Eléments de correction du DS 5

Questions

1. Cf feuille 22 exercice 20
2. Soit $B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Alors $AB = \begin{pmatrix} a+2d & b+2d & c+2f \\ 2a+d & 2b+e & 2c+f \\ d & e & f \end{pmatrix}$ d'où $AB = 0 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow a = b = c = d = e = f = 0$ et finalement, $E = Vect(E_{31}, E_{32}, E_{33})$. En particulier E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
De plus la famille (E_{31}, E_{32}, E_{33}), génératrice de E, est libre, car sous-famille de la base canonique qui est une famille libre. Donc c'est une base de E et $dim(E) = 3$.
3. (a) Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$. Alors $deg(P) \leq 3$ donc $deg(XP') = deg(X) + deg(P') \leq 1 + 2 = 3$ et $deg((1+X^2)P'') = deg(1+X^2) + deg(P'') \leq 2 + 1 = 3$. D'où par somme, $deg(f(P)) \leq 3$ et $f(P) \in \mathbb{R}_3[X]$.
Donc f est ainsi bien définie de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}_3[X]$.
Linéarité : soit $P, Q \in \mathbb{R}_3[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $f(\lambda P + Q)(X) = (1+X^2)(\lambda P + Q)''(X) - 2X(\lambda P + Q)'(X)$
$= \lambda(1+X^2)P''(X) + (1+X^2)Q''(X) - \lambda 2XP'(X) - XQ'(X) = \lambda f(P)(X) + f(Q)(X)$.
(b) $f(1)(X) = 0$, $f(X)(X) = -2X$, $f(X^2)(X) = -2X^2 + 2$ et $f(X^3)(X) = 6X$, d'où
$Im(f) = Vect(-2X, -2X^2+2) = Vect(X, -X^2+1)$. De plus, la famille $(X, -X^2+1)$ est libre (degrés différents), donc c'est une base de l'image et $rg(f) = 2$.
(c) D'après le théorème du rang, comme $dim(\mathbb{R}_3[X]) = 4)$, on trouve $dim(Kerf) = 2$.
Soit réaliser que $1 \in Kerf$ et que $f(X^3) = -3f(X) \Rightarrow f(X^3 + 3X) = 0 \Rightarrow X^3 + 3X \in Kerf$. Montrer alors que la famille de $Kerf$ $(1, X^3 + 3X)$ est libre, et de bon cardinal pour conclure que c'est une base.
Soit déterminer le noyau en posant $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$: alors $f(P)(X) = -bX^2 + (6a - 2c)X + 3b$, et $f(P) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ c = 3a \end{cases}$. D'où $Kerf = \{P(X) = aX^3 + 3aX + d, (a, d) \in \mathbb{R}^2\} = Vect(X^3 + X, 1)$ famille génératrice de $Kerf$ de bon cardinal donc base de $Kerf$.

Exercice 1:

A.

1. $\forall x \in [0, 1[$, $f_0(x) = (1-x)^{-1/2}$; f_0 dérivable sur $[0, 1[$, et $\forall x \in [0, 1[$, $f_0'(x) = \frac{1}{2}(1-x)^{-3/2} > 0$.
2. f_0 C^2 sur $[0, 1[$ et $f_0''(x) = 3/4(1-x)^{-5/2} \geq 0$ donc f_0 convexe sur $[0, 1[$.
3. Asymptote verticale d'équation $x = 1$; convexité ; tangente en 0 de pente $f_0'(0) = 1/2$.
4. D'après 1. (bien vérifier que vous avez justifié $f_0' > 0$ et non $f_0' \geq 0$), f_0 est strictement croissante et continue sur $[0, 1[$ donc réalise une bijection de $[0, 1[$ sur $[1, +\infty[$.
Soit $y \in [1, +\infty[$ et $x \in [0, 1[$, alors $f(x) = y \Leftrightarrow \frac{1}{1-x} = y^2$ (équivalence car tout est positif) $\Leftrightarrow 1 - x = \frac{1}{y^2} \Leftrightarrow x = 1 - \frac{1}{y^2}$ d'où $\forall y \in [1, +\infty[$, $f_0^{-1}(y) = 1 - \frac{1}{y^2}$.
5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. f_n dérivable sur $[0, 1[$ et $f_n'(x) = nx^{n-1}(1-x)^{-1/2} + \frac{1}{2}x^n(1-x)^{-3/2} > 0$ pour $x \in]0, 1[$ (attention en 0, la dérivée s'annule dès que $n \geq 2$, mais ce n'est qu'en un point donc n'empêche pas la stricte monotonie). Donc f_n continue et strictement croissante sur [0,1[réalise une bijection de $[0, 1[$ sur $[0, +\infty[$.

