Problème 1

I1a) f est continue sur $]0,\pi/2]$ comme quotient de fonction continue avec le dénominateur qui ne s'annule pas. De plus, $f(x) \underset{0}{\sim} \frac{x}{x} = 1$. On en déduit que $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1 = f(0)$. Ainsi f est continue en 0. Donc $\boxed{f \in C^0([0,\pi/2])}$

I1b) f est dérivable sur $]0,\pi/2]$ comme quotient de fonctions dérivables avec le dénominateur qui ne s'annule pas. De plus,
$\boxed{\forall x \in]0,\pi/2],\ f'(x) = \frac{\sin x - x\cos x}{(\sin x)^2}}$

I1c) On a $\sin x - x\cos x = (x - x^3/6) - x(1 - x^2/2) + o(x^3) = (1/2 - 1/6)x^3 + o(x^3) \underset{0}{\sim} \frac{1}{3}x^3$

On en déduit $f'(x) \underset{0^+}{\sim} \frac{1/3\, x^3}{x^2} = 1/3\, x \Rightarrow \boxed{\lambda = 1/3 \quad \text{et } f'(x) \underset{0^+}{\sim} \frac{x}{3}}$

I1d) Nous avons vu que f est dérivable sur $]0,\pi/2]$. De plus,
$\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x - \sin x}{x \sin x}$; Or $x - \sin x = x^3/6 + o(x^3) \underset{0}{\sim} x^3/6$.

On en déduit $\frac{x - \sin x}{x \sin x} \underset{0^+}{\sim} \frac{x^3/6}{x^2} = \frac{x}{6} \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$. Ainsi $\boxed{f \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } f'(0) = 0}$

On en déduit que $f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{\sin x - x\cos x}{(\sin x)^2} & \text{si } x \in]0,\pi/2] \end{cases}$

Ainsi, f' est continue sur $]0,\pi/2]$ comme quotient de fonctions continues et comme $f'(x) \underset{0^+}{\sim} \frac{x}{3}$, on en déduit $\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = 0 = f'(0)$. Donc f' est continue en 0.

Ainsi f' est continue sur $[0,\pi/2]$. Donc $\boxed{f \in C^1([0,\pi/2])}$

Rq : On peut aussi utiliser le théorème de prolongement puisque $f \in C^0([0,\pi/2])$ (cf I1a) et f de classe C^1 sur $]0,\pi/2]$ (cf I1b). De plus I1c $\Rightarrow \lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = 0$

on en déduit que $f \in C^1([0,\pi/2])$

I2a) $\forall r > 0$, $I(r) = \int_0^1 \sin(rt) g(t)\, dt = \left[-\frac{\cos(rt)}{r} g(t) \right]_0^1 + \frac{1}{r} \int_0^1 \cos(rt)\, g'(t)\, dt$

D'où $I(r) = \frac{1}{r} \left\{ g(0) - g(1)\cos(r) + \int_0^1 \cos(rt) g'(t)\, dt \right\}$

$\Rightarrow \forall r > 0$, $|I(r)| \leq 1/r \left[|g(0)| + |g(1)|\,|\cos(r)| + \left| \int_0^1 \cos(rt) . g'(t)\, dt \right| \right]$

$\leq 1/r \left[|g(0)| + |g(1)| + \int_0^1 |\cos(rt)| . |g'(t)|\, dt \right]$

$\Rightarrow \forall r > 0$, $|I(r)| \leq 1/r \left[|g(0)| + |g(1)| + \int_0^1 M\, dt \right]$ car $\forall t \in [0,1]$, $|\cos(rt)|\,|g'(t)| \leq M$

On a bien $\boxed{\forall r > 0,\ |I(r)| \leq (1/r)\left[|g(0)| + |g(1)| + M \right]}$

I2b) Comme $\lim\limits_{r \to +\infty} (1/r)\left[|g(0)| + |g(1)| + M \right] = 0$, par le théorème d'encadrement,

on en déduit que : $\boxed{\lim\limits_{r \to +\infty} I(r) = 0}$

I3a) $P(0) = 0$. On en déduit que 0 est racine de P. Donc, il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = x Q(x)}$ Comme P et Q sont des polynômes, ce sont des fonctions dérivables. On a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $P'(x) = Q(x) + x Q'(x) \Rightarrow \boxed{Q(0) = P'(0)}$

