Mathématique **ECS 1**

06 Sept. 2014

Devoir surveillé 1.
(Programme de Terminale)

Veillez à bien justifier vos réponses : un exercice bien traité rapporte des points, un exercice traité de façon non rigoureuse ne rapporte pas de points. Malus de 2 points pour les copies mal rédigées. La durée de l'épreuve est de 4 heures. Aucune sortie avant la fin de l'épreuve. Les calculatrices ne sont pas autorisées.

Si, au cours de l'épreuve, vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez le sur votre copie et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous êtes amenés à prendre.

Ce sujet comporte cinq exercices indépendants.

Exercice 1. On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par

$$f(x)=\frac{1+\ln x}{x}$$

(1) Etudier les variations de f

La fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme somme et quotient défini de fontions dérivables. Sa dérivée est donnée par $f'(x)=-\dfrac{\ln x}{x^2}$.

Comme $x^2>0$, le signe de f' est celui de $-\ln x$ donc $f'(x)>0$ si et seulement si $x\in]0,1[$.

La fonction f est donc strictement croissante sur $]0,1]$ et strictement décroissante sur $[1,+\infty[$. Comme $\lim\limits_{x\to 0} 1+\ln x=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=+\infty$, on a $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\infty$. La limite $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ découle du théorème des croissances comparées et donne, avec $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$, la limite $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

Le tableau suivant résume tout cela :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
f	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

(2) Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

(a) Déterminer x_1 abscisse du point d'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe $(O,\vec{i})$.

L'abscisse x_1 du point d'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe $(O,\vec{i})$ est solution de l'équation $f(x)=0$. Or $f(x)=0$ si et seulement si $\ln x=-1$ donc l'équation $f(x)=0$ a pour unique solution $x_1=\mathrm{e}^{-1}$.

(b) Déterminer x_2 abscisse du point en lequel la tangente à $\mathcal{C}$ passe par l'origine.

La tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point de coordonnées $(a,f(a))$ a pour équation $y=f'(a)(x-a)+f(a)$.

Cette tangente passe par l'origine si et seulement si $f(a)-af'(a)=0$.

Or

$$\begin{aligned}
f(a)-af'(a)=0 \text{ si et seulement si } &: 1+\ln a=-\ln a\\
\text{si et seulement si } &: \ln a=-\frac{1}{2}\\
\text{si et seulement si } &: a=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

L'abscisse x_2 du point en lequel la tangente à $\mathcal{C}$ passe par l'origine est donc $x_2=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$

(c) Déterminer x_3 abscisse du point en lequel la tangente à $\mathcal{C}$ est parallèle à l'axe $(O,\vec{i})$.

La tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point de coordonnées $(a,f(a))$ est parallèle à l'axe $(O,\vec{i})$ si et seulement si $f'(a)=0$.

Or $f'(a)=0$ si et seulement $\ln a=0$ donc L'abscisse x_3 du point en lequel la tangente à $\mathcal{C}$ est parallèle à l'axe $(O,\vec{i})$ est $x_3=1$.

(d) Déterminer x_4 tel que $f''(x_4) = 0$.

La fonction f' est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme quotient dfini de fonctions dérivables et la dérivée de f' a pour expression $f''(x) = \dfrac{2\ln x - 1}{x^3}$.

Ainsi, $f''(x) = 0$ si et seulement si $x = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$. On a donc $x_4 = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$.

(3) Vérifier que x_1, x_2, x_3, x_4 sont en progression géométrique.

On constate que $x_4 = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}} x_3,\ x_3 = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}} x_2,\ x_2 = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}} x_1$. Donc x_1, x_2, x_3, x_4 sont en progression géométrique.

Exercice 2. Encadrement de $\ln 3$.

(1) **(a)** Déterminer deux nombres réels a et b tels que pour tout $x \neq 1,\ x \neq -1$,

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{a}{1-x} + \frac{b}{1+x}.$$

Pour tout réel $x \neq 1,\ x \neq -1$,

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2} \times \frac{(1-x)+(1+x)}{1-x^2} = \frac{\frac{1}{2}}{1-x} + \frac{\frac{1}{2}}{1+x}.$$

Les réels attendus sont donc $a = \dfrac{1}{2}$ et $b = \dfrac{1}{2}$.

