

## Eléments de correction du devoir maison 8

### Exercice 1: Edhec Ast1 2005

- Soit  $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ .  
 $\lambda u(P) + u(Q) = \lambda(P(a), P(b), P(c)) + (Q(a), Q(b), Q(c)) = (\lambda P(a) + Q(a), \lambda P(b) + Q(b), \lambda P(c) + Q(c)) = u(\lambda P + Q)$ .
- Soit  $P \in \mathbb{R}_2[X]$ .  $P \in \text{Ker}(u) \Leftrightarrow u(P) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow P(a) = 0 = P(b) = P(c) \Leftrightarrow a, b, c$  sont 3 racines distinctes de  $P \Leftrightarrow P = 0_{\mathbb{R}[X]}$  car  $\deg(P) \leq 2$ . Donc  $\text{Ker}(u) = \{0_{\mathbb{R}[X]}\}$  et  $u$  est injective.
- $I = \text{Im}(u) = \text{Vect}(u(1), u(X), u(X^2)) = \text{Vect}((1, 1, 1), (0, 1, 2), (0, 1, 4))$   
 $= \text{Vect}((1, 1, 1), (0, 1, 2), (0, 0, 1))$  car  $\frac{1}{2}((1, 0, 4) - (1, 0, 2)) = (0, 0, 1)$   
 $= \text{Vect}(1, 1, 1), (1, 0, 0), (0, 0, 1))$  car  $(1, 0, 2) - 2 * (0, 0, 1) = (1, 0, 0)$   
 $= \text{Vect}((0, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 0, 1)) = \mathbb{R}^3$  car  $(1, 1, 1) - (1, 0, 0) - (0, 0, 1) = (0, 1, 0)$  donc  $u$  est surjective.  
 OU via la compatibilité d'un système (ne pas aller jusqu'à la résolution!!), pour mq que  $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ , il existe bien  $P \in \mathbb{R}_2[X]$  tel que  $u(P) = (x, y, z)$  (définition de la surjection, que l'application soit linéaire ou non).  
 Soit  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ . Mq il existe  $P(X) = \alpha X^2 + \beta X + \gamma \in \mathbb{R}_2[X]$  tel que  

$$\begin{cases} P(0) = x \\ P(1) = y \\ P(2) = z \end{cases} \text{ . Or } \begin{cases} \gamma = x \\ \alpha + \beta + \gamma = y \\ 4\alpha + 2\beta + \gamma = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = y \\ -2\beta - 3\gamma = z - 4y \\ \gamma = x \end{cases} \text{ système compatible car de Cramer.}$$
- Ce sont les polynômes d'interpolation de Lagrange (cf DM 4).  
 a) Analyse : soit  $A$  un polynôme qui convient. Alors  $A$  est de degré au plus 2, et  $b$  etc sont deux racines distinctes, donc  $(X - b)(X - c)$  divise  $A$  et il existe  $Q \in \mathbb{R}[X]$  tel que  $A(X) = (X - b)(X - c)Q(X)$ . Or  $\deg(A) \leq 2 \Rightarrow \deg(Q) \leq 0$  d'où  $Q(X) = \alpha \in \mathbb{R}$  et  $A(X) = \alpha(X - b)(X - c)$ . Puis  $A(a) = 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{(a-b)(a-c)}$ .  
 Un unique candidat :  $A(X) = \frac{1}{(a-b)(a-c)}(X - b)(X - c)$ .  
 Synthèse immédiate : ce polynôme convient bien car  $A \in \mathbb{R}_2[X]$ ,  $A(a) = 1$  et  $A(b) = 0 = A(c)$ .  
 b) De même, on trouve  $B(X) = \frac{1}{(b-a)(b-c)}(X - a)(X - c)$  et  $C(X) = \frac{1}{(c-a)(c-b)}(X - a)(X - b)$ .
- a) Soit  $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3$  tels que  $\lambda A(X) + \mu B(X) + \nu C(X) = 0_{\mathbb{R}[X]}$ . Alors en  $X = a$  on obtient :  $\lambda A(a) + \mu B(a) + \nu C(a) = 0$  càd  $\lambda = 0$ . De même, en  $X = b$  puis  $X = c$ , on trouve  $\mu = 0 = \nu$ .  
 b) Même astuce : 3 inconnues, donc il faut 3 équations : on regarde en  $X = a$ , puis  $X = b$  et  $X = c$ . On trouve  $\alpha = P(a)$ ,  $\beta = P(b)$  et  $\gamma = P(c)$ . Finalement tout  $P \in \mathbb{R}_2[X]$  s'écrit  $P(X) = P(a)A(X) + P(b)B(X) + P(c)C(X)$ .