I3b) On a $\forall x \in]0,1]$, $\phi(x) = \frac{x Q(x)}{\sin(\pi/2\, x)} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi/2\, x}{\sin(\pi/2\, x)} . Q(x) = \boxed{\frac{2}{\pi} f(\pi/2\, x) Q(x) = \phi(x)}$

De plus, $\Phi(0) = \frac{2}{\pi} P'(0)$ et $\frac{2}{\pi} Q(0) f(\frac{\pi}{2} . 0) = \frac{2}{\pi} P'(0) . f(0) = \frac{2}{\pi} P'(0) = \phi(0)$

On en déduit que $\boxed{\forall x \in [0,1],\ \phi(x) = \frac{2}{\pi} Q(x) f(\frac{\pi}{2} x)}$

I3c) $x \mapsto Q(x)$ et $x \mapsto f(\pi/2\, x)$ étant de classe C^1 sur $[0,1]$ d'après I1d et parce que $\forall x \in [0,1]$, $\pi/2\, x \in [0,\pi/2]$, on en déduit que ϕ est de classe C^1 sur $[0,1]$ (en utilisant l'expression de I3b)

Grâce à I2b), on en déduit $\lim\limits_{r \to +\infty} \int_0^1 \phi(t) \sin(rt)\, dt = 0$. Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} (n + 1/2)\pi = +\infty$

On en déduit : $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\int_0^1 \phi(t) \sin((n + 1/2)\pi t)\, dt \right) = 0}$

II1) Soit $(P_1, P_2) \in \mathbb{R}[X]$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $h(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)(x) = \int_0^x (t - x)(\lambda_1 P_1(t) + \lambda_2 P_2(t))\, dt + x^2/2 \left(\int_0^1 \lambda_1 P_1(t) + \lambda_2 P_2(t)\, dt \right)$

D'où $h(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)(x) = \lambda_1 \int_0^x (t - x) P_1(t)\, dt + \lambda_2 \int_0^x (t - x) P_2(t)\, dt + \lambda_1 \frac{x^2}{2} \int_0^1 P_1(t)\, dt + \lambda_2 \frac{x^2}{2} \int_0^1 P_2(t)\, dt$

$= \lambda_1 \left\{ \int_0^x (t - x) P_1(t)\, dt + \frac{x^2}{2} \int_0^1 P_1(t)\, dt \right\} + \lambda_2 \left\{ \int_0^x (t - x) P_2(t)\, dt + \frac{x^2}{2} \int_0^1 P_2(t)\, dt \right\}$

On en déduit : $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)(x) = \lambda_1 h(P_1)(x) + \lambda_2 h(P_2)(x)$.

D'où $h(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) = \lambda_1 h(P_1) + \lambda_2 h(P_2)$. Donc $\boxed{h \text{ est une application linéaire}}$

II2) Soit $P \in E$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $h(P)(x) = \int_0^x t P(t)\, dt - x \int_0^x P(t)\, dt + x^2/2 \int_0^1 P(t)\, dt$

Désignons par H (resp G) une primitive de $t \mapsto t P(t)$ (resp $t \mapsto P(t)$)

$\forall x \in \mathbb{R}$, $Q(x) = H(x) - H(0) - x(G(x) - G(0)) + x^2/2 \int_0^1 P(t)\, dt$

On en déduit que Q est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $Q'(x) = H'(x) - (G(x) - G(0)) - x\, G'(x) + x \int_0^1 P(t)\, dt$

$= x P(x) - \left(\int_0^x P(t)\, dt \right) - x P(x) + x \int_0^1 P(t)\, dt$

$= -(G(x) - G(0)) + x \int_0^1 P(t)\, dt \quad (*)$

D'où $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ Q'(x) = -\int_0^x P(t)\, dt + x \int_0^1 P(t)\, dt}$

II3) En reprenant la formule $(*)$ du II3) on en déduit que

$\forall x \in \mathbb{R}$, $Q''(x) = -G'(x) + \int_0^1 P(t)\, dt \Rightarrow Q''(x) = -P(x) + \int_0^1 P(t)\, dt$

On en déduit que $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ Q''(x) = -P(x) + \delta \text{ où } \delta = \int_0^1 P(t)\, dt.}$