Une autre méthode consiste à mettre au même dénominateur les termes du membre de droite puis d'identifier les numérateurs.

(b) Montrer que $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x^2}\mathrm{d}x = \ln 3$.

Une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x^2}$ sur $]-1, 1[$ est donnée par $x \mapsto \frac{1}{2}\ln|1+x| - \frac{1}{2}\ln|1-x|$, c'est à dire $x \mapsto \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|$

On obtient donc :

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}\right| - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}\right| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}\right| + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}\right| = \ln\left|\frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}\right| = \ln 3$$

(2) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ et on pose $h_n(x) = 1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2n}$.

(a) Calculer $\dfrac{1}{1-x^2} - h_n(x)$ pour $x \neq 1,\ x \neq -1$.

Pour tout réel x, $h_n(x) = 1 + x^2 + (x^2)^2 + \cdots + (x^2)^n$.

Lorsque $x \neq 1$ et $x \neq -1$, on a $x^2 \neq 1$ donc on peut appliquer la formule géométrique :

$$h_n(x) = \frac{1-(x^2)^{n+1}}{1-x^2}$$

d'où on tire

$$\frac{1}{1-x^2} - h_n(x) = \frac{x^{2n+2}}{1-x^2}.$$

(b) Montrer que pour tout $x \in \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$, $\quad 0 \leq \dfrac{1}{1-x^2} - h_n(x) \leq \dfrac{4}{3}x^{2n+2}$.

Lorsque $x \in \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$, on a $0 \leq x^2 \leq \dfrac{1}{4}$ donc $\dfrac{3}{4} \leq 1 - x^2 \leq 1$ donc $1 \leq \dfrac{1}{1-x^2} \leq \dfrac{4}{3}$.

Comme $2n+2$ est pair, $x^{2n+2} \geq 0$ et puisque $1 - x^2 \geq 0$, on a $\dfrac{x^{2n+2}}{1-x^2} \geq 0$ ce qui donne $\dfrac{1}{1-x^2} - h_n(x) \geq 0$.

Comme $\dfrac{1}{1-x^2} \leq \dfrac{4}{3}$ et $x^{2n+2} \geq 0$, on a aussi $\dfrac{x^{2n+2}}{1-x^2} \leq \dfrac{4}{3}x^{2n+2}$, ce qui donne l'autre partie de l'encadrement.

Finalement, pour tout $x \in \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$, $\quad 0 \leq \dfrac{1}{1-x^2} - h_n(x) \leq \dfrac{4}{3}x^{2n+2}$.

(3) On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} h_n(x)\mathrm{d}x$. A l'aide de l'encadrement (2b), montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

L'encadrement précédent se réecrit :

$$\forall x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], \quad \frac{1}{1-x^2} - \frac{4}{3}x^{2n+2} \leq h_n(x) \leq \frac{1}{1-x^2}$$

Chaque expression de cet encadrement définit une fonction continue sur $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ donc par positivité de l'intégrale

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x^2}\mathrm{d}x - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{4}{3}x^{2n+2}\mathrm{d}x \leq \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} h_n(x)\mathrm{d}x \leq \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x^2}\mathrm{d}x.$$

Comme $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{4}{3}x^{2n+2}\mathrm{d}x = \frac{4}{3}\left[\frac{x^{2n+3}}{2n+3}\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{4}{3} \times 2 \times \frac{1}{(2n+3)2^{2n+3}} = \frac{1}{3(2n+3)2^{2n}}$ on obtient

$$\ln 3 - \frac{1}{3(2n+3)2^{2n}} \leq u_n \leq \ln 3$$

Comme $\lim(2n+3) = +\infty$ et $\lim 2^{2n} = +\infty$, par produit et inverse de limites, on a $\lim \frac{1}{3(2n+3)2^{2n}} = 0$. Le théorème de convergence par encadrement s'applique et donne la convergence de la suite (u_n) vers $\ln 3$.

(4) Calculer u_2 et donner un encadrement de $\ln 3$.

Calculons u_2 :

$$\begin{aligned} u_2 &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} h_2(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 1 + x^2 + x^4\mathrm{d}x \\ &= \left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \\ &= 1 + \frac{1}{3} \times \frac{2}{8} + \frac{1}{5} \times \frac{2}{32} \\ &= 1 + \frac{1}{12} + \frac{1}{80} = \frac{263}{240} \end{aligned}$$

ce qui donne l'encadrement suivant pour $\ln 3$: $\frac{263}{240} \leq \ln 3 \leq \frac{263}{240} + \frac{1}{336}$

Exercice 3. On donne les nombres complexes suivants : $a = \sqrt{2}(1+i)$ et $b = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$.

