Devoir sur feuille 5 : le 02/05/2015

Questions :

1. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que $Kerf \subset Kerf^2$ et $Imf^2 \subset Imf$. (Rappel $f^2 = f \circ f$).
2. `Escp E 87` : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $E = \{B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \,/\, AB = 0\}$.
   Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et en déterminer la dimension.
3. `Escp E 2005` : Soit l'application $f : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$, définie pour tout $P \in \mathbb{R}_3[X]$ par $f(P)(X) = (1+X^2)P''(X) - 2XP'(X)$.
   (a) Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
   (b) Déterminer une base de l'image de f.
   (c) En déduire la dimension du noyau de f puis une base du noyau de f.

Exercice 1: `inspiré d'esclsca S 91`

A. On pose pour tout $n \geq 0$ et pour tout $x \in [0,1[$, $f_n(x) = \dfrac{x^n}{\sqrt{1-x}}$.

1. Dresser le tableau de variations complet de f_0.
2. Etudier la convexité de f_0 sur $[0,1[$.
3. Tracer la courbe de f_0, ainsi que la tangente à la courbe en 0, et les éventuelles asymptotes.
4. Montrer que f_0 réalise une bijection de $[0,1[$ sur un intervalle à préciser, et déterminer f_0^{-1}.
5. Pour tout $n \geq 1$, dresser le tableau de variation complet de f_n sur $[0,1[$.
   Montrer alors que f_n réalise une bijection de $[0,1[$ sur un intervalle à préciser.

B. On pose pour tout $n \geq 0$, $I_n = \int_0^1 f_n(x)dx$.

1. (a) Montrer que l'intégrale I_0 converge et calculer sa valeur.
   (b) Montrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale I_n converge.
2. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone, puis qu'elle converge.
3. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} = 2(n+1)(I_n - I_{n+1})$.
   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+3} I_n$ puis calculer I_1.
   (c) Montrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = 2\dfrac{[2^n n!]^2}{(2n+1)!}$
   (d) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(I_n) = -\sum\limits_{k=1}^{n} \ln(1+\frac{1}{2k}) + \ln 2$.
   (e) En étudiant la série de terme général $\ln(1+\frac{1}{2k})$, montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

Exercice 2: `Edhec S 94 adapté`

Soit $E = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \,/\, \forall n \in \mathbb{N},\, u_{n+3} = \frac{3}{2}u_{n+2} - \frac{3}{4}u_{n+1} + \frac{1}{8}u_n\}$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites réelles $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
2. Poser pour tout $n \in \mathbb{N}$ $a_n = \frac{1}{2^n}$, $b_n = \frac{n}{2^n}$, $c_n = \frac{n^2}{2^n}$. Montrer que a, b, c sont trois suites de E.
3. Soit $\begin{array}{rl} \varphi : E & \to \mathbb{R}^3 \\ u & \mapsto (u_0, u_1, u_2) \end{array}$. Montrer que φ est un isomorphisme.
4. En déduire la dimension de E.
5. Montrer alors que la famille (a, b, c) est une base de E.
6. Montrer que la série de terme général a_n (resp. b_n, c_n), converge.
   En déduire que pour tout $u \in E$, la série de terme général u_n converge.
7. On introduit l'application $s : E \to \mathbb{R}$, définie pour tout $u \in E$ par $s(u) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$
   (a) Calculer $s(a)$, $s(b)$, $s(c)$.
   (b) Montrer que s est une forme linéaire de E dans $\mathbb{R}$.
   (c) Déterminer le rang de s. Quelle est la dimension de $Ker(s)$?

Exercice 3: `extrait d'ecricome S 2006`

On effectue une succession infinie de lancers indépendants d'une pièce donnant Pile avec la probabilité $p \in]0,1[$ et Face avec la probabilité $q = 1-p$.
On dit que la première série est de longueur $n \geqslant 1$ si les n premiers lancers ont amené le même côté de la pièce et le $(n+1)$-ième l'autre côté.La deuxième série commence au lancer suivant la fin de la première série et se termine (si elle se termine) au lancer précédant un changement de côté. De même pour les séries suivantes.
Ω désigne l'ensemble des successions infinies de Pile ou Face et pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on note P_i l'événement ≪ le i-ième lancer amène Pile ≫ et F_i l'événement contraire.