II4) $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(R)(x) = \int_0^x (t - x)\alpha\, dt + \frac{x^2}{2} \int_0^1 \alpha\, dt = \alpha \left[\frac{(t - x)^2}{2} \right]_0^x + \frac{\alpha x^2}{2} = 0 \Rightarrow \boxed{h(R) = 0}$

II 4b) Soit $P \in \ker(h)$. On en déduit que $h(P) = 0$. En reprenant les notations du début du §, on a $Q(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$. Donc $Q''(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$.
En appliquant II 3), on en déduit que $-P(x) + \int_0^1 P(t)\,dt = 0$; on a donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = \int_0^1 P(t)\,dt.}$

II 4c) D'après ce qui a été vu en II 4a), on a $\mathbb{R}_0[X]$ = Polynômes constants $\subset \ker(h)$
Grâce à II 4b, on en déduit que si $P \in \ker(h)$, alors $P \in \mathbb{R}_0[X]$; on peut donc dire que $\ker(h) \subset \mathbb{R}_0[X]$. On peut en conclure que $\boxed{\ker(h) = \mathbb{R}_0[X]}$

II 5a). Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$h(U'')(x) = \int_0^x (t-x)\,U''(t)\,dt + \frac{x^2}{2}\int_0^1 U''(t)\,dt$$
$$= \underbrace{\left[(t-x)\,U'(t)\right]_0^x}_{0} - \int_0^x U'(t)\,dt + \frac{x^2}{2}\left[U'(t)\right]_0^1$$
$$= \quad - \left[U(t)\right]_0^x + \frac{x^2}{2} \times 0 \qquad (\text{car } U \in F \text{ donc } U'(0) = U'(1) = 0)$$

On en déduit $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(U'')(x) = -U(x)$ (car $U \in F$, donc $U(0) = 0$)

Ainsi : $\boxed{h(U'') = -U}$

- On vient de voir que $\forall U \in F$, $U = -h(U'') = h(-U'')$ puisque h est linéaire or $U \in \mathbb{R}[X] = E$. On en déduit que $-U'' \in E$ (propriétés des polynômes)
Ainsi on peut dire que $\boxed{U \in \mathrm{Im}(h)}$

II 5b). La question précédente assure que $F \subset \mathrm{Im}(h)$
- Réciproquement, si $R \in \mathrm{Im}(h)$, alors $\exists P \in E$ tel que $R = h(P)$.
On a donc : $\forall x \in \mathbb{R}$, $R(x) = \int_0^x (t-x)\,P(t)\,dt + (x^2/2)\int_0^1 P(t)\,dt \Rightarrow R(0) = 0$
Grâce à II 3), $\forall x \in \mathbb{R}$, $R'(x) = -\int_0^x P(t)\,dt + x\int_0^1 P(t)\,dt$; On a bien $R'(0) = 0$
et $R'(1) = -\int_0^1 P(t)\,dt + \int_0^1 P(t)\,dt = 0$. On en déduit que $R \in F$. D'où $\mathrm{Im}(h) \subset F$
On peut donc dire que $\boxed{\mathrm{Im}(h) = F}$

II 6a) $\forall n \geq 2$ $P_n = h(P_{n-1})$ donc $P_n \in \mathrm{Im}(h) = F$ (d'après II 5b)

Ainsi $\boxed{P_n(0) = P'_n(0) = P'_n(1) = 0 \quad \forall n \geq 2}$

et en utilisant II 3) avec $P_n = h(P_{n-1}) = Q$ on a :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad P''_n(x) = -P_{n-1}(x) + \int_0^1 P_{n-1}(t)\,dt}$$

II 6b) soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $n \geq 2$ on a par intégration par parties :

$$w_n = \int_0^1 P_n(t)\,\cos(k\pi t)\,dt = \underbrace{\left[P_n(t) \cdot \frac{\sin(k\pi t)}{k\pi}\right]_0^1}_{= P_n(1)\frac{\sin(k\pi)}{k\pi} - P_n(0)\frac{\sin 0}{k\pi} = 0 - 0 = 0} - \int_0^1 P'_n(t)\,\frac{\sin(k\pi t)}{k\pi}\,dt$$

D'où $w_n = -\frac{1}{k\pi}\int_0^1 P'_n(t)\,\sin k\pi t\,dt = \frac{1}{k\pi}\left\{\left[\frac{-\cos k\pi t\, P'_n(t)}{k\pi}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{\cos k\pi t}{k\pi} P''_n(t)\,dt\right\}$

Comme $P'_n(0) = P'_n(1) = 0$, on a $w_n = -\frac{1}{(k\pi)^2}\int_0^1 \cos(k\pi t)\,P''_n(t)\,dt$

Or $P''_n(x) = -P_{n-1}(x) + \delta$ où δ est une constante (égale à $\int_0^1 P_{n-1}(t)\,dt$).

