Aucun document ni matériel électronique n'est autorisé. On attachera un soin particulier à la rédaction des raisonnements et la présentation générale des copies. Les résultats principaux seront soulignés ou encadrés.

Problème 1. On se propose ici d'étudier le *commutant* de certaines matrices. Dans toute la suite, n est un entier au moins égal à 2. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On appelle commutant de A l'ensemble $\mathscr{C}_A = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), AM = MA\}$. On appelle de même commutant d'un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble $\mathscr{C}_f = \{g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n), f \circ g = g \circ f\}$. On identifiera enfin les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ avec les matrices colonnes de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On note enfin $\mathscr{B}_n$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

1. *Généralités.*

a. Montrer que $\mathscr{C}_A$ est un espace vectoriel.

b. Déterminer $\mathscr{C}_{\lambda \mathrm{I}_n}$.

c. Montrer que $\mathscr{C}_A$ est de dimension finie au moins égale à 2. *On prendra soin de distinguer le cas où* $A = \lambda \mathrm{I}_n$.

d. Soit $\varphi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ canoniquement associée à A. Montrer que $\mathscr{C}_\varphi$ est un espace vectoriel de même dimension que $\mathscr{C}_A$.

e. Écrire une fonction `scilab` qui teste si deux matrices commutent.

2. *Un exemple en dimension 2.* Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que (A, I_2) soit libre. Soit $B = A - \frac{1}{2}\operatorname{tr}(A)\,\mathrm{I}_2$. On note enfin f l'endomorphisme canoniquement associé à B.

a. Montrer que $\mathscr{C}_A = \mathscr{C}_B$.

b. Déterminer $r \in \mathbb{R}$ tel que $X^2 - r$ soit un polynôme annulateur de B.

c. On pose $M = \begin{pmatrix} 0 & r \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer $\mathscr{C}_M$ et sa dimension.

d. On pose $\mathscr{B}_2 = (e_1, e_2)$ et on suppose que $(e_1, f(e_1))$, $(e_2, f(e_2))$ et $(e_1 + e_2, f(e_1 + e_2))$ sont liées. Montrer qu'il existe un λ tel que $f = \lambda\,\mathrm{Id}$ et aboutir à une contradiction.

e. En déduire qu'il existe $v \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathscr{D} = (v, f(v))$ soit une base. Déterminer $\operatorname{Mat}_{\mathscr{D}}(f)$.

f. En déduire que $\dim \mathscr{C}_A = 2$ puis en donner une base.

3. *Un exemple en dimension 3.* Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et f l'application linéaire canoniquement associée.

a. Déterminer le noyau et l'image de A.

b. Montrer que f est un projecteur que l'on explicitera.

c. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1}.

d. Soit Φ tel que $\Phi(M)=PMP^{-1}$. Montrer que Φ est un automorphisme puis $\Phi(\mathscr{C}_A)=\mathscr{C}_{PAP^{-1}}$.

e. Déterminer $\mathscr{C}_{PAP^{-1}}$ puis ainsi que la dimension de $\mathscr{C}_A$.

4. *Projecteurs en dimension n.* On considère $p \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ un projecteur de rang r.

a. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle la matrice de p est diagonale avec une diagonale $(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$. On précisera le nombre de 1. On note J_r cette matrice.

b. Montrer que $f \in \mathscr{C}_p$ si et seulement si $\operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Ker} p$ sont stables par f.

c. Quelle est la forme de la matrice de $f \in \mathscr{C}_p$ dans la base de la question ***a*** ?

d. En déduire $\dim \mathscr{C}_p = \dim \mathscr{C}_{J_r} = r^2 + (n-r)^2$.

e. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = M$. Déterminer $\dim \mathscr{C}_M$ en fonction de n et de $\operatorname{rg}(M)$.

f. De quelle question a-t-on généralisé le résultat ?