B.

1. a) $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ est continue sur $[0, 1[$ et on en connaît une primitive. Soit $X \in]0, 1[$. Alors $\int_0^X \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx = -[2\sqrt{1-x}]_0^X$ $= 2 - 2\sqrt{1-X} \underset{X \to 1}{\longrightarrow} 2 \in \mathbb{R}$. Donc l'intégrale I_0 converge, et $I_0 = 2$ (remarquer que pour la convergence, il suffisait de justifier que c'était une intégrale de Riemann généralisée en 1 qui converge car $\alpha = 1/2 < 1$.)
b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\forall x \in [0, 1[$, $0 \leq \frac{x^n}{\sqrt{1-x}} \leq \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ et l'intégrale I_0 converge, donc d'après le critère par comparaison l'intégrale I_n converge. Ou vérifier que $\frac{x^n}{\sqrt{1-x}} \underset{x \to 1}{\sim} \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ et utiliser le critère par équivalence.
2. Par linéarité (toutes les intégrales convergent), $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{\sqrt{1-x}} dx$ et $\forall x \in [0, 1[$, $\frac{x^n(x-1)}{\sqrt{1-x}} \leq 0$ d'où par positivité de l'intégrale, $I_{n+1} - I_n \leq 0$ et la suite (I_n) est décroissante.
Comme elle est de plus minorée par 0 (car $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x}} dx \geq 0$), elle converge.
3. (a) IPP : posons $X \in]0, 1[$, et soit $u = x^{n+1}$, $u' = (n+1)x^n$, $v' = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$, $v = -2\sqrt{1-x}$, u, v C^1 sur $[0, 1[$. Alors $\int_0^X \frac{x^{n+1}}{\sqrt{1-x}} dx = [-2x^{n+1}\sqrt{1-x}]_0^X + 2(n+1)\int_0^X x^n\sqrt{1-x}dx = -2X^{n+1}\sqrt{1-X} + 2(n+1)\int_0^X x^n\sqrt{1-x}dx$ $\underset{X \to 1}{\longrightarrow} 0 + 2(n+1)(I_n - I_{n+1})$ car $I_n - I_{n+1} = \int_0^1 x^n \frac{(1-x)}{\sqrt{1-x}} dx = \int_0^1 x^n(\sqrt{1-x})dx$.
D'où $I_{n+1} = \lim_{X \to 1} \int_0^X \frac{x^{n+1}}{\sqrt{1-x}} dx = 2(n+1)(I_n - I_{n+1})$
(b) On en déduit $I_{n+1} = 2(n+1)I_n - 2(n+1)I_{n+1}$ càd $(2n+3)I_{n+1} = (2n+2)I_n$ d'où le résultat.
Puis en $n = 0$, $I_1 = \frac{2}{3}I_0 = \frac{4}{3}$
(c) Par récurrence : $n = 0$: $2\frac{[2^0 0!]^2}{1!} = 2 = I_0$.
Supposons que pour un certain n, $I_n = 2\frac{[2^n n!]^2}{(2n+1)!}$ alors $I_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+3}I_n = 2\frac{2(n+1)}{2n+3}\frac{2n+2}{2n+2}\frac{[2^n n!]^2}{(2n+1)!}$ (même astuce que dans le DM intégrales de Wallis) $= 2\frac{[2(n+1)]^2[2^n n!]^2}{(2n+3)(2n+2)(2n+1)!} = 2\frac{[2^{n+1}(n+1)!]^2}{(2n+3)!}$. Conclure.