### Exercice 2: Ecricone E2002 et Eml E 99

- Les tirages se font avec remise donc sont mutuellement indépendants et à chaque tirage, la probabilité d'obtenir une boule blanche est  $1/2$ . Comme  $X$  comptabilise le nombre de boules blanches obtenues,  $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$ .  
 D'où  $E(X) = n/2$  et  $V(X) = n/4$ .
- On a  $Y(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$ . On introduit les événements  $N_i$  ( $B_i$ ) "obtenir une boule noire (blanche) au  $i^{\text{e}}$  lancer".  
 $(Y = 0) = N_1 \cap N_2 \cap \dots \cap N_n$  ; mutuelle indépendance des tirages,  $P(Y = 0) = P(N_1)P(N_2)\dots P(N_n) = (\frac{1}{2})^n$   
 $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $(Y = k) = N_1 \cap \dots \cap N_{k-1} \cap B_k$  et donc (indépendance des tirages)  $P(Y = k) = (\frac{1}{2})^{k-1} \frac{1}{2} = (\frac{1}{2})^k$ .
- $\sum_{k=0}^n P(Y = k) = P(Y = 0) + \sum_{k=1}^n P(Y = k) = P(Y = 0) + \sum_{k=1}^n (\frac{1}{2})^k = (\frac{1}{2})^n + \frac{1}{2} \frac{1 - (1/2)^n}{1 - 1/2} = (\frac{1}{2})^n + (1 - (\frac{1}{2})^n) = 1$ .
- $S = \sum_{k=1}^n kx^k = x \sum_{k=1}^n kx^{k-1} = x \left( \sum_{k=0}^n x^k \right)' = x \times \left( \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \right)' = x \times \frac{-(n+1)x^n(1-x) + 1-x^{n+1}}{(1-x)^2} = x \times \frac{-(n+1)x^n + 1 + nx^{n+1}}{(1-x)^2} = \frac{-(n+1)x^{n+1} + 1 + nx^{n+2}}{(1-x)^2}$  OU  $(1-x)^2 S = S - 2xS + x^2 S = \sum_{k=1}^n kx^k - 2 \sum_{k=1}^n kx^{k+1} + \sum_{k=1}^n kx^{k+2}$ , puis dans 2e somme  $j = k + 1$ , dans 3e somme,  $j = k + 2$ , et simplification
- $E(Y) = \sum_{k=0}^n kP(Y = k) = 0 + \sum_{k=1}^n kP(Y = k) = \sum_{k=1}^n k(\frac{1}{2})^k = \frac{n(1/2)^{n+2} - (n+1)(1/2)^{n+1} + 1/2}{1/4}$ .
- $X_1(\Omega) = \llbracket 0, 1 \rrbracket$ ,  $(X_1 = 1) = B_1$  d'où  $P(X_1 = 1) = \frac{1}{2}$ , et  $X_1 \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 0, 1 \rrbracket)$ .
- $X_2(\Omega) = \llbracket 0, 2 \rrbracket$  et  $(X_2 = 0) = B_1 \cap B_2$ ,  $(X_2 = 2) = (B_1 \cap N_2) \cup (N_1 \cap B_2)$  (réunion d'événements incompatibles) ... d'où  $P(X_2 = 0) = P(X_2 = 1) = P(X_2 = 2) = \frac{1}{3}$  et  $X_2 \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 0, 2 \rrbracket)$ .
- hérédité** : Supposons que  $X_{n-1} \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 0, n-1 \rrbracket)$  pour un certain  $n \geq 2$  donc :  $X_{n-1}(\Omega) = \llbracket 0, n-1 \rrbracket$  et  $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ ,  $P(X_{n-1} = k) = \frac{1}{n}$ . Montrons que  $X_n \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 0, n \rrbracket)$ . On a  $X_n(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$ , car on fait  $n$  tirages. De plus,  $(X_{n-1} = k)_{k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket}$  est un s.c.e. (car  $X_{n-1}(\Omega) = \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ ) donc d'après la formule des probabilités totales,  

