Devoir n°9

Mercredi 6 avril 2016

Problème 1 :

Partie I

1) Soit f la fonction définie sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ par : $\forall\, x \in]0, \frac{\pi}{2}]\quad f(x) = \dfrac{x}{\sin x}$ et $f(0) = 1$

a) Prouver que f est continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

b) Montrer que f est dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}]$.

c) Montrer que $f'(x) \underset{0^+}{\sim} \lambda\, x$ avec λ réel à préciser.

d) Montrer que $f \in C^1\big([0, \frac{\pi}{2}]\big)$

2) Soit g une application de classe C^1 sur $[0, 1]$. Soit $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall\, x \in [0, 1]\quad |g'(x)| \leq M$

On définit, pour tout $r > 0$, $\quad I(r) = \displaystyle\int_0^1 \sin(r\,t)\, g(t)dt$

a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que : $\forall\, r > 0$, $\quad |I(r)| \leq \dfrac{1}{r}\Big(|g(0)| + |g(1)| + M\Big)$

b) En déduire que $\displaystyle\lim_{r \to +\infty} I(r) = 0$

3) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(0) = 0$
Soit ϕ la fonction définie sur $[0, 1]$ par $\forall\, x \in]0, 1]\quad \phi(x) = \dfrac{P(x)}{\sin(\frac{\pi}{2}\,x)}$ et $\phi(0) = \dfrac{2}{\pi}\,P'(0)$

a) Justifier l'existence d'un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $P(x) = x\,Q(x)$
En dérivant cette égalité, montrer que $Q(0) = P'(0)$

b) Montrer que $\forall\, x \in [0, 1]$, $\quad \phi(x) = \mu\, Q(x)\, f\left(\frac{\pi}{2}\,x\right)$ avec μ réel à préciser.

c) A l'aide de I-2), justifier que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 \phi(t)\, \sin\Big((n + \frac{1}{2})\pi t\Big)\, dt = 0$

Partie II :

On pose $E = \mathbb{R}[X]$. On désigne par h l'application de E dans E qui à tout polynôme P de E associe le polynôme $Q = h(P)$ défini par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad Q(x) = \int_0^x (t - x)P(t)dt + \frac{x^2}{2}\int_0^1 P(t)dt$$

1) Montrer que h est une application linéaire.

2) Soit $P \in E$. Justifier que $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\quad Q(x) = \displaystyle\int_0^x t\,P(t)dt - x\int_0^x P(t)dt + \frac{x^2}{2}\int_0^1 P(t)dt$
puis calculer $Q'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

3) Déduire de ce qui précède que $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $Q''(x) = -P(x) + \delta$ avec δ réel à préciser sous forme d'intégrale.

4) Étude de $\mathrm{Ker}(h)$

a) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $R(x) = \alpha$. Calculer $h(R)$.

b) Soit $P \in \mathrm{Ker}(h)$. Montrer, à l'aide de II.2) que $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $P(x) = \displaystyle\int_0^1 P(t)dt$

c) Montrer que $\ker(h) = \mathbb{R}_0[X]$

5) Etude de $\mathrm{Im}(h)$
Soit F l'ensemble défini par $F = \{U \in \mathbb{R}[X] \text{ tel que } U(0) = U'(0) = U'(1) = 0\}$

a) Soit $U \in F$. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que $h\,(U'') = -U$.
En déduire que $U \in \mathrm{Im}(h)$.

b) Montrer que $\mathrm{Im}(h) = F$

6) On considère la suite de polynômes $(P_n)_n$ définie par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\,, \quad P_1(x) = \frac{x^2}{2} - x \quad \text{ et } \quad \forall\, n \geq 2\,, \quad P_n = h\,(P_{n-1})$$

a) A l'aide de ce qui précède, donner les valeurs de $P_n(0)$, $P_n'(0)$, $P_n'(1)$ pour $n \geq 2$ puis montrer que pour $n \geq 2$:

$$P_n''(x) = -P_{n-1}(x) + \int_0^1 P_{n-1}(t)dt \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

b) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ fixé, on pose $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = \displaystyle\int_0^1 P_n(t)\,\cos(k\,\pi\,t)dt$
A l'aide de la relation précédente et d'intégrations par parties, montrer que, pour $k \in \mathbb{N}^*$ fixé, on a $\forall n \geq 2$:

$$\int_0^1 P_n(t)\,\cos(k\,\pi\,t)dt = \frac{1}{(k\,\pi)^2} \int_0^1 P_{n-1}(t).\cos(k\,\pi\,t)dt$$

c) Prouver que la suite $(w_n)_n$ est géométrique de raison à préciser.
En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^1 P_n(t)dt\,\cos(k\,\pi\,t)dt = \left(\frac{1}{k\,\pi}\right)^{2n}$