(d) Par récurrence : pour $n = 1$: $-\sum_{k=1}^{1} \ln(1+\frac{1}{2k^2}) + \ln 2 = -\ln(3/2) + \ln 2 = \ln(4/3) = \ln(I_1)$.
Supposons que pour un certain n, $\ln(I_n) = -\sum_{k=1}^{n} \ln(1+\frac{1}{2k}) + \ln 2$. Alors $\ln(I_{n+1}) = \ln(\frac{2n+2}{2n+3}) + \ln(I_n)$
$= -\ln(\frac{2n+3}{2n+2}) + \ln(I_n) = -\ln(1+\frac{1}{2n+2}) + \ln(I_n) = -\ln(1+\frac{1}{2(n+1)}) - \sum_{k=1}^{n} \ln(1+\frac{1}{2k}) + \ln 2 = -\sum_{k=1}^{n+1} \ln(1+\frac{1}{2k}) + \ln 2$.
Conclure

(e) On a $0 \leq \ln(1+\frac{1}{2k}) \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\frac{1}{k}$ et la série harmonique diverge, donc d'après le critère par équivalence la série de terme général $\ln(1+\frac{1}{2k})$ diverge, et comme elle est à termes positifs, $\sum_{k=1}^{n} \ln(1+\frac{1}{2k}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} \ln(I_n) = -\infty$ d'où $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

Exercice 2:

1. $E \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
Soit v la suite nulle : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = 0$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+3} = 0$ et $\frac{3}{2}v_{n+2} - \frac{3}{4}v_{n+1} + \frac{1}{8}v_n = 0 - 0 + 0 = 0$ donc $v \in E$ et $E \neq \varnothing$.
Soit $u, v \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrons que $\lambda u + v \in E$. Or $\forall n \in \mathbb{N}$,
$\lambda u_{n+3} + v_{n+3} = \lambda(\frac{3}{2}u_{n+2} - \frac{3}{4}u_{n+1} + \frac{1}{8}u_n) + (\frac{3}{2}v_{n+2} - \frac{3}{4}v_{n+1} + \frac{1}{8}v_n)$
$= \frac{3}{2}(\lambda u_{n+2} + v_{n+2}) - \frac{3}{4}(\lambda u_{n+1} + v_{n+1}) + \frac{1}{8}(\lambda u_n + v_n)$. D'où $\lambda u + v \in E$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{3}{2}a_{n+2} - \frac{3}{4}a_{n+1} + \frac{1}{8}a_n = \frac{3}{2}\frac{1}{2^{n+2}} - \frac{3}{4}\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{8}\frac{1}{2^n} = 3(\frac{1}{2^{n+3}}) - 3(\frac{1}{2^{n+3}}) + \frac{1}{2^{n+3}} = \frac{1}{2^{n+3}} = a_{n+3}$.
De même, $\frac{3}{2}b_{n+2} - \frac{3}{4}b_{n+1} + \frac{1}{8}b_n = \frac{3}{2}\frac{n+2}{2^{n+2}} - \frac{3}{4}\frac{n+1}{2^{n+1}} + \frac{1}{8}\frac{n}{2^n} = 3(n+2)(\frac{1}{2^{n+3}}) - 3(n+1)(\frac{1}{2^{n+3}}) + n\frac{1}{2^{n+3}}$
$= \frac{1}{2^{n+3}}[3(n+2) - 3(n+1) + n] = \frac{1}{2^{n+3}}(n+3) = b_{n+3}$....
3. Linéarité : soit $u, v \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors
$\varphi(\lambda u + v) = (\lambda u_0 + v_0, \lambda u_1 + v_1, \lambda u_2 + v_2) = \lambda(u_0, u_1, u_2) + (v_0, v_1, v_2) = \lambda\varphi(u) + \varphi(v)$.
Bijectivité : question très délicate !
Injectivité : on sait que la suite nulle est dans le noyau de φ, montrons que c'est la seule. Soit $u \in Ker\varphi$. Alors $u \in E$ et $\varphi(u) = 0$ càd $u_0 = 0 = u_1 = u_2$. Il reste à montrer par récurrence (triple) que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 0$.
Initialisation : $u_0 = 0 = u_1 = u_2$.
Hérédité : supposons que pour un certain n, $u_n = 0 = u_{n+1} = u_{n+2}$ et montrons que $u_{n+3} = 0$.
Or $u \in E$, donc $u_{n+3} = \frac{3}{2}u_{n+2} - \frac{3}{4}u_{n+1} + \frac{1}{8}u_n = 0 - 0 + 0 = 0$ (par H.R.). Conclure.
Surjectivité : soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Il faut montrer que la suite définie par $\begin{cases} u_0 = a, u_1 = b, u_2 = c \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = \frac{3}{2}u_{n+2} - \frac{3}{4}u_{n+1} + \frac{1}{8}u_n \end{cases}$
est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ (récurrence triple à faire). C'est alors un antécédent de (a, b, c) par φ.
4. Comme φ est un isomorphisme, $dim(E) = dim(\mathbb{R}^3) = 3$.
5. Comme la famille proposée est dans E et de bon cardinal, il suffit de montrer qu'elle est libre : soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_1 a_n + \lambda_2 b_n + \lambda_3 c_n = 0$. Alors en particulier, pour $n = 0, 1, 2$, on obtient le système
$\begin{cases} \lambda_1 & = 0 \\ \lambda_1\frac{1}{2} + \lambda_2\frac{1}{2} + \lambda_3\frac{1}{2} & = 0 \\ \lambda_1\frac{1}{4} + \lambda_2\frac{1}{2} + \lambda_3 & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_3 = \lambda_2 = 0.$
6. $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = (\frac{1}{2})^n$ et $|\frac{1}{2}| < 1$, donc la série géométrique de raison $1/2$ converge.
$\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n = \frac{1}{2}[n(\frac{1}{2})^{n-1}]$, donc par linéarité la série de terme général b_n converge, car la série géométrique dérivée de raison $1/2$ converge.
$\forall n \in \mathbb{N}$, $c_n = (\frac{1}{2})^2[n(n-1)(\frac{1}{2})^{n-2}] + b_n$ donc la série de terme général c_n converge, comme combinaison linéaire de séries convergentes.
De plus par 5., pour tout $u \in E$, il existe un unique triplet $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda_1 a_n + \lambda_2 b_n + \lambda_3 c_n$.
Donc la série de terme général u_n converge, comme CL de séries convergentes.
7. a) $s(a) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\frac{1}{2})^n = \frac{1}{1-1/2} = 2$, $s(b) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} n(\frac{1}{2})^{n-1} = \frac{1}{2}\frac{1}{(1-1/2)^2} = 2$ et
$s(c) = (\frac{1}{2})^2 \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)(\frac{1}{2})^{n-2} + s(b) = (\frac{1}{2})^2 \frac{2}{(1-1/2)^3} + 2 = 6$.
b) la linéarité de s vient directement de la linéarité pour les séries convergentes.
c) $Im(s) = Vect(s(a), s(b), s(c)) = Vect(2)$ donc $rg(s) = 1$. (ou réaliser que $Im(s) \subset \mathbb{R}$, et $dim(\mathbb{R}) = 1$, d'où $rg(s) \leq 1$ et comme s est non nulle $rg(s) \geq 1$ d'où $rg(s) = 1$.).
D'après le théorème du rang, on obtient que $dim(Ker(s)) = dim(E) - rg(s) = 2$.