D'où $w_n = -\frac{1}{(k\pi)^2}\left\{-\int_0^1 \cos(k\pi t)\,P_{n-1}(t)\,dt + \delta\int_0^1 \cos k\pi t\,dt\right\}$

Or $\int_0^1 \cos(k\pi t)\,dt = \left[\frac{\sin(k\pi t)}{k\pi}\right]_0^1 = 0$ car $\sin(k\pi) = \sin(0) = 0$

On en déduit $\boxed{\forall n \geq 2,\ \int_0^1 P_n(t)\cos(k\pi t)\,dt = \frac{1}{(k\pi)^2}\int_0^1 P_{n-1}(t)\cos(k\pi t)\,dt}$

II 6c) i) Avec les notations introduites, le résultat de II 6b) devient :
$\forall n \geq 2$, $w_n = \frac{1}{(k\pi)^2} w_{n-1}$. On en déduit que $\boxed{(w_n) \text{ est une suite géométrique de raison } q = \frac{1}{(k\pi)^2}}$

Ainsi $\boxed{\exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tq } \forall n \in \mathbb{N}^* \quad w_n = \lambda\left(\frac{1}{(k\pi)^2}\right)^n}$

En particulier $w_1 = \lambda \cdot \frac{1}{(k\pi)^2}$ donc $\lambda = (k\pi)^2 \cdot w_1$

$$\text{Or } w_1 = \int_0^1 P_1(t)\cos k\pi t\,dt = \int_0^1 \left(\frac{t^2}{2} - t\right)\cos(k\pi)t\,dt$$
$$= \left[\left(\frac{t^2}{2} - t\right)\frac{\sin(k\pi t)}{k\pi}\right]_0^1 - \frac{1}{k\pi}\int_0^1 (t-1)\sin(k\pi t)\,dt$$

On a donc $w_1 = -\frac{1}{k\pi}\int_0^1 (t-1)\sin(k\pi t)\,dt$

$$= -\frac{1}{k\pi}\left\{\left[(t-1)\frac{(-\cos k\pi t)}{k\pi}\right]_0^1 + \frac{1}{k\pi}\int_0^1 \frac{\cos k\pi t}{k\pi}\,dt\right\}$$
$$= +\frac{1}{(k\pi)^2} + \frac{1}{(k\pi)^2}\left[\frac{\sin(k\pi t)}{k\pi}\right]_0^1 \Rightarrow w_1 = \frac{1}{(k\pi)^2}$$

On a de plus $\boxed{w_1 = \frac{\lambda}{(k\pi)^2}} \Rightarrow \frac{1}{(k\pi)^2} = \frac{\lambda}{(k\pi)^2} \Rightarrow \boxed{\lambda = 1.}$

On en déduit que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ w_n = \int_0^1 P_n(t)\cos(k\pi t)\,dt = \frac{1}{(k\pi)^{2n}}}$

Ainsi $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \int_0^1 P_n(t)\cos(k\pi t)\,dt = \frac{1}{(k\pi)^{2n}}}$

III 1) En sommant les égalités admises pour k allant de 1 à N on a :

$$\sum_{k=1}^{N} 2\cos(kx)\,\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_{k=1}^{N} \sin\left(k+\tfrac{1}{2}\right)x - \sin\left(k-\tfrac{1}{2}\right)x$$

cad $\sum_{1\le k\le N} 2\cos(kx)\sin(x/2) = \sum_{1\le k\le N} \sin((k+1/2)x) - \sum_{1\le k\le N} \sin((k-1/2)x)$