Problème 2. On pose, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $P_n=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} X^k$. On dit qu'une suite de matrice est convergente si chacun de ses coefficients converge. Soit $(x_n)_n$ une suite réelle et $r\in\mathbb{N}^*$. On suppose $\forall k\in\mathbb{N},\ x_{k+r}=x_k$. On dit que (x_n) est r–périodique. On note $y=\dfrac{1}{r}\displaystyle\sum_{i=0}^{r-1} x_i$ et $y_n=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} x_i$.

0. Soit $M_n=\begin{pmatrix} \arctan n & \frac{\sin n}{n} \\ n\sin\frac{1}{n} & 3\end{pmatrix}$. Montrer que la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.

1. *Un lemme.*

a. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N},\ \dfrac{1}{r}\displaystyle\sum_{i=n}^{n+r-1} x_i = y$.

b. On pose $w_n=ny_n-ny$. Montrer $(w_n)_{n\geqslant 1}$ est r–périodique.

c. Montrer qu'une suite r–périodique est bornée.

d. En déduire que (y_n) converge et déterminer sa limite.

2. *Un exemple en dimension 2.* On pose $A=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

a. Déterminer des matrices B et C telles que $A=B-\dfrac{1}{6}C$ et $B+C=\mathrm{I}_2$.

b. Calculer B^2, C^2, BC et CB.

c. En déduire : $\forall n\in\mathbb{N},\ A^n\in\mathrm{vect}(B,C)$. On explicitera la combinaison linéaire.

d. Déterminer, si elles existent, les limites de $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(P_n(A))_{n\in\mathbb{N}^*}$.

3. *Un exemple en dimension 3.* Soit $M=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3\end{pmatrix}$.

a. Déterminer un polynôme annulateur unitaire de degré 3 de M.

b. En déduire M^n en fonction de I_3, M et M^2.

c. La suite $(P_n(M))_{n\geqslant 1}$ converge-t-elle ?

4. *Matrices de permutation.* Soit $p\geqslant 3$ un entier fixé. Soit $\sigma : [\![1,p]\!]\to[\![1,p]\!]$ une bijection (ou *permutation*). On définit la matrice A_σ par $(A_\sigma)_{i,j}=\delta_{i,\sigma(j)}$, où δ est le symbole de Kronecker.

a. Montrer que si σ et τ sont deux bijections de $[\![1,p]\!]$ alors $A_\sigma A_\tau = A_{\sigma\circ\tau}$.

b. Déterminer A_{Id} puis en déduire que A_σ est inversible et déterminer son inverse à l'aide d'une matrice de permutation.

c. Combien existe-t-il de matrices de permutation ?

d. En déduire par l'absurde qu'il existe deux entiers distincts p et q tels que $(A_\sigma)^p=(A_\sigma)^q$.

e. Montrer alors qu'il existe un entier $r\geqslant 1$ tel que $(A_\sigma)^r=\mathrm{I}_p$.

f. Montrer que la suite $(A_\sigma)^n$ est r–périodique.

g. Montrer que la suite $(P_n(A_\sigma))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et exprimer sa limite en fonction de $\mathrm{I}_p, A_\sigma, \ldots (A_\sigma)^{r-1}$.

Exercice. Soit $n\in\mathbb{N}$ et $f\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$. Pour $k\in\mathbb{N}$, on pose $I_k=\mathrm{Im}\, f^k$ et $N_k=\mathrm{Ker}\, f^k$.

a. Montrer que pour tout $k\in\mathbb{N}$, $N_k\subseteq N_{k+1}$ et $I_{k+1}\subseteq I_k$.

b. Montrer, par l'absurde et avec un argument de dimension : $\exists p\leqslant n,\ N_p=N_{p+1}$.

c. Montrer alors que $I_p=I_{p+1}$.

d. Montrer que pour tout $k\in\mathbb{N}$, $N_p=N_{p+k}$ et $I_p=I_{p+k}$.

e. Montrer que $\mathbb{R}^n=N_p\oplus I_p$.