Exercice 3:

Partie I

1. a) $L_1(\Omega) = [\![1, +\infty[\![$ et $\forall n \geq 1$, $(L_1 = n) = [P_1 \cap ... \cap P_n \cap F_{n+1}] \cup [F_1 \cap ... \cap F_n \cap P_{n+1}]$ réunion de 2 événements incompatibles, et lancers mutuellement indépendants, d'où $P(L_1 = n) = ... = p^n q + q^n p$.
Vérification : par linéarité (toutes les séries convergent, car $|p| < 1$ et $|q| < 1$),

et $\sum_{n=1}^{+\infty} P(L_1=n) = q\sum_{n=1}^{+\infty} p^n + p\sum_{n=1}^{+\infty} q^n = q\frac{p}{1-p} + p\frac{q}{1-q} = p+q = 1$ car $1-p=q$ et $1-q=p$.

b) L_1 admet une espérance si la série de terme général $nP(L_1=n)$ converge absolument, ce qui revient à la convergence puisque tous les termes sont positifs. Or $\forall n \in [\![1,+\infty[\![$, $nP(L_1=n) = pq[np^{n-1}] + pq[nq^{n-1}]$, donc la série converge, comme CL de séries de référence convergente. Donc L_1 admet une espérance et
$E(L_1) = pq\sum_{n=1}^{+\infty} np^{n-1} + pq\sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} = pq\frac{1}{(1-p)^2} + pq\frac{1}{(1-q)^2} = \frac{p}{q} + \frac{q}{p}$.