(1) Déterminer la forme exponentielle de a, b et $\frac{a}{b}$.

$a = 2\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}$, $b = \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{6}}$ puis $\frac{a}{b} = 2\mathrm{e}^{\frac{5i\pi}{12}}$

(2) Déterminer la forme algébrique de $\frac{a}{b}$.

Le nombre $b = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ est de module 1 donc $(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i)(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i) = 1$ et par conséquent :

$$\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{2}(1+i)}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i} = \sqrt{2}(1+i)(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}i$$

(3) En déduire $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

L'égalité $2\mathrm{e}^{\frac{5i\pi}{12}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}i$ donne donc

$$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

Exercice 4. On appelle f et g les deux fonctions définies sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \ln(1+x) - x \quad \text{et} \quad g(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}.$$

(1) Etudier les variations de f et de g sur $[0\ ;\ +\infty[$.

Les fonctions f et g sont toutes deux dérivables sur $[0, +\infty[$ comme composée et somme de fonctions dérivables. Pour tout réel $x \geq 0$,

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x} \text{et } g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{x^2}{1+x}$$

On a donc $f'(x) \leq 0 \leq g'(x)$ sur $[0, +\infty[$.
La fonction f est donc décroissante sur $\mathbb{R}^+$ et la fonction g est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

(2) En déduire que pour tout $x \geq 0$, $x - \dfrac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$.

Par décroissance de f, pour tout réel $x \geq 0$, on a $f(x) \leq f(0) = 0$ donc $\ln(1+x) \leq x$.

Par croissance de g, pour tout réel $x \geq 0$, on a $g(x) \geq g(0) = 0$ donc $\ln(1+x) \geq x - \dfrac{x^2}{2}$.

L'encadrement demandé est donc acquis.

On se propose d'étudier la suite (u_n) de nombres réels définie par :

$$u_1 = \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = u_n \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right).$$

(3) Montrer par récurrence que $u_n > 0$ pour tout entier naturel $n \geq 1$.

Pour tout entier $n \geq 1$, on note $\mathscr{P}_n$ la propriété : « $u_n > 0$ ».
— Clairement $u_1 > 0$ donc $\mathscr{P}_1$ est vraie.
— Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathscr{P}_n$ est vraie. Il est clair que $\left(1 + \dfrac{1}{2^{n+1}}\right) > 0$ comme somme de réels strictement positifs. Par hypothèse de récurrence, $u_n > 0$ donc $u_n \left(1 + \dfrac{1}{2^{n+1}}\right) > 0$ comme produit de réels strictement positifs.
On a donc $u_{n+1} > 0$. Ainsi, la propriété $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie dès que $\mathscr{P}_n$ est vraie.
— La propriété $\mathscr{P}$ est vraie au rang 1 et héréditaire à partir de ce rang, elle est donc vraie pour tout entier $n \geq 1$, d'après le principe de récurrence sur $\mathbb{N}$.

(4) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$\ln u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + \cdots + \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right).$$

Pour tout entier $n \geq 1$, on note $\mathscr{Q}_n$ la propriété : « $\ln u_n = \ln\left(1 + \dfrac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \dfrac{1}{2^2}\right) + \cdots + \ln\left(1 + \dfrac{1}{2^n}\right)$. »

— Comme $\ln u_1 = \ln \dfrac{3}{2} = \ln\left(1 + \dfrac{1}{2}\right)$, la propriété $\mathscr{Q}_1$ est vraie.

— Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathscr{Q}_n$ est vraie. D'après la définition de la suite, on a $\ln u_{n+1} = \ln u_n + \ln\left(1 + \dfrac{1}{2^{n+1}}\right)$ et par hypothèse de récurrence, $\ln u_n = \ln\left(1 + \dfrac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \dfrac{1}{2^2}\right) + \cdots + \ln\left(1 + \dfrac{1}{2^n}\right)$ donc

$$\ln u_{n+1} = \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + \cdots + \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right).$$

Ainsi, la propriété $\mathscr{Q}_{n+1}$ est vraie dès que $\mathscr{Q}_n$ est vraie.
— La propriété $\mathscr{Q}$ est vraie au rang 1 et héréditaire à partir de ce rang, elle est donc vraie pour tout entier $n \geq 1$, d'après le principe de récurrence sur $\mathbb{N}$.

