Mathématique **ECS 1**

06 Sept. 2014

Devoir surveillé 1.
(Programme de Terminale)

Veillez à bien justifier vos réponses : un exercice bien traité rapporte des points, un exercice traité de façon non rigoureuse ne rapporte pas de points. Malus de 2 points pour les copies mal rédigées. La durée de l'épreuve est de 4 heures. Aucune sortie avant la fin de l'épreuve. Les calculatrices ne sont pas autorisées.

Si, au cours de l'épreuve, vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez le sur votre copie et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous êtes amenés à prendre.

Ce sujet comporte cinq exercices indépendants.

Exercice 1. On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $h(x) = \dfrac{1+\ln x}{x}$ et $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

(1) Etudier les variations de f.

(2) Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

- **(a)** Déterminer x_1 abscisse du point d'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe $(O,\vec{i})$.
- **(b)** Déterminer x_2 abscisse du point en lequel la tangente à $\mathcal{C}$ passe par l'origine.
- **(c)** Déterminer x_3 abscisse du point en lequel la tangente à $\mathcal{C}$ est parallèle à l'axe $(O,\vec{i})$.
- **(d)** Déterminer x_4 tel que $h''(x_4) = 0$.

(3) Vérifier que x_1, x_2, x_3, x_4 sont quatre termes consécutifs d'une suite géométrique.

Exercice 2. Encadrement de $\ln 3$.

(1) **(a)** Déterminer deux nombres réels a et b tels que pour tout réel x distinct de 1 et -1, $\dfrac{1}{1-x^2} = \dfrac{a}{1-x} + \dfrac{b}{1+x}$.

- **(b)** Montrer que $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x^2}\mathrm{d}x = \ln 3$.

(2) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ et on pose $h_n(x) = 1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2n}$.

- **(a)** Calculer $\dfrac{1}{1-x^2} - h_n(x)$ pour $x \neq 1,\ x \neq -1$.
- **(b)** Montrer que pour tout $x \in \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$, $\quad 0 \leq \dfrac{1}{1-x^2} - h_n(x) \leq \dfrac{4}{3}x^{2n+2}$.

(3) On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} h_n(x)\mathrm{d}x$. A l'aide de l'inégalité (2b), montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

(4) Calculer u_2 et donner un encadrement de $\ln 3$.

Exercice 3. On donne les nombres complexes suivants : $a = \sqrt{2}(1+i)$ et $b = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i$.

(1) Déterminer la forme exponentielle de a, b et $\dfrac{a}{b}$.

(2) Déterminer la forme algébrique de $\dfrac{a}{b}$.

(3) En déduire $\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$.

Exercice 4. On appelle f et g les deux fonctions définies sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \ln(1+x) - x \quad \text{et} \quad g(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}.$$

(1) Etudier les variations de f et de g sur $[0\ ;\ +\infty[$.

(2) En déduire que pour tout $x \geq 0,\ x - \dfrac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$.

On se propose d'étudier la suite (u_n) de nombres réels définie par :

$$u_1 = \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = u_n\left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right).$$

(3) Montrer par récurrence que $u_n > 0$ pour tout entier naturel $n \geq 1$.

(4) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$\ln u_n = \ln\left(1+\frac{1}{2}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{2^2}\right) + \cdots + \ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right).$$

(5) On pose $S_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{2^3} + \cdots + \dfrac{1}{2^n}$ et $T_n = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4^2} + \dfrac{1}{4^3} + \cdots + \dfrac{1}{4^n}$.
à l'aide de la première partie, montrer que :

$$S_n - \frac{1}{2}T_n \leq \ln u_n \leq S_n.$$

(6) Calculer S_n et T_n en fonction de n. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n$.

(7) Etude de la convergence de la suite (u_n).

(a) Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante.

(b) En déduire que (u_n) est convergente. Soit ℓ sa limite.

(c) On admet le résultat suivant : si deux suites (v_n) et (w_n) sont convergentes et telles que $v_n \leq w_n$ pour tout n entier naturel, alors
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} w_n$.
Montrer alors que $\dfrac{5}{6} \leq \ln \ell \leq 1$ et en déduire, un encadrement de ℓ.

Exercice 5. On dispose d'un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On désigne par p_k la probabilité d'obtenir, lors d'un lancer, la face numérotée k (k est un entier et $1 \leq k \leq 6$).
Ce dé a été pipé de telle sorte que :

- les six faces ne sont pas équiprobables,
- les nombres $p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_4,\ p_5,\ p_6$, dans cet ordre, sont six termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison r,
- les nombres $p_1,\ p_2,\ p_4$ dans cet ordre, sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique.

On rappelle que des événements E et F sont indépendants lorsque $P(E \cap F) = P(E)P(F)$.

(1) Démontrer que : $p_k = \dfrac{k}{21}$ pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq 6$.

(2) On lance ce dé une fois et on considère les évènements suivants :

- A : « le nombre obtenu est pair »
- B : « le nombre obtenu est supérieur ou égal à 3 »
- C : « le nombre obtenu est 3 ou 4 ».

(a) Calculer la probabilité de chacun de ces évènements.

(b) Calculer la probabilité que le nombre obtenu soit supérieur ou égal à 3, sachant qu'il est pair.

(c) Les évènements A et B sont-ils indépendants ? Les évènements A et C sont-ils indépendants ?

(3) On utilise ce dé pour un jeu. On dispose :

- d'une urne U_1 contenant une boule blanche et trois boules noires,
- d'une urne U_2 contenant deux boules blanches et une boule noire.

Le joueur lance le dé :

- s'il obtient un nombre pair, il extrait au hasard une boule de l'urne U_1,
- s'il obtient un nombre impair, il extrait au hasard une boule de l'urne U_2.

On suppose que les tirages sont équiprobables et le joueur est déclaré gagnant lorsqu'il tire une boule blanche, on note G cet évènement.

(a) Déterminer la probabilité de l'évènement $\mathrm{G} \cap \mathrm{A}$, puis la probabilité de l'évènement G.

(b) Le joueur est gagnant. Déterminer la probabilité qu'il ait obtenu un nombre pair lors du lancer du dé.

Mathématique **ECS 1**

11 oct. 2014

Devoir surveillé 2.

Veillez à bien justifier vos réponses : un exercice bien traité rapporte des points, un exercice traité de façon non rigoureuse ne rapporte pas de points.

Soignez votre écriture et votre rédaction, faites des phrases complètes et encadrez vos résultats.

Le malus de 2 points pour les copies mal rédigées sera appliqué.
La durée de l'épreuve est de 4 heures.
Aucune sortie avant la fin de l'épreuve.
Les calculatrices ne sont pas autorisées.

Si, au cours de l'épreuve, vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez le sur votre copie et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous êtes amenés à prendre.

Ce sujet comporte cinq exercices indépendants.

Exercice 1. Applications directes du cours.

(1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $9z^2 - 3(3-i)z + 4 - 3i = 0$.

(2) Soit n un entier supérieur à 2 et θ un réel tel que θ n'est pas multiple entier de 2π.
Simplifier la somme $\cos(\theta) + \cos(2\theta) + \cos(3\theta) + \cdots + \cos(n\theta)$

(3) Résoudre, par la méthode de Gauss, le système linéaire :

$$(S) : \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & -2y & +z & +t & = & 1 \\ x & +2y & +z & -t & = & -1 \\ x & -2y & +z & +5t & = & 5 \end{array} \right.$$

(4) Déterminer des réels a, b, d tels que pour tout réel x,

$$(\sin x)^4 = a + b\cos(2x) + d\cos(4x).$$

Exercice 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$S_1(n) = 1 + 2 + 3 + \cdots + n,$$
$$S_2(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2,$$
$$S_3(n) = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3,$$

et de façon plus générale, si p est un entier naturel :

$$S_p(n) = 1^p + 2^p + 3^p + \cdots + n^p.$$

(1) Rappeler, sans justifier, l'expression de $S_1(n)$ en fonction de n.

(2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, S_2(n) = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

(3) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, S_3(n) = (S_1(n))^2$.

