DEVOIR MAISON 14

CORRECTION DU PROBLÈME 1

A. 1.

- $\mathcal{C}_A$ est inclus, par définition, dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, qui est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de référence
- $\mathcal{C}_A$ contient la matrice nulle car $A \times 0 = 0 = 0 \times A$ de sorte que $\mathcal{C}_A \neq \emptyset$
- Soient $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(M,N) \in \mathcal{C}_A^2$. Comme $AM = MA$ et $AN = NA$, il résulte de la distributivité du produit matriciel et de la loi du scalaire mobile que

$$(\lambda M + \mu N) \times A = \lambda MA + \mu NA = \lambda AM + \mu AN = (\lambda M + \mu N) \times A$$

En particulier, $\lambda M + \mu N \in \mathcal{C}_A$. L'ensemble $\mathcal{C}_A$ est donc stable par combinaison linéaire.

En conclusion, $\mathcal{C}_A$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et $\lambda \in \mathbb{R}$, il résulte de l'associativité du produit, de la loi du scalaire mobile et du fait que I_n soit un élément neutrte pour la multiplication, que

$$M \times (\lambda I_n) = \lambda(M \times I_n) = \lambda M = \lambda(I_n \times M) = (\lambda I_n) \times M$$

En particulier $M \in \mathcal{C}_{\lambda I_n}$, de sorte que

$$\mathcal{C}_{\lambda I_n} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \qquad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si $A \in \mathrm{Vect}(I_n)$, il résulte des calculs effectués dans la question précédente que $\mathrm{dim}(\mathcal{C}_A) = \mathrm{dim}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = n^2 \geqslant 2$. Si $A \quad \mathrm{Vect}(I_n)$, alors $\mathcal{C}_A$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, contenant les matrices I_n (car $A \times I_n = A = I_n \times A$) et A (car $A \times A = A^2 = A \times A$). Comme la famille $\{I_n,A\}$ est libre (puisque $A \quad \mathrm{Vect}(I_n)$), $\mathcal{C}_A$ est de dimension au moins 2 car il contient une famille libre de deux vecteurs.
Dans tous les cas, $\mathcal{C}_A$ est au moins de dimension 2.

4. *Houla, c'est une question technique ça... qui exploite le fait que les bases permettent de transformer (via isomorphisme) vecteurs en coordonnées, applications linéaires en matrices, etc...* Soit $\psi : \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) & \to & M_n(\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(f) \end{array}$ l'isomorphisme (d'après le cours) associant à un endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$, sa matrice dans la base $\mathcal{B}$. Alors, je prétends que ψ transforme $\mathcal{C}_f$ en $\mathcal{C}_A$, c'est à dire que $\psi(\mathcal{C}_f) = \mathcal{C}_A$, ce qui implique (les deux espaces étant isomorphes) que

$$\mathrm{dim}(\mathcal{C}_f) = \mathrm{dim}(\mathcal{C}_A)$$

En effet, comme $A = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(f) = \psi(f)$, pour $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, nous remarquons que

$$\begin{aligned} g \in \mathcal{C}_f &\iff f \circ g = g \circ f \iff \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(f \circ g) = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(g \circ f) \\ &\iff \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(f) \times \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(g) = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(g) \times \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(f) \\ &\iff \mathcal{A} \times \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(g) = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(g) \times A \\ &\iff \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(g) \in \mathcal{C}_A \qquad \iff \psi(g) \in \mathcal{C}_A \end{aligned}$$

A fortiori, on a bien $\psi(\mathcal{C}_f) = \psi(\mathcal{C}_A)$.

5. *du Scilab !*

```
function [r]=commutables(A,B)
   r = A*B == B*A
endfunction
```

B. 1. *On peut utiliser la méthode MARRE mais on va faire ici plus court/élégant via des équivalences*

Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, nous remarquons que

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{C}_B &\iff M \times B = B \times M \iff M\left(A - \tfrac{\operatorname{tr}(A)}{2} I_2\right) = \left(A - \tfrac{\operatorname{tr}(A)}{2} I_2\right) M \\ & MA - \tfrac{\operatorname{tr}(A)}{2} M = AM - \tfrac{\operatorname{tr}(A)}{2} \iff MA = AM \\ &\iff M \in \mathcal{C}_A \end{aligned}$$

En particulier, nous avons $\mathcal{C}_B = \mathcal{C}_A$.