$$P(X_n = 0) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X_{n-1} = k)P_{(X_{n-1}=k)}(X_n = 0) = P(X_{n-1} = 0)P_{(X_{n-1}=0)}(X_n = 0) + 0 = \frac{1}{n} \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$$
 car sachant  $X_{n-1} = 0$ , les  $n-1$  tirages ont donné une boule noire, donc l'urne contient (au moment du  $n^{\text{ie}}$  tirage) :  $1 + n - 1 = n$  boules noires et 1 boule blanche. Puis pour tout  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  

$$P(X_n = j) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X_{n-1} = k)P_{(X_{n-1}=k)}(X_n = j) = 0 + P(X_{n-1} = j-1)P_{(X_{n-1}=j-1)}(X_n = j) + P(X_{n-1} = j)P_{(X_{n-1}=j)}(X_n = j) + 0$$
 (un tirage de plus donc le nombre de boules blanches stagne ou augmente de 1) ;

finalement,  $P(X_n = j) = \frac{1}{n} \times \frac{1+j-1}{2+n-1} + \frac{1}{n} \frac{1+(n-1-j)}{2+n-1} = \frac{1+j-1+1+n-1-j}{n(n+1)} = \frac{n}{n(n+1)} = \frac{1}{n+1}$ .

OU via une description directe :  $\forall j \geq 1, (X_n = j) = [(X_{n-1} = j-1) \cap B_n] \cup [(X_{n-1} = j) \cap N_n]$  et

$(X_n = 0) = (X_{n-1} = 0) \cap N_n$  puis passage à la probabilité, en faisant le calcul comme ci-dessus (sachant la valeur prise par  $X_{n-1}$ , on connaît le nombre de boules blanches de l'urne et le nombre de boules total au moment du  $n^{ie}$  tirage ...)

Enfin, le calcul de l'espérance et de la variance se fait à la main. (attention ce n'est pas la loi du cours!!) :

$$E(X_n) = \frac{n}{2} \text{ et } V(X) = \frac{n^2+2n}{12} = \frac{(n+1)^2-1}{12}$$

### Exercice 3 : extrait d'Hec E maths 3 99

1. Comme il y a 3 boules dans l'urne,  $T_3(\Omega) = [2, 4]$ . On introduit les  $A_i$  (resp.  $B_i$  et  $C_i$ ) "on obtient la boule 1 (resp. 2 et 3) au  $i^{e}$  tirage". Alors  $(T_3 = 2) = (A_1 \cap A_2) \cup (B_1 \cap B_2) \cup (C_1 \cap C_2)$ , réunion de 3 événements 2 à 2 incompatibles. Comme les tirages se font avec remise,  $P(T_3 = 2) = \frac{1}{9} \times 3 = \frac{1}{3}$ ;  $(T_3 = 3) = [(A_1 \cap B_2 \cap \bar{C}_3) \cup (A_1 \cap C_2 \cap \bar{B}_3)] \cup \dots \cup [(C_1 \cap A_2 \cap \bar{B}_3) \cup (C_1 \cap B_2 \cap \bar{A}_3)]$  (la 3e boule doit être identique à la 1ere ou à la 2e) d'où  $P(T_3 = 3) = \frac{2}{27} \times 6 = \frac{4}{9}$ . Et  $P(T_3 = 4) = 1 - \frac{1}{3} - \frac{4}{9} = \frac{2}{9}$ .