(4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer l'égalité suivante :

$$8(S_1(n))^3(n+1) + 12(S_1(n))^2(n+1)^2 + 8(S_1(n))(n+1)^3 = (n+1)^4(n^3 + 3n^2 + 4n).$$

(5) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, S_5(n) + S_7(n) = 2(S_1(n))^4$.

Exercice 3. Bob, John et Samuel sont auditionnés par la police à la suite d'un crime commis par l'un d'entre eux. Tous les trois font chacun deux affirmations. Les voici :

Bob dit : « — Je suis innocent. John est aussi innocent. »

John dit :« — Bob est innocent. C'est Samuel, le coupable. »

Samuel dit : « — Je suis innocent. C'est Bob, le coupable. »

Par la suite, les enquêteurs établissent avec certitude que l'un d'entre eux a fait deux affirmations vraies, un autre a fait deux affirmations fausses et le troisième a fait une affirmation vraie et l'autre fausse. Qui est coupable ? (Seules les réponses soigneusement argumentées seront prises en compte.)

Exercice 4. Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel fixé et $\omega = \cos(\frac{2\pi}{2n+1}) + i\sin(\frac{2\pi}{2n+1})$. On pose $z = \frac{1}{2} + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \cdots + \omega^n$.

(1) Calculer ω^{2n+1} et simplifier la somme $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \cdots + \omega^{2n}$.

(2) Montrer que $z = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\omega^n - 1}{\omega^n + 1}\right)$.

(3) En déduire que, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, z^{2k} est réel et z^{2k+1} est imaginaire pur.

(4) Montrer que $\left(\dfrac{2z+1}{2z-1}\right)^{2n+1} = -1$.

Exercice 5. Soient f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ et (u_n) la suite de nombres réels déterminée par $u_0 = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \displaystyle\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x$.

On rappelle le théorème d'intégration par parties : si u et v sont des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$ alors

$$\int_a^b u'(t)v(t)\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\mathrm{d}t$$

où $[u(t)v(t)]_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a)$.

On considère la fonction numérique F de la variable réelle x définie par :

$$F(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

Pour tout réel λ strictement positif, on note $\mathcal{A}(\lambda)$ l'aire (exprimée en unité d'aire) du domaine constitué par l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que :

$$\lambda \leq x \leq 2\lambda \quad \text{et} \quad 0 \leq y \leq f(x)$$

(1) Exprimer $\mathcal{A}(\lambda)$ sous forme d'une intégrale.

(2) Déterminer l'ensemble de définition de F et montrer que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$ puis exprimer $\mathcal{A}(\lambda)$ en fonction de λ.

(3) Calculer u_0 et u_1.

(4) A l'aide d'une intégration par parties, calculer u_3.

(On pourra remarquer que $\dfrac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} = x^2\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$)

(5) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n), montrer que la suite (u_n) est convergente. (On ne cherchera pas sa limite dans cette question)

(6) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{n+1}$. (On pourra commencer par établir l'encadrement $0 \leq x^n f(x) \leq x^n$ pour tout $x \in [0,1]$.)

(7) Déterminer alors la limite de la suite (u_n).

(8) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 3$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^{n-2}\sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x$.

- **(a)** Etablir, pour $n \geq 3$, l'égalité $u_n + u_{n-2} = I_n$.
- **(b)** A l'aide d'une intégration par parties, établir, pour $n \geq 3$, l'égalité $nu_n + (n-1)u_{n-1} = \sqrt{2}$.
- **(c)** En déduire, pour $n \geq 3$, l'inégalité $(2n-1)u_n \leq \sqrt{2}$.
- **(d)** Conclure quant à la limite de la suite (nu_n).

Devoir surveillé 3.

Veillez à bien justifier vos réponses : un exercice bien traité rapporte des points, un exercice traité de façon non rigoureuse ne rapporte pas de points.

Soignez votre écriture et votre rédaction, faites des phrases complètes et $\boxed{\text{encadrez vos résultats.}}$

Le malus de 2 points pour les copies non soignées ou mal rédigées sera appliqué.
La durée de l'épreuve est de 4 heures.
Aucune sortie avant la fin de l'épreuve.
Les calculatrices ne sont pas autorisées.

Si, au cours de l'épreuve, vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez le sur votre copie et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous êtes amenés à prendre.

Ce sujet comporte cinq exercices indépendants.
Laissez une demi-page de garde pour les observations.

Exercice 1. Applications directes du cours.

(1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer les égalités suivantes :

$$\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \binom{2n+1}{n+1} - 2\binom{2n}{n+1}$$

(2) A l'aide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale $\displaystyle\int_1^2 \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$. On pourra être amené à déterminer des réels a, b, c tels que pour tout réel x non nul

$$\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{1+x^2}$$

(3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier les sommes $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}$

(4) Simplifier la somme double $\displaystyle\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=j}^{n}\binom{n}{i}\binom{i}{j}$.

(5) On entre, dans une console Scilab, les instructions suivantes :

```
-->> a= [4,5,1,-3,4,1,3,2];  b= [2,1,7,2,1,1,1,2];  c= [8,5,0,-3,4,1,6,2];
-->> d=(c.*b)./a; e=d(8:-1:1)
```

Quel est le résultat affiché lorsqu'on valide la deuxième ligne ?

Exercice 2. Soit $\beta = \mathrm{e}^{\frac{i\pi}{7}}$.

(1) Calculer la somme : $1 - \beta + \beta^2 - \beta^3 + \beta^4 - \beta^5 + \beta^6$.

(2) En déduire que : $\beta^3 - \beta^2 + \beta = \dfrac{1}{1-\beta^3}$.

(3) Déterminer alors la valeur de $\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7}$.

Exercice 3. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des réels strictement positifs. L'objectif de l'exercice est de démontrer *l'inégalité arithmético-géométrique* :

$$\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$$

(1) Montrer que pour tout réel $x > 0$, $\ln x \leq x - 1$.

(2) On pose $m = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k$. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x_k}{m} - 1\right) = 0$.

(3) En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{x_k}{m}\right) \leq 0$ et conclure.

Exercice 4. Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$ et tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose $J(k,n) = \displaystyle\int_0^1 x^k(1-x)^n \mathrm{d}x$ et $J(k,0) = \displaystyle\int_0^1 x^k \mathrm{d}x$.

(1) **(a)** Calculer, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, $J(k,0)$ et $J(k,1)$.

(b) Montrer que quelque soient les entiers $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$J(k+1,n) = \frac{k+1}{n+1} J(k,n+1).$$

(2) Etablir, quelque soient les entiers $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$, l'égalité

$$J(k,n) = \frac{n!}{(k+1)(k+2)\ldots(k+n+1)}.$$

(3) Le but de cette question est de simplifier la somme $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{1}{2k+1}$ en utilisant le résultat précédent.

(a) Calculer $\displaystyle\int_0^1 t^{2k}\mathrm{d}t$ et en déduire que $S_n = \displaystyle\int_0^1 (1-t^2)^n \mathrm{d}t$.

(b) En remarquant que $(1-t^2)^n = (1-t)^n(1+t)^n$, montrer que $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}J(k,n)$

(c) En utilisant le résultat de la question (2), établir l'égalité

$$S_n = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{n-k} = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k}$$

(d) Montrer l'égalité : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{n+1+k}$

(e) En déduire que $S_n = \dfrac{2^{2n}}{(2n+1)\binom{2n}{n}}$.

Exercice 5 (d'après Bac C, 1983)**.** Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t.$$

(1) Expliquez pourquoi g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donnez l'expression de $g'(x)$.

(2) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = g(x) + g(-x)$.

(a) Expliquez pourquoi h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donnez l'expression de $h'(x)$.

(b) En déduire que h est une fonction constante que l'on précisera. Qu'en déduisez vous sur la fonction g ?

(3) Soit maintenant la fonction f définie sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ par $f(x) = g(\tan x)$.

(a) Expliquez pourquoi la fonction f est dérivable et donnez l'expression de $f'(x)$. En remarquant que $f(0) = 0$, déterminez alors une expression simple pour $f(x)$.

(b) On pose $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$. A l'aide de la question précédente, déterminez la valeur de I.