(5) On pose $S_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{2^3} + \cdots + \dfrac{1}{2^n}$ et $T_n = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4^2} + \dfrac{1}{4^3} + \cdots + \dfrac{1}{4^n}$.

À l'aide de la question (2), montrer que :

$$S_n - \frac{1}{2}T_n \leq \ln u_n \leq S_n.$$

Soit k un entier supérieur ou égal à 1.

D'après le résultat de la question (2), appliqué avec $x = \dfrac{1}{2^k}$, on a l'encadrement

$$\frac{1}{2^k} - \frac{(\frac{1}{2^k})^2}{2} \leq \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \leq \frac{1}{2^k}.$$

En additionnant membre à membre ces encadrements pour $k = 1, k = 2, \ldots$ jusqu'à $k = n$, on obtient

$$S_n - \frac{1}{2}T_n \leq \ln u_n \leq S_n.$$

(6) Calculer S_n et T_n en fonction de n. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Les sommes S_n et T_n sont des sommes géométriques de raisons respectives $\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{1}{4}$. La formule géométrique donne :

$$S_n = \frac{1}{2} \times \frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n} \text{ et } T_n = \frac{1}{4} \times \frac{1-\frac{1}{4^n}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right)$$

Comme $\lim \dfrac{1}{2^n} = \lim \dfrac{1}{4^n} = 0$, on a $\lim S_n = 1$ et $\lim T_n = \dfrac{1}{3}$.

(7) Etude de la convergence de la suite (u_n).

(a) Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante.

La suite (u_n) est strictement positive d'après la question (3). De plus, pour tout entier $n \geq 1$, on a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \dfrac{1}{2^{n+1}} > 1$ donc $u_{n+1} > u_n$.

La suite (u_n) est donc strictement croissante.

(b) En déduire que (u_n) est convergente. Soit ℓ sa limite.

Le terme S_n est une somme géométrique de termes strictement positifs donc la suite (S_n) est strictement croissante. Elle est par ailleurs convergente de limite 1.

Le théorème de convergence des suites monotones assure alors que la suite (S_n) est majorée par 1 donc pour tout entier $n \geq 1$, $\ln u_n \leq S_n \leq 1$. Cela entraîne que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leq \mathrm{e}^1$ et donc la suite (u_n) est majorée.

Etant, de plus, strictement croissante, elle est convergente.

(c) On admet le résultat suivant : si deux suites (v_n) et (w_n) sont convergentes et telles que $v_n \leq w_n$ pour tout n entier naturel, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} w_n$.

Montrer alors que $\dfrac{5}{6} \leq \ln \ell \leq 1$ et en déduire, un encadrement de ℓ.

On a obtenu à la question (5), l'encadrement suivant

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n - \frac{1}{2}T_n \leq \ln u_n \leq S_n.$$

Comme la suite (u_n) converge vers ℓ en étant strictement croissante, le nombre ℓ est strictement positif donc la suite $(\ln u_n)$ converge vers $\ln \ell$. Chacune des suites intervenant dans l'encadrement précédent est donc convergente ce qui permet d'appliquer le résultat admis :

$$\lim(S_n - \frac{1}{2}T_n) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6} \leq \lim \ln u_n = \ln \ell \leq \lim S_n = 1.$$

donc $\dfrac{5}{6} \leq \ln \ell \leq 1$ et par conséquent $\mathrm{e}^{\frac{5}{6}} \leq \ell \leq \mathrm{e}^1$.

Exercice 5. On dispose d'un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On désigne par p_k la probabilité d'obtenir, lors d'un lancer, la face numérotée k (k est un entier et $1 \leq k \leq 6$).

Ce dé a été pipé de telle sorte que :

- les six faces ne sont pas équiprobables,
- les nombres p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, dans cet ordre, sont six termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison r,
- les nombres p_1, p_2, p_4 dans cet ordre, sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique.

(1) Démontrer que : $p_k = \dfrac{k}{21}$ pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq 6$.