OU introduire des événements du type :  $D_i$  "on obtient au  $i^{e}$  tirage une boule différente des  $i-1$  précédentes" (ce n'est pas un événement élémentaire, car un tel événement dépend de plusieurs tirages, mais la description et le calcul des probabilités reste simple!)

OU *Via dénombrement* : pour pouvoir dénombrer  $\Omega$ , il fallait considérer que l'on faisait dans tous les cas 4 tirages avec remise (sinon, selon les issues, on n'avait pas le même nombre de tirages). On pose donc  $\Omega = \{4\text{-listes}\}$ . Puis  $Card(T_3 = 2) = 3(\text{choix 1ere boule quelconque}) * 1(2e \text{ boule identique}) * 3 * 3(3e \text{ et } 4e \text{ boules quelconques, même pas tirées en pratique})$ . D'où  $P(T_3 = 2) = \frac{1}{3}$ . De même  $Card(T_3 = 3) = 3 * 2(2e \text{ boule différente de la première}) * 2(\text{soit la 1ere soit la 2e}) * 3(4e \text{ boule quelconque})$ . D'où  $P(T_3 = 3) = \frac{4}{9}$ .

On en déduit  $E(T_3) = \frac{2}{3} + \frac{6}{9} + \frac{16}{9} = \frac{28}{9} = 3 + \frac{1}{9}$ .  $E(T_3^2) = \frac{4}{3} + \frac{18}{9} + \frac{64}{9} = \frac{94}{9} = 10 + \frac{4}{9}$  et

$$V(T_3) = 10 + \frac{4}{9} - (3 + \frac{1}{9})^2 = 1 - \frac{2}{9} + \frac{1}{81} \geq 0.$$

2. (a) On peut avoir une même boule dès le 2e tirage, mais également attendre d'avoir eu une première fois toutes les boules avant d'en avoir une déjà tirée. D'où  $T_N(\Omega) = [2, N+1]$ .

- (b) Comme pour la première question, plusieurs rédactions possibles :

Rédaction 1 (suggérée par l'indication de l'énoncé, mais peut-être plus difficile à comprendre) : L'événement  $(T_N = 2)$  se réalise ssi les 2 premiers tirages donnent la même boule, que ce soit la boule 1, 2 ou ..., N. :  $(T_N = 2) = \{(i, i), i \in [1, N]\}$ . Il y a donc N issues, chacune de probabilité  $\frac{1}{N^2}$  (tirage d'une boule puis d'une 2e) d'où  $P(T_N = 2) = N \times \frac{1}{N^2} = \frac{1}{N}$ .

$(T_N = N+1)$  ssi on obtient une fois chacune des boules avant de finir par une des boules : il y a N choix pour cette dernière boule, puis également N! choix de permutation des N premières boules tirées. Il y a donc  $N \times N!$  issues. Chaque issue a pour probabilité  $\frac{1}{N^{N+1}}$  d'où  $P(T_N = N+1) = N \times N! \frac{1}{N^{N+1}} = \frac{N!}{N^N}$ .

Rédaction 2 : on convient que l'on fait systématiquement les  $N+1$  tirages. Alors  $\Omega = \{N+1 \text{-listes}\}$  et  $Card(\Omega) = N^{N+1}$ . Puis  $card(T_N = 2) = N(\text{choix 1ere boule}) * 1(\text{choix 2e boule identique}) * N^{N-1}(\text{les derniers tirages n'ayant pas de contraintes})$  d'où  $P(T_N = 2) = \frac{N^N}{N^{N+1}} = \frac{1}{N}$  et de même  $Card(T_N = N+1) = N!$  (permutation des N boules)  $* N$  (choix de la dernière boule, identique à l'une des précédentes) : d'où  $P(T_N = N+1) = \frac{N!N}{N^{N+1}} = \frac{N!}{N^N}$ .