(4) Pour tout entier naturel n, on considère les intégrales suivantes :

$$I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n \mathrm{d}t \text{ et } J_n = \int_0^1 t^2(1-t^2)^n \mathrm{d}t.$$

(a) Exprimer I_{n+1} en fonction de I_n et J_n.

(b) A l'aide d'une intégration par parties, établir, pour tout entier naturel n, la relation

$$I_{n+1} = 2(n+1)J_n$$

(*on pourra remarquer que* $t^2(1-t^2)^n = t \times t(1-t^2)^n$).

(c) Etablir alors une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n.

(d) Montrer alors que, pour tout entier naturel n,

$$I_n = 2^n \times \frac{n!}{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n+1)}$$

(5) On définit une suite (u_n) par $u_0 = 1,\ u_1 = 1 + \dfrac{1}{1 \times 3}$ et pour tout entier naturel $n \geq 2$, on pose

$$u_n = 1 + \frac{1}{1 \times 3} + \frac{2!}{1 \times 3 \times 5} + \cdots + \frac{n!}{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n+1)}$$

(a) En utilisant le résultat de la question (4d), montrer que

$$u_n = 2\int_0^1 h_n(t)\mathrm{d}t.$$

où h_n est la fonction définie sur $[0,1]$ par $h_n(t) = \dfrac{1 - \left(\frac{1-t^2}{2}\right)^{n+1}}{1+t^2}$.

(b) Etablir, pour tout $t \in [0,1]$, l'encadrement

$$0 \leq \frac{\left(\frac{1-t^2}{2}\right)^{n+1}}{1+t^2} \leq \frac{1}{2^{n+1}}.$$

(c) On pose $v_n = 2I - u_n$ où I désigne l'intégrale de la question (3b). Après avoir exprimé $v_n = 2I - u_n$ sous forme intégrale, déduire de (b) un encadrement pour la suite (v_n).

(d) Déterminer alors la limite de la suite (v_n), puis celle de la suite (u_n).

Concours blanc 1. Epreuve a.

Veillez à bien justifier vos réponses : un exercice bien traité rapporte des points, un exercice traité de façon non rigoureuse ne rapporte pas de points. Malus de 2 points pour les copies mal rédigées. La durée de l'épreuve est de 4 heures. Aucune sortie avant la fin de l'épreuve. Les calculatrices ne sont pas autorisées.

Si, au cours de l'épreuve, vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez le sur votre copie et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous êtes amenés à prendre.

Ce sujet comporte quatre exercices indépendants.

Exercice 1. Applications du cours.

(1) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite arithmético-géométrique définie par $u_0 = -1$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 3}{4}$. Exprimer u_n en fonction de n.

(2) Enoncer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

(3) Simplifier la somme double $\displaystyle\sum_{0\leq j\leq k\leq 2n} (-1)^k \binom{2n}{k}\binom{k}{j}$.

(4) Etudier l'inversibilité et, le cas échéant, calculer l'inverse, de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{4} + x - x^2$. L'objectif de cet exercice est d'étudier la nature de la suite définie par la donnée de $u_0 = y \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.

(1) **(a)** Montrer que pour tout réel $x,\ f(x) \leq \dfrac{1}{2}$.

(b) En déduire que pour tout entier $n \geq 1,\ u_n \leq \frac{1}{2}$.

(2) On suppose, dans cette question seulement, que $y = 0$.
Montrer que la suite (u_n) est croissante, puis en déduire que la suite (u_n) converge vers une limite ℓ à déterminer.

(3) On suppose, dans cette question seulement, que $u_0 = y < -\dfrac{1}{2}$.

(a) Montrer que pour tout réel $x < -\dfrac{1}{2},\ f(x) < x$.

(b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

(c) Etablir que la suite (u_n) diverge vers $-\infty$.

(4) On suppose, dans cette question seulement, que $u_0 = y > \dfrac{3}{2}$.

(a) Montrer que pour tout réel $x > \dfrac{3}{2},\ f(x) < -\dfrac{1}{2}$.

(b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

(c) Etablir que la suite (u_n) diverge vers $-\infty$.

(5) On suppose, dans cette question seulement, que $-\dfrac{1}{2} < y < \dfrac{3}{2}$.

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N},\ -\dfrac{1}{2} < u_n < \dfrac{3}{2}$.

(b) Montrer que pour tout réel $x \in \left]-\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right[,\ \left|f(x) - \dfrac{1}{2}\right| < \left|x - \dfrac{1}{2}\right|$.

(c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N},\ \left|u_{n+1} - \dfrac{1}{2}\right| < \left|y - \dfrac{1}{2}\right|^n$ et conclure quant à la convergence de la suite (u_n).

Exercice 3. Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$ et tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose $J(k,n) = \int_0^1 x^k(1-x)^n \mathrm{d}x$ et $J(k,0) = \int_0^1 x^k \mathrm{d}x$.

(1) **(a)** Calculer, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, $J(k,0)$ et $J(k,1)$.

(b) Montrer que quelque soient les entiers $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$J(k+1,n) = \frac{k+1}{n+1} J(k,n+1).$$

(2) Etablir, quelque soient les entiers $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$, l'égalité

$$J(k,n) = \frac{n!}{(k+1)(k+2)\dots(k+n+1)}.$$

(3) Le but de cette question est de simplifier la somme $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{2k+1}$ en utilisant le résultat précédent.

(a) Etablir l'égalité $S_n = \int_0^1 (1-t^2)^n \mathrm{d}t$.

(b) En déduire l'égalité $S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} J(k,n)$

(c) En utilisant le résultat de la question (2), établir les égalités

$$S_n = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{n-k} = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k}$$

(d) Montrer l'égalité : $\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{n+1+k}$

(e) En déduire que $S_n = \dfrac{2^{2n}}{(2n+1)\binom{2n}{n}}$.

Exercice 4. On considère les matrices $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Soit de plus la matrice $M = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 2/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 2/3 \end{pmatrix}$.

(1) Exprimer J^2 en fonction de J. En déduire, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, J^n en fonction de J.

(2) Exprimer M sous la forme $aI_3 + bJ$ où a et b sont à déterminer. En déduire que, pour tout entier naturel n :

$$M^n = \frac{1}{2^n} I_3 + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) J.$$

(3) On étudie ici l'inversibilité de M. On pose $A = 6M$.

(a) Calculer $(A - 3I_3)^2$ puis $(A - 6I_3)(A - 3I_3)^2$.

(b) En déduire que A est inversible et donner l'inverse de A.

(c) Conclure à l'inversibilité de M et donner la matrice inverse de M.

(4) On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $M^{-n} = (M^{-1})^n$. Vérifier que la formule obtenue en (2) reste vraie pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Concours blanc 1. Epreuve b.

Veillez à bien justifier vos réponses : un exercice bien traité rapporte des points, un exercice traité de façon non rigoureuse ne rapporte pas de points. Malus de 2 points pour les copies mal rédigées. La durée de l'épreuve est de 4 heures. Aucune sortie avant la fin de l'épreuve. Les calculatrices ne sont pas autorisées.

Si, au cours de l'épreuve, vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez le sur votre copie et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous êtes amenés à prendre.

Ce sujet comporte quatre exercices indépendants.

Exercice 1. Dans cet exercice, on admettra le résultat suivant :

> **Proposition.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels.
> Si les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite ℓ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

On considère pour tout $p \in \mathbb{N}$, les intégrales $I_p = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^p}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

(1) Cette question a pour objet le calcul de I_0. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t.$$

- **(a)** Justifier la dérivabilité de g sur $\mathbb{R}$ et donnez l'expression de $g'(x)$.
- **(b)** Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = g(x) + g(-x)$.
  Montrer que h est une fonction constante que l'on précisera. Qu'en déduisez vous sur la fonction g ?
- **(c)** Soit maintenant la fonction f définie sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ par $f(x) = g(\tan x)$. Justifier la dérivabilité de f et montrer que f' est une fonction constante à préciser. En déduire une expression simple pour $f(x)$.
- **(d)** Déterminer la valeur de I_0.