c) $\forall n \geq 1$, $n(n-1)P(L_1=n) = p^2q[n(n-1)p^{n-2}] + q^2p[n(n-1)q^{n-2}]$, donc pour les mêmes raison que ci-dessus, $L_1(L_1-1)$ admet une espérance et $E(L_1(L_1-1)) = p^2q\frac{2}{(1-p)^3} + q^2p\frac{2}{(1-q)^3} = 2[\frac{p^2}{q^2} + \frac{q^2}{p^2}]$.
Donc par linéarité, L_1 admet un moment d'ordre 2 et $E(L_1^2) = E(L_1(L_1-1)) + E(L_1)$.
D'où L_1 admet une variance, et $V(L_1) = E(L_1^2) - (E(L_1))^2 = \frac{p^2}{q^2} + \frac{q^2}{p^2} + \frac{p}{q} + \frac{q}{p} - 2$.

2. a) $\forall (n,k) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $(L_1=n)\cap(L_2=k) = [P_1\cap\ldots\cap P_n\cap F_{n+1}\cap\ldots\cap F_{n+k}\cap P_{n+k+1}] \cup [F_1\cap\ldots\cap F_n\cap P_{n+1}\cap\ldots\cap P_{n+k}\cap F_{n+k+1}]$, réunion de 2 événements incompatibles et lancers indépendants d'où
$P((L_1=n)\cap(L_2=k)) = p^nq^kp + q^np^kq = p^{n+1}q^k + q^{n+1}p^k$.
b) D'après la formule des probabilités totales appliquée au s.c.e. de probabilités non nulles $\{(L_1=n), n\in\mathbb{N}^*\}$,
$P(L_2=k) = \sum_{n=1}^{+\infty} P((L_1=n)\cap(L_2=k)) = q^kp\sum_{n=1}^{+\infty} p^n + p^kq\sum_{n=1}^{+\infty} q^n = q^kp\frac{p}{1-p} + p^kq\frac{q}{1-q} = p^2q^{k-1} + q^2p^{k-1}$

Partie II

1. N_1 est la variable certaine égale à 1 : $N_1(\Omega)=1$ et $E(N_1)=1$.
$N_2(\Omega)=\{1,2\}$, $(N_2=1) = (P_1\cap P_2)\cup(F_1\cap F_2)$ et $(N_2=2) = (P_1\cap F_2)\cup(F_1\cap P_2)$; $P(N_2=1) = \frac{1}{2} = P(N_2=2)$ et $E(N_2) = \frac{3}{2}$.
$N_3(\Omega) = \{1,2,3\}$, $(N_3=1) = (P_1\cap P_2\cap P_3)\cup(F_1\cap F_2\cap F_3)$ et $(N_3=3) = (P_1\cap F_2\cap P_3)\cup(F_1\cap P_2\cap F_3)$
$P(N_3=1) = \frac{1}{4} = P(N_3=3)$ d'où $P(N_3=2) = \frac{1}{2}$ et $E(N_2) = 2$

2. $N_n(\Omega) = [\![1,n]\!]$ (une grosse phrase!) et $(N_n=1) = (P_1\cap\ldots\cap P_n)\cup(F_1\cap\ldots\cap F_n)$ d'où $P(N_n=1) = 2(\frac{1}{2})^n$
$(N_n=n)$ est réalisé ssi il y a alternance entre les P et les F : l'écriture est un peu plus complexe car selon la parité de n, ce n'est pas le même côté qui finit. (mais cela ne change rien au niveau des probabilités puisque la pièce est équilibrée) Si n pair : $(N_n=n) = (P_1\cap F_2\cap\ldots\cap F_n)\cup(F_1\cap P_2\cap\ldots\cap P_n)$ et si n impair :
$(N_n=n) = (P_1\cap F_2\cap\ldots\cap P_n)\cup(F_1\cap P_2\cap\ldots\cap F_n)$. Dans tous les cas, $P(N_n=n) = 2(\frac{1}{2})^n$.