D'où $2\sin(x/2)\sum_{1\le k\le N}\cos(kx) = \sum_{1\le k\le N}\sin((k+1/2)x) - \sum_{0\le j\le N-1}\sin((j+1/2)x)$ ($k=j+1$ ds la seconde somme)

Par telescopage, il vient :

$$2\sin(x/2)\sum_{1\le k\le N}\cos(kx) = \sin((N+1/2)x) - \sin(x/2)$$

On a bien : $\forall N\in\mathbb{N}, \forall x\in]0,\pi]$, $\boxed{\sum_{k=1}^{N}\cos(kx) = \frac{\sin((N+1/2)x)}{2\sin(x/2)} - \frac{1}{2}}$

III2) On a vu que $\forall m\in\mathbb{N}^*$, $\forall k\in\mathbb{N}^*$ $\frac{1}{(k\pi)^{2n}} = \int_0^1 P_n(t)\cos(k\pi t)\,dt$

On en déduit : $\forall N\in\mathbb{N}^*$

$$\sum_{1\le k\le N}\frac{1}{(k\pi)^{2n}} = \sum_{1\le k\le N}\int_0^1 P_n(t)\cos(k\pi t)\,dt = \int_0^1 P_n(t)\sum_{k=1}^{N}\cos(k\pi t)\,dt$$

Or, $\sum_{k=1}^{N}\cos(k\pi t) = \frac{\sin((N+1/2)\pi t)}{2\sin(\pi t/2)} - 1/2$ $\forall t\in]0,1]$ car $\pi t\in]0,\pi]$.

Les fonctions précédentes étant continues par morceaux. (celle de gauche est continue sur $[0,\pi]$, celle de droite se prolonge de manière continue sur $[0,\pi]$ car $\frac{\sin((N+1/2)\pi t)}{2\sin(\pi t/2)} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{(N+1/2)\pi t}{2\frac{\pi t}{2}} = (N+1/2)$) on en déduit :

$$\int_0^1 P_n(t)\sum_{k=1}^{N}\cos(k\pi t)\,dt = \int_0^1 P_n(t)\left(\frac{\sin((N+1/2)t\pi)}{2\sin(\pi t/2)} - 1/2\right)dt$$

On a donc : $\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{(k\pi)^{2n}} = \int_0^1 P_n(t)\left(\frac{\sin((N+1/2)\pi t)}{2\sin(\pi t/2)} - 1/2\right)dt$

On en déduit : $\frac{1}{\pi^{2n}}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k^{2n}} = \int_0^1 P_n(t)\left(\frac{\sin((N+1/2)\pi t)}{2\sin(\pi t/2)} - 1/2\right)dt$

D'où : $\boxed{\forall N\in\mathbb{N}^*\ \sum_{1\le k\le N}\frac{1}{k^{2n}} = \pi^{2n}\int_0^1 P_n(t)\left(\frac{\sin((N+1/2)\pi t)}{2\sin(\pi t/2)} - 1/2\right)dt}$

III3) D'après III2) : $\forall N\in\mathbb{N}^*$,

$$\sum_{1\le k\le N} 1/k^{2n} = \pi^{2n}\left\{\int_0^1 P_n(t)\frac{\sin((N+1/2)\pi t)}{2\sin(\pi t/2)}\,dt - \frac{1}{2}\int_0^1 P_n(t)\,dt\right\}$$

Or $\int_0^1 P_n(t)\frac{\sin((N+1/2)\pi t)}{2\sin(\pi t/2)}\,dt = \int_0^1 \frac{P_n(t)}{2\sin(\pi t/2)}\cdot\sin((N+1/2)t\pi)\,dt$

Mais, $P_n(0)=0$ pour $n\geq 1$ car $P_1(0)=0$ et $P_n(0)=0$ pour $n\geq 2$ (cf II 6 a)

On peut alors appliquer I 3c) qui disait $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1\frac{P(t)}{\sin(\pi t/2)}\sin((n+1/2)\pi t)\,dt = 0$ lorsque $P\in\mathbb{R}[X]$ avec $P(0)=0$

On en deduit : $\lim_{N\to+\infty}\int_0^1\frac{P_n(t)}{\sin(\pi t/2)}\sin((N+1/2)\pi t)\,dt = 0$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$