(2) Relation de récurrence.

- **(a)** Calculer I_1.
- **(b)** Calculer $I_p + I_{p+2}$ en fonction de p.
- **(c)** En déduire I_2 et I_3.

(3) Pour tout entier $n \geq 1$, on considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

On pose pour $n \in \mathbb{N}^*, s_n = u_{2n}$ et $t_n = u_{2n+1}$.

- **(a)** Calculer $s_1, s_2, s_3, t_1, t_2, t_3$.
- **(b)** Calculer $s_{n+1} - s_n$ et $t_{n+1} - t_n$ en fonction de n, et montrer que les suites $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
- **(c)** En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

(4) En utilisant le résultat admis en début d'énoncé, montrer que la suite définie par $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, est convergente.

(5) Etablir, pour tout entier $q \geq 1$, les égalités suivantes :

- **(a)** $u_q + 2(-1)^q I_{2q+1} = \ln 2$
- **(b)** $v_q + (-1)^q I_{2q} = \dfrac{\pi}{4}$

(6) Déterminer les limites des suites $(I_p)_{p\in\mathbb{N}}, (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(7) A l'aide d'une intégration par parties, déterminer $\lim\limits_{p\to+\infty} pI_p$.

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le but de cet exercice est la simplification de la somme

$$S = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \cdots + \frac{1}{k+n} \right) \binom{n}{k}$$

qui se réécrit encore $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sum_{j=1}^{n} (-1)^k \frac{1}{k+j} \binom{n}{k}$

(1) Soit $j \in [\![1, n]\!]$. Montrer que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k+j} \binom{n}{k} = \int_0^1 t^{j-1}(1-t)^n \mathrm{d}t$.

(2) Montrer que pour tout réel $t \in [0,1]$, $(1-t)^n \displaystyle\sum_{j=1}^{n} t^{j-1} = (1-t)^{n-1}(1-t^n)$.

(3) En déduire que $S = \dfrac{1}{n} - \displaystyle\int_0^1 t^n (1-t)^{n-1} \mathrm{d}t$

(4) Soit $m \in \mathbb{N}$ tel que $m \geq 2$. En intégrant par parties, établir une relation entre $\displaystyle\int_0^1 t^m(1-t)^{m-1}\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^1 t^{m+1}(1-t)^{m-2}\mathrm{d}t$ et en déduire l'expression de $\displaystyle\int_0^1 t^m(1-t)^{m-1}\mathrm{d}t$ en fonction de m (on mettra en évidence un coefficient binômial). Conclure.

Exercice 3. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $a_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = a_n + \mathrm{e}^{-a_n}$.

On introduit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = x + \mathrm{e}^{-x}$.

(1) Nature de la suite (a_n).

(a) Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

(b) Etudier les variations de la fonctions f.

(c) Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'inégalité $a_n \geq \ln(n+1)$ et en déduire la limite de la suite (u_n) lorsque n tend vers l'infini.

(2) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = a_n - \ln(n)$.

(a) Etablir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'inégalité $b_n > 0$.

(b) Etablir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'encadrement $\dfrac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln n \leq \dfrac{1}{n}$.

(c) Montrer que la suite (b_n) est décroissante, puis qu'elle est convergente.

Exercice 4 (D'après ESCP 1994)**.** Pour tout réel t, on pose

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1-t & -t & 0 \\ -t & 1-t & 0 \\ -t & t & 1-2t \end{pmatrix}$$

et on appelle $\mathcal{M}$ l'ensemble des matrices de cette forme.
Par exemple, les matrices

$$P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } Q = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

sont des matrices appartenant à l'ensemble $\mathcal{M}$ puisque $P = A(1)$ et $Q = A(\frac{1}{2})$.

(1) Soient s et t deux réels. Calculer le produit matriciel $A(s)A(t)$ et vérifier que $A(s)A(t)$ est encore une matrice de $\mathcal{M}$ en précisant le réel u tel que $A(s)A(t) = A(u)$.

(2) On s'intéresse ici aux matrices inversibles de $\mathcal{M}$.

(a) La matrice $Q = A(\frac{1}{2})$ est-elle inversible ?

(b) Montrer que si $t \neq \frac{1}{2}$, la matrice $A(t)$ est inversible et donner son inverse. On vérifiera que $A(t)^{-1}$ est encore une matrice de $\mathcal{M}$.

(3) Déterminer les matrices S de $\mathcal{M}$ solutions de l'équation $S^2 = A(-\frac{3}{2})$.

(4) On note J la matrice $A(-1)$ et on cherche à expliciter J^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. On rappelle que $J^0 = I_3$ par convention, où I_3 est la matrice identité.

(a) Montrer qu'il existe une suite (t_n) telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ A(t_n) = J^n.$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer une relation de récurrence entre t_{n+1} et t_n.

(c) Déterminer alors la matrice J^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$ en la représentant avec ses coefficients.

Devoir surveillé 6.

Veillez à bien justifier vos réponses : un exercice bien traité rapporte des points, un exercice traité de façon non rigoureuse ne rapporte pas de points.

Soignez votre écriture et votre rédaction, faites des phrases complètes et $\boxed{\text{encadrez vos résultats.}}$

Le malus de 2 points pour les copies non soignées ou mal rédigées sera appliqué.
La durée de l'épreuve est de 4 heures.
Aucune sortie avant la fin de l'épreuve.
Les calculatrices ne sont pas autorisées.

Si, au cours de l'épreuve, vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez le sur votre copie et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous êtes amenés à prendre.

Ce sujet comporte quatre exercices indépendants.
Laissez une demi-page de garde pour les observations.

Exercice 1. Soit f la fonction définie sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ par $f(x) = \dfrac{1}{\cos x}$.
On admet que la fonction f est indéfiniment dérivable sur $[0, \frac{\pi}{4}]$.
On note $f^{(0)} = f$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f^{(n)}$ est la dérivée n^{e} de la fonction f.
Ainsi, $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = f''$, etc.

(1) Calculer, pour $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$, les dérivées $f'(x)$ et $f''(x)$ et montrer qu'elles s'écrivent sous la forme

$$f'(x) = \frac{P_1(\sin x)}{\cos^2(x)} \text{ et } f''(x) = \frac{P_2(\sin x)}{\cos^3(x)}$$

où P_1 et P_2 sont deux polynômes à déterminer.

(2) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, il existe un polynôme P_n tel que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$,

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin x)}{\cos^{n+1}(x)}$$

et

$$P_n = (1 - X^2)P'_{n-1} + (n+1)XP_{n-1}$$

(3) Déterminer, pour tout entier naturel n non nul, le degré et le coefficient dominant du polynôme P_n.

Exercice 2. On note E l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifient la relation de récurrence

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = (4n+2)u_n + u_{n-1}$$

(1) On considère les deux suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartenant à E et définies par $\alpha_0 = \beta_1 = 1$ et $\alpha_1 = \beta_0 = 0$.

- **(a)** Étudier la monotonie des suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- **(b)** Montrer que les suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendent vers l'infini.
- **(c)** Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\alpha_{n+1}\beta_n - \alpha_n\beta_{n+1} = (-1)^{n+1}$.
- **(d)** Montrer que les deux suites $\left(\dfrac{\alpha_{2n}}{\beta_{2n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\left(\dfrac{\alpha_{2n+1}}{\beta_{2n+1}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes. On notera ℓ leur limite commune.
- **(e)** Que peut-on dire de la suite $\left(\dfrac{\alpha_n}{\beta_n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$?

(2) Comparaison asymptotique des suites.

- **(a)** Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $\left|\dfrac{\alpha_n}{\beta_n} - \ell\right| \leq \dfrac{1}{\beta_n\beta_{n+1}}$.

(b) Déterminer $\lim_{n\to+\infty}(\alpha_n - \ell\beta_n)$.

(c) Soit $\mu \in \mathbb{R}$. Déterminer $\lim_{n\to+\infty}(\alpha_n - \mu\beta_n)$ en fonction de la position de μ par rapport à ℓ.

(3) Dans cette question, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne une suite de E.