Partie I : Etude des longueurs de séries.

1. On note L_1 la variable aléatoire égale à la longueur de la première série.
   (a) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $P(L_1 = n) = p^n q + q^n p$ puis vérifier que $\sum_{n=1}^{+\infty} P(L_1 = n) = 1$
   (b) Montrer que L_1 admet une espérance et la déterminer.
   (c) Montrer que L_1 admet une variance et la calculer.
2. On note L_2 la variable aléatoire égale à la longueur de la deuxième série.
   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et $k \in \mathbb{N}^*$, exprimer l'événement $(L_1 = n) \cap (L_2 = k)$ à l'aide des événements P_i et F_i pour i variant de 1 à $n+k+1$ puis calculer $P((L_1 = n) \cap (L_2 = k))$.
   (b) A l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que pour $k \in \mathbb{N}^*$, $P(L_2 = k) = p^2 q^{k-1} + q^2 p^{k-1}$

Partie II : Etude du nombre de séries lors des n premiers lancers.

On considère dans toute cette partie que la pièce est **équilibrée, c'est-à-dire que** $p = \frac{1}{2}$.
On note N_n le nombre de séries **lors des n premiers lancers** :
- La première série est de longueur $k < n$ si les k premiers lancers ont amené le même côté de la pièce et le $(k+1)$-ième l'autre côté et de longueur n si les n premiers lancers ont amené le même côté de la pièce;
- La dernière série se termine nécessairement au n-ième lancer.

Par exemple, si les 11 premiers lancers successifs donnent : FFPPPPFFPPP…(F désignant Face et P Pile), on a pour une telle succession $\omega \in \Omega$, $N_1(\omega) = N_2(\omega) = 1$; $N_3(\omega) = \cdots = N_6(\omega) = 2$; $N_7(\omega) = N_8(\omega) = 3$; $N_9(\omega) = \cdots = N_{11}(\omega) = 4$; les données ne permettant évidemment pas de déterminer $N_{12}(\omega)$.
On admettra que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, N_n est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. Déterminer les lois de N_1, N_2 et N_3 et donner leurs espérances.
2. Dans le cas général où $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer $N_n(\Omega)$ puis calculer les valeurs de $P(N_n = 1)$ et $P(N_n = n)$.
3. a) Rappeler ce que signifie la syntaxe scilab `floor(2*rand())`.
   b) Recopier et compléter le script scilab suivant pour que, n étant un entier entré par l'utilisateur, il simule les n premiers lancers de pièce (dont les résultats seront stockés dans la liste `x`), et détermine les valeurs de $N_1, N_2, \ldots, N_n$ (qui seront stockées dans la liste `N`).

```
n=input('entrer un entier n non nul') ; x=zeros(1,n); N=zeros(1,n)
x(1)=.......... ; N(1)=..........
for i=..........
x(i)=..........
if .......... then, N(i)=.........., else N(i)= .......... ,end
end
```

4. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour $s \in [0,1]$, $G_n(s) = \sum_{k=1}^{n} P(N_n = k) s^k$ (fonction génératrice de N_n).
   (a) Que vaut $G_n(1)$?
   (b) Que représente $G_n'(1)$?
   (c) Montrer que pour tout $n \geqslant 2$ et tout $k \in [\![1, n]\!]$
   on a $P((N_n = k) \cap P_n) = \frac{1}{2} P((N_{n-1} = k) \cap P_{n-1}) + \frac{1}{2} P((N_{n-1} = k-1) \cap F_{n-1})$
   On admet de même : $P((N_n = k) \cap F_n) = \frac{1}{2} P((N_{n-1} = k) \cap F_{n-1}) + \frac{1}{2} P((N_{n-1} = k-1) \cap P_{n-1})$
   (d) Montrer alors que $P(N_n = k) = \frac{1}{2} P(N_{n-1} = k) + \frac{1}{2} P(N_{n-1} = k-1)$
   (e) Soit $n \geqslant 2$. Montrer que $G_n(s) = \frac{1+s}{2} G_{n-1}(s)$
   (f) Calculer $G_1(s)$ et en déduire que $G_n(s) = \left(\frac{1+s}{2}\right)^{n-1} s$
   (g) Déterminer le nombre moyen de séries dans les n premiers lancers.