On en déduit : $\lim_{N\to+\infty}\left(\sum_{1\le k\le N}1/k^{2n}\right) = -\frac{\pi^{2n}}{2}\left(\int_0^1 P_n(t)\,dt\right)$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$

Ceci prouve que la serie $\sum 1/k^{2n}$ converge et $\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^{2n}} = -\frac{\pi^{2n}}{2}\int_0^1 P_n(t)\,dt}$

III4) • D'après III3), $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} = -\frac{\pi^2}{2}\int_0^1 P_1(t)\,dt$ $(n=1)$

Or $\int_0^1 P_1(t)\,dt = \int_0^1\left(\frac{t^2}{2}-t\right)dt = \left[\frac{t^3}{6}-t^2/2\right]_0^1 = \frac{1}{6}-\frac{1}{2} = -1/3 \Rightarrow \boxed{\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}}$

<u>Annexe : pour $k=2$</u>

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^4} = -\frac{\pi^4}{2}\int_0^1 P_2(t)\,dt$$

or $\forall x\in\mathbb{R}$ $P_2(x) = \int_0^x (t-x)\left(\frac{t^2}{2}-t\right)dt + \frac{x^2}{2}\int_0^1\left(\frac{t^2}{2}-t\right)dt = -\frac{x^4}{24}+\frac{x^3}{6}-\frac{x^2}{6}$

donc $\int_0^1 P_2(t)\,dt = \int_0^1 -\frac{1}{24}t^4+\frac{t^3}{6}-\frac{t^2}{6}\,dt = \left[-\frac{1}{120}t^5+\frac{1}{24}t^3-\frac{1}{18}t^2\right] = -\frac{1}{60}+\frac{1}{24}-\frac{1}{18}$

$$= \frac{-3+15-20}{360} = -\frac{8}{360} = -\frac{2}{90} \Rightarrow \boxed{\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}}$$

<u>Problème 2</u>

I1) • $\forall M\in E$, $\mathrm{tr}(M)\in\mathbb{R} \Rightarrow M+\mathrm{tr}(M).I_n\in E$. Donc <u>$\forall M\in E, f(M)\in E$</u>

• $\forall (M_1,M_2)\in E^2$, $\forall(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2$, on a :

$f(\lambda_1 M_1+\lambda_2 M_2) = \lambda_1 M_1+\lambda_2 M_2+\mathrm{tr}(\lambda_1 M_1+\lambda_2 M_2)I_n$

$= \lambda_1 M_1+\lambda_2 M_2+(\lambda_1\mathrm{tr}(M_1)+\lambda_2\mathrm{tr}(M_2))I_n$ (car tr est linéaire)

$= \lambda_1(M_1+\mathrm{tr}(M_1).I_n)+\lambda_2(M_2+\mathrm{tr}(M_2).I_n)$

$= \lambda_1 f(M_1)+\lambda_2 f(M_2)$

On en déduit que <u>f est linéaire</u>. Ainsi $\boxed{f\in L(E)}$

I2) On remarque que $\mathrm{tr}(I_n) = \mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix}1&&\\&\ddots&\\&&1\end{pmatrix}\right) = n$. Donc $f(I_n) = I_n+n\,I_n$.

D'où $\boxed{f(I_n) = (n+1).I_n}$

On remarque que $(f-(n+1)Id_E)(I_n) = f(I_n)-(n+1)I_n = 0$.

On peut donc en conclure que $\boxed{I_n\in G}$

I3a). Soit $M\in\ker(f)$. On a donc $f(M)=0_n \Rightarrow M+\mathrm{tr}(M).I_n = 0 \Rightarrow M = -\mathrm{tr}(M).I_n$.

On en deduit que $M\in\mathrm{Vect}(I_n)$. Ainsi, $\boxed{\ker(f)\subset\mathrm{Vect}(I_n)}$

• De la question précédente, on tire que si $M\in\ker f$, alors $M=\alpha.I_n$.