(a) Montrer qu'il existe deux réels λ et λ' tels que :

$$u_0 = \lambda\alpha_0 - \lambda'\beta_0 \text{ et } u_1 = \lambda\alpha_1 - \lambda'\beta_1.$$

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda\alpha_n - \lambda'\beta_n$.

(c) Montrer que si $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$, alors $\lambda' = \lambda\ell$.

Exercice 3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $I_n = \displaystyle\int_0^1 (1-x)^n \mathrm{e}^{-2x}\, dx$.

(1) Calculer I_0 et I_1. Étudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n\geq 0}$.

(2) Montrer que la suite $(I_n)_{n\geq 0}$ converge et déterminer sa limite.

(3) Trouver une relation entre I_{n+1} et I_n. En déduire la limite de nI_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 4. On considère les matrices $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Soit de plus la matrice $M = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 2/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 2/3 \end{pmatrix}$.

(1) Exprimer J^2 en fonction de J. En déduire, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, J^n en fonction de J.

(2) En déduire, en utilisant la formule du binôme, que, pour tout entier naturel n :

$$M^n = \frac{1}{2^n} I_3 + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) J.$$

(3) Determination d'un polynôme annulateur de M. On pose $A = 6M$.

(a) Calculer le produit $(A - 6I_3)(A - 3I_3)^2$.

(b) En déduire que A est inversible et exprimer l'inverse de A en fonction de A^2, A et I_3.

(c) A l'aide de (3a), montrer que $4M^3 - 8M^2 + 5M - I_3 = 0$.

(4) Calcul de M^n par un polynôme annotateur. On introduit le polynôme $B(X) = 4X^3 - 8X^2 + 5X - 1$.

(a) Factoriser le polynôme B dans $\mathbb{R}[X]$ sachant qu'il possède une racine évidente.

(b) Déterminer le reste dans la division euclidienne du polynôme X^n par le polynôme $B(X)$.

(c) En déduire le calcul de M^n et retrouver le résultat de la question (2).

Exercice 5. Soit p un entier de $\mathbb{N}^*$. On confond fonction polynomiale et polynôme associé.

(1) Soit f la fonction polynomiale définie par $f(x) = x^{2p+1} + x^{2p} - 2p$.
Étudier les variations de f et justifier que $f(x) = 0$ a une unique solution dans $\mathbb{R}$. On la note λ.

(2) Soit $a \in \mathbb{C}$ et n un entier tel que $n \geq 2$. Soit $P(X)$ un polynôme à coefficients complexes de degré n s'écrivant sous la forme $P(X) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k X^k$. On note P' le polynôme dérivé de P.

(a) Donner l'expression de $P'(X)$.

(b) On pose $Q(X) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \big(\sum_{i=0}^{k-1} a^{k-i-1} X^i \big)$.
Établir que $P(X) - P(a) = (X - a)Q(X)$. En déduire que $(X - a)^2$ divise $(P(X) - P(a))$ si et seulement si $\sum_{k=1}^{n} k\alpha_k a^{k-1} = 0$.

(c) Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur $P(a)$ et $P'(a)$ pour que a soit racine au moins double de P.

(3) Retour à l'étude des racines du polynôme $X^{2p+1} + X^{2p} - 2p$.

(a) Montrer que le polynôme $X^{2p+1} + X^{2p} - 2p$ admet $(2p+1)$ racines simples dans $\mathbb{C}$, toutes non nulles. On les notera $z_1, z_2, \cdots, z_{2p+1}$ avec $z_{2p+1} = \lambda$.

(b) Montrer que pour tout k de $[\![1, 2p+1]\!]$, $|z_k| \geq \lambda$. (On pourra considérer $f(|z_k|)$). Montrer que l'égalité a lieu si et seulement si $k = 2p + 1$.

Devoir surveillé 6.

Veillez à bien justifier vos réponses : un exercice bien traité rapporte des points, un exercice traité de façon non rigoureuse ne rapporte pas de points.

Soignez votre écriture et votre rédaction, faites des phrases complètes et encadrez vos résultats.

Le malus de 2 points pour les copies non soignées ou mal rédigées sera appliqué.

La durée de l'épreuve est de 4 heures.
Aucune sortie avant la fin de l'épreuve.
Les calculatrices ne sont pas autorisées.

Si, au cours de l'épreuve, vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez le sur votre copie et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous êtes amenés à prendre.

Ce sujet comporte quatre exercices indépendants.
Laissez une demi-page de garde pour les observations.

Exercice 1. Soit f la fonction définie sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ par $f(x) = \dfrac{1}{\cos x}$.

On admet que la fonction f est indéfiniment dérivable sur $[0, \frac{\pi}{4}]$.
On note $f^{(0)} = f$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f^{(n)}$ est la dérivée n^{e} de la fonction f.
Ainsi, $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = f''$, etc.

(1) Calculer, pour $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$, les dérivées $f'(x)$ et $f''(x)$ et montrer qu'elles s'écrivent sous la forme

$$f'(x) = \frac{P_1(\sin x)}{\cos^2(x)} \text{ et } f''(x) = \frac{P_2(\sin x)}{\cos^3(x)}$$

où P_1 et P_2 sont deux polynômes à déterminer.

(2) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, il existe un polynôme P_n tel que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$,

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin x)}{\cos^{n+1}(x)}$$

et

$$P_n = (1 - X^2)P'_{n-1} + (n+1)XP_{n-1}$$

(3) Déterminer, pour tout entier naturel n non nul, le degré et le coefficient dominant du polynôme P_n.

Exercice 2. On note E l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifient la relation de récurrence

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = (4n+2)u_n + u_{n-1}$$

(1) On considère les deux suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartenant à E et définies par $\alpha_0 = \beta_1 = 1$ et $\alpha_1 = \beta_0 = 0$.

- **(a)** Étudier la monotonie des suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- **(b)** Montrer que les suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendent vers l'infini.
- **(c)** Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\alpha_{n+1}\beta_n - \alpha_n\beta_{n+1} = (-1)^{n+1}$.
- **(d)** Montrer que les deux suites $\left(\dfrac{\alpha_{2n}}{\beta_{2n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\left(\dfrac{\alpha_{2n+1}}{\beta_{2n+1}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes. On notera ℓ leur limite commune.
- **(e)** Que peut-on dire de la suite $\left(\dfrac{\alpha_n}{\beta_n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$?

(2) Comparaison asymptotique des suites.

- **(a)** Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $\left|\dfrac{\alpha_n}{\beta_n} - \ell\right| \leq \dfrac{1}{\beta_n\beta_{n+1}}$.

(b) Déterminer $\lim_{n\to+\infty}(\alpha_n - \ell\beta_n)$.

(c) Soit $\mu \in \mathbb{R}$. Déterminer $\lim_{n\to+\infty}(\alpha_n - \mu\beta_n)$ en fonction de la position de μ par rapport à ℓ.

(3) Dans cette question, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne une suite de E.

(a) Montrer qu'il existe deux réels λ et λ' tels que :

$$u_0 = \lambda\alpha_0 - \lambda'\beta_0 \text{ et } u_1 = \lambda\alpha_1 - \lambda'\beta_1.$$

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda\alpha_n - \lambda'\beta_n$.

(c) Montrer que si $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$, alors $\lambda' = \lambda\ell$.

Exercice 3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $I_n = \displaystyle\int_0^1 (1-x)^n \mathrm{e}^{-2x}\, dx$.

(1) Calculer I_0 et I_1. Étudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n\geq 0}$.

(2) Montrer que la suite $(I_n)_{n\geq 0}$ converge et déterminer sa limite.

(3) Trouver une relation entre I_{n+1} et I_n. En déduire la limite de nI_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 4. Soit p un entier de $\mathbb{N}^*$. On confond fonction polynomiale et polynôme associé.

(1) Soit f la fonction polynomiale définie par $f(x) = x^{2p+1} + x^{2p} - 2p$.
Étudier les variations de f et justifier que $f(x) = 0$ a une unique solution dans $\mathbb{R}$. On la note λ.