3. `2*rand()` renvoie un réel au hasard dans $[0,2[$ donc `floor(2*rand())` renvoie un entier au hasard entre 0 et 1. Autrement dit, cette syntaxe permet de simuler un lancer de pièce équilibrée.
Pour compléter le programme, il faut réaliser que le nombre de séries augmente de 1 dès que deux lancers consécutifs sont différents, et reste le même sinon (*).

```
x(1)=floor(2*rand()); N(1)=1
for i=2:n
x(i)=floor(2*rand())
if x(i)<>x(i-1) then, N(i)=N(i-1)+1, else N(i)= N(i-1) ,end
end
```

4. (a) $G_n(1) = \sum_{k=1}^{n} P(N_n=k) = 1$ puisque $N_n(\Omega) = [\![1,n]\!]$.
(b) G_n est une fonction polynômiale donc dérivable sur $[0,1]$ et $G_n'(s) = \sum_{k=1}^{n} P(N_n=k)ks^{k-1}$
d'où $G_n'(1) = \sum_{k=1}^{n} kP(N_n=k) = E(N_n)$ (remarquer que l'espérance existe car N_n est une variable finie)
(c) (P_{n-1}, F_{n-1}) est un s.c.e, donc d'après la formule des probabilités totales $P((N_n=k)\cap P_n) = P((N_n=k)\cap P_n\cap P_{n-1}) + P((N_n=k)\cap P_n\cap F_{n-1}) = P((N_{n-1}=k)\cap P_{n-1}\cap P_n) + P((N_{n-1}=k-1)\cap F_{n-1}\cap P_n)$ (c'est (*) qui permet d'écrire cette égalité, vraie sur les événements!) et comme le n^e lancer est indépendant des $n-1$ lancers précédents, on obtient
$= P((N_{n-1}=k)\cap P_{n-1})P(P_n) + P((N_{n-1}=k-1)\cap F_{n-1})P(P_n)$
$= \frac{1}{2}P((N_{n-1}=k)\cap P_{n-1}) + \frac{1}{2}P((N_{n-1}=k-1)\cap F_{n-1})$.
(d) (P_n, F_n) est un sce d'où $P(N_n=k) = P((N_n=k)\cap P_n) + P((N_n=k)\cap F_n) = \frac{1}{2}[P((N_{n-1}=k)\cap P_{n-1}) + P((N_{n-1}=k)\cap F_{n-1})] + \frac{1}{2}[P((N_{n-1}=k-1)\cap P_{n-1}) + P((N_{n-1}=k-1)\cap P_{n-1})] = \frac{1}{2}[P(N_{n-1}=k)] + \frac{1}{2}[P(N_{n-1}=k-1)]$ (formule des probabilités totales "dans l'autre sens", appliquée à (P_{n-1}, F_{n-1})).
(e) $G_n(s) = \sum_{k=1}^{n}[\frac{1}{2}P(N_{n-1}=k) + \frac{1}{2}P(N_{n-1}=k-1)]s^k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} P(N_{n-1}=k)s^k + \frac{1}{2}s\sum_{k=1}^{n} P(N_{n-1}=k-1)s^{k-1}$
$= 0 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} P(N_{n-1}=k)s^k + \frac{1}{2}s\sum_{j=0}^{n-1} P(N_{n-1}=j)s^j = \frac{1}{2}G_{n-1}(s) + 0 + \frac{1}{2}sG_{n-1}(s) = \frac{1+s}{2}G_{n-1}(s)$
(f) $G_1(s) = \sum_{k=1}^{1} P(N_1=k)s = s$ et comme pour $s\in[0,1]$ fixé, la suite $(G_n(s))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison $\frac{1+s}{2}$ par e), on obtient $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $G_n(s) = (\frac{1+s}{2})^{n-1}G_1(s) = s(\frac{1+s}{2})^{n-1}$.
(g) Il reste à dériver l'expression obtenue : $G_n'(s) = (\frac{1+s}{2})^{n-1} + s\frac{n-1}{2}(\frac{1+s}{2})^{n-2}$ d'où $E(N_n) = G_n'(1) = 1 + \frac{n-1}{2} = \frac{n+1}{2}$.