Or $f(M)=0 \Rightarrow f(\alpha I_n)=0 \Rightarrow \alpha f(I_n)=0 \Rightarrow \alpha(n+1)I_n=0 \Rightarrow \alpha=0$.

ainsi si $M\in\ker f$, alors $M=0.I_n=0_n$. Donc $\ker f\subset\{0_n\}$. Comme $\{0_n\}\subset\ker f$

On en déduit que $\boxed{\ker f=\{0_n\}}$

3b) d'après 3a) $\mathrm{Ker} f = \{0\}$ donc f injective
De plus, d'après le th. du rang, $\dim E = \dim \mathrm{Ker} f + \dim \mathrm{Im} f$ donc $\dim \mathrm{Im} f = \dim E - 0 = \dim E$
Ainsi $\begin{cases} \mathrm{Im} f \subset E \\ \dim \mathrm{Im} f = \dim E \end{cases}$ donc $\mathrm{Im} f = E$ et f surjective. Finalement, $\boxed{f \text{ bijective càd } f \text{ automorphisme de } E}$

4a) D'après 2) $f(I_n) = (n+1) I_n$ donc $f(I_n) - (n+1) I_n = (f - (n+1) Id_E)(I_n) = 0_n$
Ainsi $I_n \in \mathrm{Ker}(f - (n+1) Id_E) = G$ d'où $\mathrm{Vect}(I_n) \subset G$ alors $\dim \mathrm{Vect}(I_n) = \boxed{1 \leq \dim G}$

4b) $M \in F$ ssi $f(M) = M$ ssi $M + tr(M) I_n = M$ ssi $tr(M) = 0$
D'où $F = \{M \in E \text{ tq } tr(M) = 0\} = \mathrm{Ker}(tr)$ alors $\boxed{\dim F = \dim \mathrm{Ker}\, tr = n^2 - 1}$

4c) soit $M \in F \cap G$ alors $M \in F$ càd $(f - Id)(M) = 0_n$ donc $f(M) = M$ (1)
et $M \in G$ càd $(f - (n+1) Id)(M) = 0_n$ donc $f(M) = (n+1) M$ (2)
En faisant (2) − (1) : $0_n = n \cdot M$ donc $M = 0_n$ ainsi $\boxed{F \cap G = \{0_n\}}$

4d) d'après 4c) F et G sont en somme directe d'où $\dim(F+G) = \dim(F \oplus G) = \dim F + \dim G$
or $\dim G \geq 1$ et $\dim F = n^2 - 1$ d'où $\dim F + \dim G \geq n^2$
de plus $F + G \subset E$ alors $\dim(F+G) = \dim(F \oplus G) = \dim F + \dim G \leq \dim E = n^2$
Alors $\boxed{\dim F + \dim G = n^2}$ et $\boxed{\dim G = n^2 - \dim F = 1}$

Partie II

1a) $\varphi(J) = J + tr(J).J = J + 0.J$ (car $tr J = 0$) donc $\varphi(J) = J$
$\forall M \in E \quad \varphi \circ \varphi(M) = \varphi[\varphi(M)] = \varphi[M + tr M\, J] \underset{\varphi \text{ linéaire}}{=} \underbrace{\varphi(M)}_{= M + trMJ} + tr(M) \underbrace{\varphi(J)}_{= J} = [M + tr M\, J] + tr M\, J$

d'où $\boxed{\forall M \in E \quad \varphi \circ \varphi(M) = M + 2 tr(M) J \quad \text{et } \lambda = 2 tr M}$

1b) $\forall M \in E \quad 2\varphi(M) - \varphi \circ \varphi(M) = 2(M + tr M\, J) - [M + 2 tr M\, J] = M + 0 J = M = Id_E(M)$
Donc $\forall M \in E \quad (2\varphi - \varphi\circ\varphi)(M) = Id_E(M)$ d'où $\boxed{2\varphi - \varphi \circ \varphi = Id_E}$

1c) en écrivant $\varphi = \varphi \circ Id_E$ on a $2 \varphi \circ Id_E - \varphi \circ \varphi = Id_E$
càd $\varphi \circ [2 Id_E - \varphi] = Id_E$ càd $\varphi \circ g = Id_E$ (avec $g = 2 Id_E - \varphi$)
Ainsi $\boxed{\varphi \text{ est bijective et } \varphi^{-1} = 2 Id_E - \varphi}$

2a) $\forall M \in E \quad \varphi\circ\varphi(M) = \varphi[\varphi(M)] = \varphi(M + tr M\, J) \underset{\varphi \text{ linéaire}}{=} \varphi(M) + tr M . \underbrace{\varphi(J)}_{= 0_n}$
car $\varphi(J) = J + tr J . J = (1 + \underbrace{tr J}_{= -1}) J = 0 J = 0_n$