(2) Soit $a \in \mathbb{C}$ et n un entier tel que $n \geq 2$. Soit $P(X)$ un polynôme à coefficients complexes de degré n s'écrivant sous la forme $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k X^k$. On note P' le polynôme dérivé de P.

(a) Donner l'expression de $P'(X)$.

(b) On pose $Q(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \Big(\sum_{i=0}^{k-1} a^{k-i-1} X^i\Big)$.
Établir que $P(X) - P(a) = (X-a)Q(X)$. En déduire que $(X-a)^2$ divise $(P(X) - P(a))$ si et seulement si $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\alpha_k a^{k-1} = 0$.

(c) Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur $P(a)$ et $P'(a)$ pour que a soit racine au moins double de P.

(3) Retour à l'étude des racines du polynôme $X^{2p+1} + X^{2p} - 2p$.

(a) Montrer que le polynôme $X^{2p+1} + X^{2p} - 2p$ admet $(2p+1)$ racines simples dans $\mathbb{C}$, toutes non nulles. On les notera $z_1, z_2, \cdots, z_{2p+1}$ avec $z_{2p+1} = \lambda$.

(b) Montrer que pour tout k de $[\![1, 2p+1]\!]$, $|z_k| \geq \lambda$. (On pourra considérer $f(|z_k|)$). Montrer que l'égalité a lieu si et seulement si $k = 2p+1$.

Exercice 5. On considère les matrices $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Soit de plus la matrice $M = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 2/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 2/3 \end{pmatrix}$.

(1) Exprimer J^2 en fonction de J. En déduire, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, J^n en fonction de J.

(2) En déduire, en utilisant la formule du binôme, que, pour tout entier naturel n :

$$M^n = \frac{1}{2^n} I_3 + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) J.$$

(3) Determination d'un polynôme annulateur de M. On pose $A = 6M$.

- **(a)** Calculer le produit $(A - 6I_3)(A - 3I_3)^2$.
- **(b)** En déduire que A est inversible et exprimer l'inverse de A en fonction de A^2, A et I_3.
- **(c)** A l'aide de (3a), montrer que $4M^3 - 8M^2 + 5M - I_3 = 0$.

(4) Calcul de M^n par un polynôme annotateur. On introduit le polynôme $B(X) = 4X^3 - 8X^2 + 5X - 1$.

- **(a)** Factoriser le polynôme B dans $\mathbb{R}[X]$ sachant qu'il possède une racine évidente.
- **(b)** Déterminer le reste dans la division euclidienne du polynôme X^n par le polynôme $B(X)$.
- **(c)** En déduire le calcul de M^n et retrouver le résultat de la question (2).

Devoir surveillé 7.

Veillez à bien justifier vos réponses : un exercice bien traité rapporte des points, un exercice traité de façon non rigoureuse ne rapporte pas de points.

Soignez votre écriture et votre rédaction, faites des phrases complètes et encadrez vos résultats.

Le malus de 2 points pour les copies non soignées ou mal rédigées sera appliqué.
La durée de l'épreuve est de 4 heures.
Aucune sortie avant la fin de l'épreuve.
Les calculatrices ne sont pas autorisées.

Si, au cours de l'épreuve, vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez le sur votre copie et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous êtes amenés à prendre.

Ce sujet comporte quatre exercices indépendants.
Laissez une demi-page de garde pour les observations.

Exercice 1. Soit f la fonction définie sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ par $f(x) = \dfrac{1}{\cos x}$.

On admet que la fonction f est indéfiniment dérivable sur $[0, \frac{\pi}{4}]$.

On note $f^{(0)} = f$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f^{(n)}$ est la dérivée n^{e} de la fonction f.

Ainsi, $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = f''$, etc.

(1) Calculer, pour $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$, les dérivées $f'(x)$ et $f''(x)$ et montrer qu'elles s'écrivent sous la forme

$$f'(x) = \frac{P_1(\sin x)}{\cos^2(x)} \text{ et } f''(x) = \frac{P_2(\sin x)}{\cos^3(x)}$$

où P_1 et P_2 sont deux polynômes à déterminer.

(2) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, il existe un polynôme P_n tel que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$,

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin x)}{\cos^{n+1}(x)} \text{ et } P_n = (1 - X^2)P'_{n-1} + nXP_{n-1}$$

(3) Déterminer, pour tout entier naturel n non nul, le degré et le coefficient dominant du polynôme P_n.

Exercice 2. On considère l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et l'application g de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ définies par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x} \ln(1 + \mathrm{e}^x) \text{ et } g(x) = \frac{x}{1+x} - \ln(1 + x)$$

(1) **(a)** Etudier le signe de $g(x)$, selon les valeurs de x.

(b) Étudier les variations de la fonction f.

(c) Déterminer les fonctions φ définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ qui vérifient la relation :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi'(x) + \varphi(x) = \frac{1}{1 + \mathrm{e}^x}.$$

(On pourra commencer par multiplier chaque membre de l'équation par e^x)

(2) On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = a \in \mathbb{R}^+$ et la relation : $\forall n \geq 0, u_{n+1} = f(u_n)$.

(a) Montrer qu'il existe un unique réel α tel que $f(\alpha) = \alpha$, et vérifier que α appartient à l'intervalle $]0, 1[$.

(b) Montrer que pour tout $x \geq 0$, on a : $-\ln 2 \leq f'(x) \leq 0$.

(c) En déduire, quelque soient les réels positifs x et y, $|f(x) - f(y)| \leq |\ln 2| \times |x - y|$.

(d) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.

Exercice 3. Etant donnée une fonction $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ on note, pour tout entier $n \geq 1$, $\quad f_n$ la fonction obtenue en composant n fois f avec elle-même donc :

$$f_n = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ fois}}$$

Ainsi $f_1 = f,\ f_2 = f \circ f, f_3 = f \circ f \circ f$, etc...
Dans cet exercice, on admettra le résultat suivant :

> **Proposition.** Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.
> Si f est continue sur I et injective alors f est strictement monotone sur I.

On s'intéresse dans cet exercice au problème suivant : existe-t-il des fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(f(x)) - 2f(x) + x = 0 \ ? \tag{1}$$

Dans toute la suite, la lettre f désigne une fonction continue solution du problème (1).

(1) **(a)** Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(y) = f(y) - 2y$. Exprimer, pour tout réel x, $g \circ f(x)$ en fonction de x

(b) Montrer que f est injective et en déduire que f est strictement monotone.

(2) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(y) = f(y) - y$. Exprimer, pour tout réel x, $h \circ f(x)$ en fonction de $h(x)$.

(3) Dans cette question, on veut montrer que f n'est pas strictement décroissante. On suppose, par l'absurde, qu'elle l'est.

(a) Expliquer pourquoi on peut affirmer qu'il existe un réel a tel que $f(a) \neq a$.

(b) A l'aide de la fonction h, montrer que les cas $f(a) < a$ et $f(a) > a$ sont impossibles.

(c) Conclure quant à la monotonie de f.

(4) Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la propriété vérifiée par f, on a $f_2(x) = 2f(x) - x$.

(a) Exprimer $f_3(x)$ en fonction de $f(x)$ et de x.

(b) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, $\quad f_n(x) = nf(x) - (n-1)x$.

(5) On veut montrer dans cette question que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
Soient a et b deux réels tels que $a > b$.

(a) Justifier, pour tout entier $n \geq 2$, l'inégalité $f_n(a) > f_n(b)$.

(b) A l'aide de la question (4), montrer que $f(a) - f(b) \geq a - b$.

(c) En déduire les limites $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

(d) Conclure.

(6) Puisque f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, elle admet une bijection réciproque notée f^{-1}.

(a) Montrer que f^{-1} est aussi une solution du problème initial, c'est à dire qu'elle vérifie :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad f^{-1}(f^{-1}(y)) - 2f^{-1}(y) + y = 0.$$

(b) En utilisant les résultats de la question (5), montrer que pour tous réels a et b,

$$f(a) - f(b) = a - b.$$

(c) En déduire qu'il existe un réel c tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x + c$.

(d) Conclure.

Exercice 4. On désigne par n un entier naturel tel que $n \geq 2$.