La probabilité que l'une des faces apparaisse est 1. Cette probabilité est aussi égale à $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6$ donc

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1.$$

Les nombres p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, étant six termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison r, on peut écrire

$$p_2 = p_1 + r,\ p_3 = p_1 + 2r,\ p_4 = p1 + 3r,\ p_5 = p_1 + 4r,\ \text{et } p_6 = p_1 + 5r.$$

Les nombres p_1, p_2, p_4 étant, dans cet ordre, trois termes consécutifs d'une suite géométrique, on peut écrire

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{p_4}{p_2} \text{ ou encore } p_2^2 = p_1 p_4.$$

Cette dernière donne l'équation $(p_1+r)^2 = p_1(p_1+3r)$ qui après développement se réduit à $2p_1r + r^2 = 3p_1r$ soit $r^2 = p_1r$.
Or $r^2 = p_1r$ équivaut à $r = 0$ ou $p_1 = r$.
Le cas $r = 0$ conduit à $p_1 = p_2 = p_3 = p_3 = p_4 = p_5 = p_6$ en contradiction avec la première condition de l'énoncé : les six faces ne sont pas équiprobables !
Le bon cas est donc $p_1 = r$ et par conséquent $p_2 = 2r, p_3 = 3r, p_4 = 4r, p_5 = 5r, p_6 = 6r$ et la condition $p_1+p_2+p_3+p_4+p_5+p_6 = 1$ implique que $(1+2+3+4+5+6)r = 1$ donc $r = \frac{1}{21}$ et cela fournit les valeurs attendues par l'énoncé, à savoir $p_k = \frac{k}{21}$ pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq 6$.

(2) On lance ce dé une fois et on considère les évènements suivants :
- A : « le nombre obtenu est pair »
- B : « le nombre obtenu est supérieur ou égal à 3 »
- C : « le nombre obtenu est 3 ou 4 ».

(a) Calculer la probabilité de chacun de ces évènements.
Il est clair que $P(A) = p_2+p_4+p_6 = \frac{2+4+6}{21} = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}$, de même que $P(B) = p_3+p_4+p_5+p_6 = \frac{3+4+5+6}{21} = \frac{18}{21} = \frac{6}{7}$ et $P(C) = p_3+p_4 = \frac{3+4}{21} = \frac{7}{21} = \frac{1}{3}$.

(b) Calculer la probabilité que le nombre obtenu soit supérieur ou égal à 3, sachant qu'il est pair.
La probabilité demandée est $P_A(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{p_4+p_6}{p_2+p_4+p_6} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$.

(c) Les évènements A et B sont-ils indépendants ? Les évènements A et C sont-ils indépendants ?
Les calculs précédents montrent que $P(A)P(B) = \frac{24}{49} \neq \mathbf{\frac{10}{21}} = P(A\cap B)$ donc A et B ne sont pas indépendants.
De même, $P(A)P(C) = \frac{4}{21}$ et $P(A\cap C) = p_4 = \frac{4}{21}$ donc les événements A et C sont indépendants.

(3) On utilise ce dé pour un jeu. On dispose :
- d'une urne U_1 contenant une boule blanche et trois boules noires,
- d'une urne U_2 contenant deux boules blanches et une boule noire.

Le joueur lance le dé :
- s'il obtient un nombre pair, il extrait au hasard une boule de l'urne U_1,
- s'il obtient un nombre impair, il extrait au hasard une boule de l'urne U_2.

On suppose que les tirages sont équiprobables et le joueur est déclaré gagnant lorsqu'il tire une boule blanche, on note G cet évènement.