Partie III :

1) On admet que $\forall\, N \in \mathbb{N}^*$ et $\forall\, x \in]0,\pi]$ on a :

$$2\,\cos(k\,x)\,\sin(\frac{x}{2}) = \sin\left[(k+\frac{1}{2})x\right] - \sin\left[(k-\frac{1}{2})x\right] \quad \forall\, k \in [\![1, N]\!]$$

A l'aide de cette formule, montrer que, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in]0,\pi]$ on a :

$$\sum_{k=1}^{N} \cos(k\,x) = \frac{\sin\left[(N+\frac{1}{2})\,x\right]}{2\,\sin(\frac{x}{2})} - \frac{1}{2}$$

2) Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Prouver que :

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^{2n}} = \pi^{2n}\,.\int_0^1 P_n(t)\,\left[\frac{\sin\left[(N+\frac{1}{2})\,\pi\,t\right]}{2.\sin(\frac{\pi\,t}{2})} - \frac{1}{2}\right] dt$$

3) Prouver enfin que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, la série $\sum \dfrac{1}{k^{2n}}$ converge et que :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{2n}} = \frac{-\pi^{2n}}{2} \int_0^1 P_n(t)dt$$

4) Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$

Problème 2 :

Partie I :

Dans $E = M_n(\mathbb{R})$, on définit une application f en posant :

$\forall\, M \in E$, $f(M) = M + tr(M).I_n$ où $tr(M) =$ somme des coefficients diagonaux de M

(on rappelle que l'application $tr\ : M \mapsto tr(M)$ est une forme linéaire et que $dim[\ker(tr)] = n^2 - 1$)

On pose $F = \ker[f - Id_E]$ et $G = \ker[f - (n+1)\, Id_E]$

1) Montrer que $f \in L(E)$.
2) Calculer $f(I_n)$. En déduire que $I_n \in G$
3) a) Montrer que $\ker f \subset Vect(I_n)$. En déduire que $\ker f = \{0_n\}$
   b) Montrer que f est un automorphisme de E.
4) a) Montrer que $dim(G) \geq 1$.
   b) Justifier que $dim(F) = n^2 - 1$.
   c) Montrer que $F \cap G = \{O_n\}$.
   d) A l'aide de ce qui précède, montrer que $dim(F) + \dim(G) = n^2$. En déduire que $dim(G) = 1$.

Partie II :

Dans $E = M_n(\mathbb{R})$, on définit une application φ en posant :

$\forall\, M \in E$, $\varphi(M) = M + tr(M)\, J$ avec J matrice fixée de E telle que $J \neq 0_n$

On admet que $\varphi \in L(E)$ et on pose $H = \ker(\varphi - Id_E)$

1) On suppose dans cette question seulement que $tr(J) = 0$
   a) Montrer que $\forall\, M \in E$, $\varphi \circ \varphi(M) = M + \lambda\, J$ avec λ réel à préciser en fonction de $tr(M)$
   b) En déduire que $2\varphi - \varphi \circ \varphi = Id_E$
   c) Montrer que φ est bijective et préciser φ^{-1} en fonction de φ et de Id_E

2) On suppose dans cette question seulement que $tr(J) = -1$
   a) Déterminer $\varphi \circ \varphi$ à l'aide de φ
   b) Déterminer $\ker \varphi$.
   c) Montrer que $H = Im\varphi$. En déduire que $H \bigoplus Vect(J) = E$

3) On suppose désormais que $tr(J) \notin \{0, -1\}$ et on pose $W = \ker[\varphi - \Big(1 + tr(J)\Big)\, Id_E]$.
   a) Pour tout $M \in E$, on pose $N = tr(M)\, J - tr(J)\, M$. Montrer que $N \in H$
   b) Montrer que $H \bigoplus W = E$