Une urne contient une boule blanche et $n-1$ boules noires.

Trois joueurs A, B et C tirent à tour de rôle une boule de cette urne dans l'ordre suivant : A joue en premier, B joue après A, C joue après B, puis A joue après C etc.

Les tirages se font sans remise de la boule tirée.

Le gagnant est le premier des trois qui tire la boule blanche.

On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

— A_n l'événement « A gagne au n^{e} tirage »

— B_n l'événement « B gagne au n^{e} tirage »

— C_n l'événement « C gagne au n^{e} tirage »

On note A (resp B, C) l'événement « le joueur A (resp. B, C) est le gagnant . »

(1) Montrer que pour tout entier k tel que $3k+3 \leq n$,

$$P(A_{3k+1}) = P(B_{3k+2}) = P(C_{3k+3}) = \frac{1}{n}.$$

(2) On suppose que $n = 3m+1$ où $m \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$P(A) = \frac{m+1}{3m+1}, \ P(B) = P(C) = \frac{m}{3m+1}.$$

(3) On suppose que $n = 3m+2$ où $m \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$P(A) = P(B) = \frac{m+1}{3m+2}, \ P(C) = \frac{m}{3m+2}.$$

(4) On suppose que $n = 3m+3$ où $m \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{3}.$$

Concours blanc 1. Epreuve a.

Veillez à bien justifier vos réponses : un exercice bien traité rapporte des points, un exercice traité de façon non rigoureuse ne rapporte pas de points. Malus de 2 points pour les copies mal rédigées. La durée de l'épreuve est de 4 heures. Aucune sortie avant la fin de l'épreuve. Les calculatrices ne sont pas autorisées.

Si, au cours de l'épreuve, vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez le sur votre copie et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous êtes amenés à prendre.

Ce sujet comporte quatre exercices indépendants.

Exercice 1. On lance un dé équitable trois fois de suite. Les numéros obtenus successivement sont notés a, b, c.

(1) Calculer la probabilité que l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ ait deux racines réelles distinctes.

(2) Calculer la probabilité que l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'ait pas de racines réelles.

(3) On pose $P = aX^2 + bX + c$. Calculer la probabilité que le polynôme P admette une racine double.

(4) Calculer la probabilité que le polynôme $X - a$ divise le polynôme $X^2 + bX + c$.

(5) Calculer la probabilité que la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ soit inversible.

Exercice 2. On considère l'application f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f(x) = x^x = \mathrm{e}^{x \ln x} \\ \qquad\qquad f(0) = 1 \end{cases}$$

Pour deux fonctions u et v définies sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$, on dit que u **est négligeable devant** v **au voisinage de** $+\infty$ si $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{u(x)}{v(x)} = 0$.

(1) Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}_+$.

(2) Dresser le tableau de variations de f.

(3) On considère un repère orthonormal $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ du plan et l'on note $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans ce repère. Quelle est la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à sa tangente $(\mathcal{T})$ en son point d'abscisse 1 ?

(4) On note g la restriction de f à l'intervalle $I = \left[\dfrac{1}{\mathrm{e}}, +\infty\right[$. Démontrer que g réalise une bijection de I sur un intervalle J que l'on précisera.

(5) Démontrer qu'il existe une application φ de J vers I telle que :

$$\forall x \in J, \quad \varphi(x)^{\varphi(x)} = x.$$

(6) Etablir que φ est négligeable devant la fonction logarithme népérien au voisinage de plus l'infini.

(7) Déterminer le plus grand intervalle K inclus dans J sur lequel φ est dérivable et montrer que :

$$\forall x \in K, \quad \varphi'(x) = \frac{\varphi(x)}{x(\varphi(x) + \ln x)}.$$

(8) On note (Γ) la courbe représentative de φ dans le repère $\mathcal{R}$ et, pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$, on note $(\mathcal{T}_n)$ la tangente à (Γ) en son point d'abscisse n.

(a) Déterminer l'abscisse u_n du point d'intersection de $(\mathcal{T}_n)$ avec l'axe $(O, \overrightarrow{i})$.

(b) Donner un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers plus l'infini.

Exercice 3. Etude de convergence de quelques séries.

(1) **(a)** Montrer que $\dfrac{1}{1+x} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{1+x}$ pour tout $x \in [0, 1[$ et tout $n \in \mathbb{N}$. L'égalité est elle vraie pour $x = 1$?

(b) En déduire que $\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t} \mathrm{d}t$ pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$.

(c) Montrer alors que $\left| \ln 2 - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} \right| \leq \frac{1}{n+2}$ et conclure quant à la nature et à la somme de la série $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1}$.

(2) Compléter les pointillés du programme suivant pour qu'il calcule une valeur approchée de $\ln 2$ à 10^{-3} près.

Le programme est à recopier intégralement sur votre copie.

On précise que la fonction *pmodulo*, dont la syntaxe est `pmodulo(n,p)`, renvoie le reste de la division (euclidienne) de n par p.

Lorsque $p = 2$, l'instruction `pmodulo(n,2)` renvoie donc 1 si n est un entier impair et 0 si n est un entier pair.

```
n=0;
s=1;

while ........... do
   n=....... ;
   if pmodulo(n,2)==...... then s=s+1/n
                            else  ..........   ;
   end;
end;

disp(s)
```

(3) **(a)** Déterminer deux nombres réels a et b tels que pour tout réel $x \notin \{-1, 0\}$

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}.$$

(b) Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ converge et calculer sa somme.

(c) Montrer, pour tout entier $N \in \mathbb{N}$, l'égalité : $\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} = \sum_{p=0}^{2N+1} \frac{(-1)^p}{p+1}$

(d) En déduire que la série $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}$ converge et calculer sa somme.

(4) On admet que $\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2}$ converge et calculer sa somme.

(5) **(a)** Déterminer deux nombres réels a et b tels que pour tout réel $x \notin \{-1, -\frac{1}{2},\ 0\}$

$$\frac{1}{x(x+1)(2x+1)^2} = \frac{a}{x(x+1)} + \frac{b}{(2x+1)^2}.$$

(b) Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)(2n+1)^2}$ converge et calculer sa somme.

Exercice 4. L'objet de cet exercice est le calcul de l'intégrale

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\sin x} \mathrm{d}x.$$

(1) Soit $x \in]-\pi, \pi[$. On pose $t = \tan \frac{x}{2}$. A l'aide de la remarque $\sin x = \sin(2\frac{x}{2})$, exprimez $\sin x$ en fonction de la variable t.

(2) Déterminer quatre nombres réels $a,\ b,\ c,\ d$ tels que

$$\forall t \in [0,\ 1], \quad \frac{t}{(1+t^2)(1+t)^2} = \frac{a}{1+t} + \frac{b}{(1+t)^2} + \frac{ct+d}{1+t^2}$$

(3) Calculer l'intégrale $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\sin x} \mathrm{d}x$ (faire le changement de variable $t = \tan \frac{x}{2}$).

Concours blanc 2. Epreuve b.

Veillez à bien justifier vos réponses : un exercice bien traité rapporte des points, un exercice traité de façon non rigoureuse ne rapporte pas de points. Malus de 2 points pour les copies mal rédigées. La durée de l'épreuve est de 4 heures. Aucune sortie avant la fin de l'épreuve. Les calculatrices ne sont pas autorisées.

Si, au cours de l'épreuve, vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez le sur votre copie et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous êtes amenés à prendre.

Ce sujet comporte trois exercices indépendants.

Exercice 1. Pour tout réel positif x et tout entier naturel n, on note $U_n(x), V_n(x), S_n(x)$ les sommes partielles d'indice n suivantes

$$U_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{(2k)!},\ V_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{(2k+1)!},\ S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

(1) **(a)** Rappeler la limite de la suite $(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$.

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$U_n(x) + \sqrt{x}V_n(x) = S_{2n+1}(\sqrt{x})$$
$$U_n(x) - \sqrt{x}V_n(x) = S_{2n+1}(-\sqrt{x})$$

(c) En déduire que les séries $\displaystyle\sum_{k\geq 0} \frac{x^k}{(2k)!}$ et $\displaystyle\sum_{k\geq 0} \frac{x^k}{(2k+1)!}$ sont convergentes et calculer leur somme.

