit la loi certaine ssi $X = c$ p.s. Dans ce cas, on a $E(X) = c$ et $V(X) = 0$.

39. **loi de Bernouilli de paramètre $p \in [0,1]$.**

$$X \hookrightarrow B(p) \Longleftrightarrow P(X = 1) = p \text{ et } P(X = 0) = q$$

Dans ce cas, on a $E(X) = p$ et $V(X) = pq$.

40. **loi binomiale de paramètre $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$.**

$$X \hookrightarrow B(n, p) \Longleftrightarrow P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad (0 \leq k \leq n)$$

Dans ce cas, on a $E(X) = np$ et $V(X) = npq$.

41. **loi uniforme.** X suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$ ssi $X \hookrightarrow U(\llbracket 1, n \rrbracket)$ ssi

$$P(X = k) = \frac{1}{n} \quad (1 \leq k \leq n)$$

Dans ce cas, on a $E(X) = \frac{n+1}{2}$ et $V(X) = \frac{n^2-1}{12}$.

42. **loi géométrique.** X suit la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$ ssi $X \hookrightarrow G(p)$ ssi

$$P(X = k) = q^{k-1} p \quad (1 \leq k)$$

Dans ce cas, on a $E(X) = \frac{1}{p}$ et $V(X) = \frac{q}{p^2}$.

43. **loi de poisson.** X suit la loi de poisson de paramètre $\lambda > 0$ ssi $X \hookrightarrow P(\lambda)$ ssi

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad (0 \leq k)$$

Dans ce cas, on a $E(X) = \lambda$ et $V(X) = \lambda$.