Rédaction 3 : on garde les  $D_i$  :  $(T_N = 2) = D_1 \cap \bar{D}_2$  et  $(T_N = N+1) = D_1 \cap \dots \cap D_N \cap \bar{D}_{N+1} \dots$

- (c) Soit  $k \in [1, N]$ . L'événement  $(T_N > k)$  se réalise ssi les  $k$  premiers tirages ont donné des boules 2 à 2 distinctes càd que les  $k$  premiers tirages forment un  $k$ -arrangement des boules. Il y a donc  $A_N^k = \frac{N!}{(N-k)!}$  issues, chacune de probabilité  $\frac{1}{N^k}$ . D'où  $P(T_N > k) = \frac{N!}{(N-k)!N^k} = \frac{N(N-1)(N-2)\dots(N-k+1)}{N^k} = \frac{N}{N} \times \frac{N-1}{N} \times \frac{N-2}{N} \dots \times \frac{N-k+1}{N}$

$$= 1 \times (1 - \frac{1}{N})(1 - \frac{2}{N}) \dots (1 - \frac{k-1}{N}) = \prod_{i=0}^{k-1} (1 - \frac{i}{N}).$$

Ou via la rédaction 2 :  $Card(T_N > k) = A_n^k * N^{N+1-k}$ , et via la rédaction 3 :  $(T_N > k) = D_1 \cap \dots \cap D_k$ .

$$\text{Puis } \forall k \in [2, N+1], P(T_N = k) = P(T_N > k-1) - P(T_N > k) = \prod_{i=0}^{k-2} (1 - \frac{i}{N}) - \prod_{i=0}^{k-1} (1 - \frac{i}{N}) = \frac{k-1}{N} \prod_{i=0}^{k-2} (1 - \frac{i}{N})$$

- (d) Comme  $k$  est fixé,  $\frac{i}{N} \rightarrow 0$ , pour tout  $i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$  d'où par produit fini  $P(T_N > k) \rightarrow 1$ . Effectivement, quand le nombre de boules devient grand, il faut beaucoup de tirages pour tomber sur une même boule!

- (e)  $E(T_N) = \sum_{k=2}^{N+1} kP(T_N = k) = \sum_{k=2}^{N+1} k(P(T_N > k-1) - P(T_N > k)) = \sum_{k=2}^{N+1} kP(T_N > k-1) - \sum_{k=2}^{N+1} kP(T_N > k)$

$$= \sum_{j=1}^N (j+1)P(T_N > j) - \sum_{k=2}^{N+1} kP(T_N > k) = 2P(T_N > 1) + \sum_{k=2}^N P(T_N > k) - (N+1)P(T_N > N+1)$$

$$= 2 + \sum_{k=2}^N P(T_N > k) + 0 = \sum_{k=0}^N P(T_N > k) \text{ car } P(T_N > 1) = 1 = P(T_N > 0) \text{ vu les valeurs prises de } T_N.$$

On en déduit  $E(T_N) = 1 + \sum_{k=1}^N P(T_N > k) = \sum_{k=0}^N \frac{N!}{(N-k)!N^k}$  (formule encore vraie pour  $k=0$ )

$$= N! \sum_{k=0}^N \frac{1}{(N-k)!N^k} = N! \sum_{k=0}^N \frac{N^{n-k}}{(N-k)!N^N} = \frac{N!}{N^N} \sum_{k=0}^N \frac{N^{n-k}}{(N-k)!} = \frac{N!}{N^N} \sum_{j=0}^N \frac{N^j}{j!} \text{ (chgt de variable } j = N-k).$$