Donc $\boxed{\forall M \in E \quad \varphi\circ\varphi(M) = \varphi(M) \quad \text{càd } \varphi \circ \varphi = \varphi \text{ et } \varphi \text{ est un projecteur}}$

2b) on a déjà vu que $\varphi(J) = 0_n$ donc $J \in \mathrm{Ker}\varphi$ et $\mathrm{Vect} J \subset \mathrm{Ker}\varphi$
réciproquement, si $M \in \mathrm{Ker}\varphi$ alors $\varphi(M) = 0_n$ donc $M + tr(M) J = 0_n$ donc $M = - tr M . J$
ainsi $M \in \mathrm{Vect}(J)$ d'où $\mathrm{Ker}\varphi \subset \mathrm{Vect} J$
Finalement, par double inclusion $\boxed{\mathrm{Ker}\varphi = \mathrm{Vect} J}$

2c) • soit $M \in H = \mathrm{Ker}(\varphi - Id)$ alors $(\varphi - Id)(M) = 0$ donc $\varphi(M) = M$ d'où $M \in \mathrm{Im}\varphi$ et $H \subset \mathrm{Im}\varphi$
• réciproquement, soit $M \in \mathrm{Im}\varphi$ alors $\exists N \in E$ tq $\varphi(N) = M$
on a $(\varphi - Id)(M) = \varphi(M) - M$ avec $\varphi(M) = \varphi\circ\varphi(N) \underset{\varphi \text{ projecteur}}{=} \varphi(N) = M$
donc $(\varphi - Id)(M) = M - M = 0$ d'où $M \in \mathrm{Ker}(\varphi - Id) = H$ ainsi $\mathrm{Im}\varphi \subset H$
Alors, par double inclusion, $\boxed{H = \mathrm{Im}\varphi}$ or φ projecteur donc $\mathrm{Ker}\varphi \oplus \mathrm{Im}\varphi = E$
ici $\mathrm{Ker}\varphi = \mathrm{Vect} J$ et $H = \mathrm{Im}\varphi$ ainsi $\boxed{\mathrm{Vect} J \oplus H = E}$

3a) $(\varphi - Id)(N) = \varphi(N) - N$ et $\varphi(N) = N - tr(N) J = N - 0 J = N$ avec $tr(N) = \underbrace{tr(M) tr J - tr J\, tr M}_{= 0}$
d'où $(\varphi - Id)(N) = N - N = 0_n$ donc $\boxed{N \in \mathrm{Ker}(\varphi - Id) = H}$

3b) • Montrons que $H \cap W = \{0_n\}$
soit $M \in H \cap W$ alors $M \in H$ donc $\varphi(M) = M$ (1)
et $M \in W$ donc $\varphi(M) = (1 + tr J) . M$ (2)
alors en faisant (2) − (1), $0_n = tr J . M$ donc $M = 0_n$ (car $tr J \neq 0$)
d'où $\boxed{H \cap W = \{0_n\}}$

• soit $M \in E$ alors on cherche $M_H \in H$, $M_W \in W$ tq $M = M_H + M_W$
on sait que $N = tr(M) J - tr J . M \in H$ or $M = \frac{1}{tr J}[tr M\, J - N]$ (car $tr J \neq 0$)
il reste à montrer que $\frac{tr M}{tr J} J \in W$ càd que $J \in W = \mathrm{Ker}(\varphi - (1 + tr J) Id_E)$
on a $\varphi(J) = J + tr(J) J = (1 + tr J) J$ donc $(\varphi - (1 + tr J))(J) = 0_n$ ainsi $J \in W$
Alors $\frac{tr M}{tr J} . J \in W$ (car W sev) et $\frac{1}{tr J} N \in H$ (car $N \in H$ et H sev)
Finalement $\forall M \in E$, $\exists M_H = \frac{1}{tr J} N \in H$, $\exists M_W = \frac{tr M}{tr J} J \in W$ tq $M = M_H + M_W$ donc $M \in H \oplus W$

Ccl : • $H \cap W = \{0\}$
• toute matrice $M \in E$ peut s'écrire comme somme d'une matrice de H et d'une de W $\Rightarrow \boxed{E = H \oplus W}$