(2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note a_n le nombre de triplets (x_1, x_2, x_3) d'entiers naturels solutions de l'équation

$$x_1 + x_2 + x_3 = n.$$

(a) Déterminer a_n.

(b) Soit x un nombre réel. Etudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ en fonction du réel x et calculer sa somme lorsqu'elle converge.

Exercice 2. On pourra utiliser, sans justification, le résultat suivant : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

Alors il existe des réels λ et μ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda r^n + \mu s^n$$

où r et s sont les solutions de l'équation $x^2 - ax - b = 0$. De plus, les réels λ et μ sont les solutions du système

$$\begin{cases} \lambda + \mu = u_0 \\ \lambda r + \mu s = u_1 \end{cases}$$

Première partie.

On effectue une suite de lancers d'une pièce de monnaie. On suppose que les résultats des lancers sont indépendants et qu'à chaque lancer, la pièce donne Face avec la probabilité p $(0 < p < 1)$ et Pile avec la probabilité $q = 1 - p$.

On s'intéresse au nombre de lancers nécessaires pour obtenir deux Face de suite (c'est-à-dire lors de deux lancers consécutifs).

On suppose donné un espace probabilisé, muni d'une probabilité P, modélisant cette expérience.

Pour tout entier $n \geq 1$, on note U_n l'événement « on obtient deux Face de suite, pour la première fois, aux lancers numéro n et $n+1$ », et on pose $u_n = P(U_n)$.

Pour tout entier $n \geq 2$, on note

— A_n l'événement « les n premiers lancers ne donnent pas deux Face de suite et le n^e lancer donne Face »,

— B_n l'événement « les n premiers lancers ne donnent pas deux Face de suite et le n^e lancer donne Pile ».

Enfin, on pose $x_n = P(A_n)$ et $y_n = P(B_n)$.

(1) Relation de récurrence entre $x_{n+1}, y_{n+1}, x_n, y_n$

(a) Déterminer $u_1, x_2, y_2, u_2, x_3, y_3, u_3$.

(b) Trouver pour $n \geq 2$, une relation simple entre x_n et u_n.

(c) Pour tout $n \geq 2$, déterminer les probabilités conditionnelles :

$$P_{A_n}(A_{n+1}), P_{B_n}(A_{n+1}), P_{A_n}(B_{n+1}), P_{B_n}(B_{n+1})$$

(d) En déduire, pour tout $n \geq 2$, les relations suivantes :

$$\begin{cases} x_{n+1} &= & py_n \\ y_{n+1} &= & q(x_n + y_n) \end{cases}$$

(2) Probabilité d'obtenir deux Faces de suite.

(a) On suppose que $p = \frac{1}{2}$. Pour $n \geq 2$, on pose $v_n = 2^n y_n$. Déterminer une relation de récurrence entre v_{n+2}, v_{n+1} et v_n.

(b) En déduire, pour tout entier naturel n, v_n en fonction de n. (On pourra poser $v_0 = v_1 = 1$.)

(c) En déduire, pour tout $n \geq 2$, une expression de x_n puis de u_n, en fonction de n.

(d) Vérifier que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n = 1$ et en donner une interprétation.

Deuxième partie.

On dispose de deux pièces équilibrées, $\left(p = q = \dfrac{1}{2}\right)$ et on réalise l'expérience suivante : pour n entier, $n \geq 1$, on répète n lancers simultanés des deux pièces distinctes numérotées 1 et 2.

Les lancers sont mutuellement indépendants.

On note les résultats sous forme d'un tableau :

$$\begin{pmatrix} N^\circ \text{ du lancer} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & n \\ \text{Pièce 1 :} & P & P & F & P & F & F & \dots & \dots \\ \text{Pièce 2 :} & F & P & F & F & P & P & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Pour $k \in \{1, \dots, n\}$, on considère l'évènement :

A_k : « A l'issue du k-ième lancer les deux pièces ont donné le même nombre de P. »

Dans l'exemple ci-dessus, seul A_6 est réalisé.

Dans la suite du problème, on pose $P(A_0) = 1$, et on s'intéresse particulièrement à l'évènement A_n.

(3) **(a)** Soit $j \in \{0, \dots, n\}$. Calculer la probabilité pour qu'à l'issue des n lancers la première pièce ait donné j fois la face Pile.

(b) Soit $j \in \{0, \dots, n\}$, on désigne par $p_j(n)$ la probabilité pour qu'à l'issue des n lancers les deux pièces aient donné chacune j fois la face Pile. Calculer $p_j(n)$.

(c) En déduire que $P(A_n) = \dfrac{1}{2^{2n}} \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}^2$.

(4) Calcul de $P(A_6)$ par Scilab.

(a) Quel est le résultat de l'instruction `mystere(3,5)` où `mystere` est la fonction ci-dessous ?

```
function c=mystere(k,p)

if k==0 | k==p then c=1
              else      c=1;
                         a=k;
                         b=p;
                        while (a>0&b>0) then
                             c=(a/b)*c;
                             a=a-1;
                             b=b-1;
                        end;
end;

endfunction
```

(b) Ecrire un programme Scilab, utilisant la fonction `mystere`, permettant le calcul de $P(A_6)$.

Exercice 3. Dans tout le problème, l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est muni de sa base canonique notée $\mathscr{C} = (\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \mathrm{e}_3)$.
On identifie $\mathbb{R}^3$ et $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$: cela signifie que les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ sont notés en colonne. Ainsi

$$\mathrm{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathrm{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathrm{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On note $\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$, Id l'identité de $\mathbb{R}^3$, $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices d'ordre 3 à coefficients réels et I_3 la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
On rappelle aussi que si f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ les notations f^2, f^3, etc. désignent $f \circ f, f \circ f \circ f$, etc.

Il est demandé de faire figurer tous les calculs sur la copie.

Première partie.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ où A est la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -4 & 5 & -3 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

On pose $M = A - I_3$.

(1) **(a)** Montrer que la matrice $M = A - I_3$ n'est pas inversible.

(b) Montrer que le noyau de $f - \mathrm{Id}$ est une droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$ dont on donnera un vecteur directeur u_1. On choisira u_1 de telle sorte que sa première coordonnée dans la base $\mathscr{C}$ soit 1.

(2) On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $u_2 = p\mathrm{e}_2 + q\mathrm{e}_3$ et $u_3 = r\mathrm{e}_1 + s\mathrm{e}_3$, où p, q, r, s sont des réels.

(a) Déterminer les reéels p, q, r, s pour que :

$$f(u_2) = u_1 + u_2 \quad \text{et} \quad f(u_3) = 2u_2 + u_3$$

(b) Vérifier alors que $\mathscr{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(c) Montrer que $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$ et $\mathrm{Im}(f - \mathrm{Id})$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

(3) Calculer M^2 et M^3. En déduire l'expression, pour tout entier naturel n, de la matrice A^n en fonction de n.

(4) L'endomorphisme f est-il bijectif et, le cas échéant, exprimer $f^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ en fonction de x, y et z.

Deuxième partie.

On note g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$g(\mathrm{e}_1) = \frac{1}{2}(3\mathrm{e}_1 + \mathrm{e}_2 + \mathrm{e}_3)$$
$$g(\mathrm{e}_2) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}_1 + 3\mathrm{e}_2 - \mathrm{e}_3)$$
$$g(\mathrm{e}_3) = \mathrm{e}_1 - \mathrm{e}_2 + \mathrm{e}_3$$

(1) Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

(a) Exprimer $g\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ en fonction de x, y et z.

(b) Déterminer une matrice A de format 3×3 telle que $g\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

(c) Exprimer A^2 en fonction de A.

(2) **(a)** Déterminer le noyau de g et en donner une base.

(b) Déterminer une base de l'image de g.

(c) L'endomorphisme g est-il injectif ? surjectif ?

(3) Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Exprimer $g \circ g\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ en fonction de $g\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

(4) Montrer que $\mathrm{Ker}g$ et $\mathrm{Im}g$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.