2. Nous remarquon que

$$B = \begin{pmatrix} \frac{a-d}{2} & b \\ c & \frac{d-a}{2} \end{pmatrix} \qquad B^2 = \begin{pmatrix} \left(\frac{a-d}{2}\right)^2 + bc & \frac{a-d}{2} b + b\frac{d-a}{2} \\ c\frac{a-d}{2} b + \frac{d-a}{2} c & bc + \left(\frac{d-a}{2}\right)^2 \end{pmatrix} = \left(bc + \left(\frac{d-a}{2}\right)^2\right) I_2$$

En particulier, pour $r = bc + \left(\frac{d-a}{2}\right)^2$ et $P = x^2 - rI_2$, nous avons

$$P(B) = B^2 - rI_2 = 0$$

De sorte que P est un polynôme annulateur de B.

3. Soient $r \in \mathbb{R}$ et $N = \begin{pmatrix} a & b \\ cd & \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. alors, on a

$$\begin{aligned} N \in \mathcal{C}_M &\iff NM = MN \iff \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & r \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & r \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} b & ar \\ d & cr \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rc & rd \\ a & b \end{pmatrix} \\ & \begin{cases} b = rc \\ ar = rd \\ d = a \\ cr = b \end{cases} \\ & \begin{cases} b = rc \\ d = a \end{cases} \end{aligned}$$

A fortiori, on a

$$\mathcal{C}_M = \{aI_2 + c\begin{pmatrix} 0 & r \\ 1 & 0 \end{pmatrix} : (a,c) \in \mathbb{R}^2\} = \operatorname{Vect}(I_2, \begin{pmatrix} 0 & r \\ 1 & 0 \end{pmatrix})$$

De sorte que $\mathcal{C}_M$ est de dimension 2 quel que soit $r \in \mathbb{R}$

4. *Question bizarrement posée. Il faut lire la question suivante pour voir où ils veulent en venir...*
Supposons que les trois familles de deux vecteurs $(e_1,f(e_1)$, $(e_2,f(e_2))$ et $(e_1+e_2,f(e_1+e_2))$ soient liées. Comme e_1, e_2 et e_1+e_2 sont des vecteurs non nuls, il existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ tels que
$$\begin{cases} f(e_1) = ae_1 \\ f(e_2) = be_2 \\ f(e_1+e_2) = c(e_1+e_2) \end{cases} \Longrightarrow 0 = f(e_1+e_2)-f(e_1)-f(e_2) = (c-a)e_1+(c-b)e_2 = 0$$
Comme $(e_1,e_2$ est libre (puisque c'est une base), nous avons forcément $c-a = 0 = c-b$, de sorte que $a = c = b$. Nous en déduisons alors que $f(e_1) = ae_1 = a\mathrm{Id}(e_1)$ et $f(e_2) = be_2 = ae_2 = a\mathrm{Id}(e_2)$. Comme les applications linéaires f et $a\mathrm{Id}$ coincident sur la base (e_1,e_2), elles sont égales, de sorte que
$$f = a\mathrm{Id}$$
Ceci contredit la définition de f, car la matrice canoniquement associée à f est $B = A - \frac{\mathrm{tr}(A)}{2}I_2 \neq aI_2$, en effet $(A,I_2$ est libre
5. Il résulte du raisonnement par l'absurde mené à la question précédente qu'il existe un vecteur $v \in \mathbb{R}^2$ tel que $(v,f(v))$ soit libre car les trois familles $(e_1,f(e_1)$, $(e_2,f(e_2))$ et $(e_1+e_2,f(e_1+e_2))$ ne peuvent pas être toutes liées. A fortiori, la famille libre $= (v,f(v))$ de deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$, en constitue une base.
Accrochez vous !
Comme $X^2 - r$ est un polynôme annulateur de B, c'est également un polynôme annulateur de f, de sorte que $f^2 - r\mathrm{Id} = 0$. En particulier, $f^2(v) = r\mathrm{Id}(v) = rv$. De sorte que
$$\mathcal{M}at(f) = \begin{pmatrix} 0 & r \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = M$$
6. *Faisons la synthèse des questions précédentes* Il résulte de la question 2a que $\dim(\mathcal{C}_A) = \dim(\mathcal{B})$. Or d'après la question 1d, il vient $\dim(\mathcal{C}_B) = \dim(\mathcal{C}_f)$. Or dans la base , $\mathcal{M}at(f) = M$, de sorte que l'on peut montrer que $\dim(\mathcal{C}_f) = \dim(\mathcal{C}_M)$ *(un peu comme à la question 1d, sauf qu'au lieu d'utiliser la base canonique, on utilise la base)* Et enfin, il résulte de la question 2c que $\dim(\mathcal{C}_M) = 2$ de sorte que $\dim(\mathcal{C}_A) = 2$. Comme (A,I_2) est une famille libre de $\mathcal{C}_A$, c'en est une base. *Une manière bien torturée d'arrivr à ce résultat, dans un cas relativement simple...la dimension* 2

C. 1. gah