(a) Déterminer la probabilité de l'évènement $\mathrm{G}\cap\mathrm{A}$, puis la probabilité de l'évènement G.
La formule des probabilités conditionnelles donne $P(G\cap A) = P_A(G)P(A)$. Calculons $P_A(G)$, probabilité de tirer une boule blanche sachant que le dé montre une face paire, c'est à dire encore la probabilté de tirer une boule blanche sachant que l'on choisit l'urne U_1. Il y a une boule blanche parmi les quatre boules de l'urne U_1 donc $P_A(G) = \frac{1}{4}$. Par conséquent, $P(G\cap A) = \frac{1}{4}\times\frac{4}{7} = \frac{1}{7}$.
Le tirage d'une boule blanche peut être réalisé soit dans l'urne U_1, soit dans l'urne U_2 donc $G = (G\cap A)\cup(G\cap\overline{A})$ et puisque A et $\overline{A}$ sont incompatibles, $P(G) = P(G\cap A) + P(G\cap\overline{A})$.
Calculons $P(G\cap\overline{A})$ comme on a fait pour $P(G\cap A)$. La probabilité de tirer une boule blanche sachant que le dé montre une face impaire est la probabilté de tirer une boule blanche sachant que l'on choisit l'urne U_2. Il y a une boule blanche parmi les trois boules de l'urne U_2 donc $P_{\overline{A}}(G) = \frac{2}{3}$. Comme $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{4}{7} = \frac{3}{7}$, on parvient à $P(G\cap\overline{A}) = \frac{2}{3}\times\frac{3}{7} = \frac{2}{7}$.
La conclusion est donc $P(G) = \frac{1}{7} + \frac{2}{7} = \frac{3}{7}$.

(b) Le joueur est gagnant. Déterminer la probabilité qu'il ait obtenu un nombre pair lors du lancer du dé.
On sait que le joueur est gagnant donc on sait que la boule tirée est blanche.
On cherche donc la probabilité d'avoir obtenu une face paire sachant que la boule tirée est blanche , c'est donc $P_G(A)$. La formule des probabilités conditionnelles donne $P_G(A) = \frac{P(G\cap A)}{P(G)} = \frac{\frac{1}{7}}{\frac{3}{7}} = \frac{1}{3}$.

Devoir surveillé 2.

Veillez à bien justifier vos réponses : un exercice bien traité rapporte des points, un exercice traité de façon non rigoureuse ne rapporte pas de points.

Soignez votre écriture et votre rédaction, faites des phrases complètes et $\boxed{\text{encadrez vos résultats.}}$

Le malus de 2 points pour les copies mal rédigées sera appliqué.
La durée de l'épreuve est de 4 heures.
Aucune sortie avant la fin de l'épreuve.
Les calculatrices ne sont pas autorisées.

Si, au cours de l'épreuve, vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez le sur votre copie et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous êtes amenés à prendre.

Ce sujet comporte quatre exercices indépendants.

Exercice 1. Applications directes du cours.

(1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $9z^2 - 3(3-i)z + 4 - 3i = 0$.

Le discriminant du trinôme est $\Delta = (3(3-i))^2 - 4 \times 9 \times (4-3i) = 9 \times 2 \times (-4+3i)$.
Il suffit donc de rechercher les racines carrdes complexes de $-4+3i$ pour obtenir celles de Δ. Déterminons les racines carrées complexes de $-4+3i$ sous la forme $x+yi$:

$$(x+yi)^2 = -4+3i \iff \begin{cases} x^2 - y^2 &= -4 \\ 2xy &= 3 \\ x^2+y^2 &= 5 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x^2 &= \frac{1}{2} \\ y^2 &= \frac{9}{2} \\ 2xy &= 3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y &= \frac{3}{\sqrt{2}} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y &= -\frac{3}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Les racines carrées complexes de $-4+3i$ sont donc

$$\frac{1+3i}{\sqrt{2}} \text{ et } -\frac{1+3i}{\sqrt{2}}$$

Pour déterminer, les solutions de l'équation initiale, on peut donc prendre comme racine carrée complexe de Δ le nombre

$$\delta = 3 \times \sqrt{2} \times \frac{1+3i}{\sqrt{2}} = 3(1+3i)$$

On trouve alors les solutions

$$\frac{1-2i}{3} \text{ et } \frac{2+i}{3}$$

(2) Soit n un entier supérieur à 2 et θ un réel tel que θ n'est pas multiple entier de 2π.
Simplifier la somme $\cos(\theta) + \cos(2\theta) + \cos(3\theta) + \cdots + \cos(n\theta)$

Voir le cours. On trouve, après passage aux exponentielles complexes et parties réelles,

$$\begin{aligned} C_n &= \mathscr{R}\mathrm{e}\left(\mathrm{e}^{i\theta}\frac{1-\mathrm{e}^{in\theta}}{1-\mathrm{e}^{i\theta}}\right) \\ &= \mathscr{R}\mathrm{e}\left(\mathrm{e}^{i\theta}\frac{\mathrm{e}^{\frac{in\theta}{2}}(\mathrm{e}^{-\frac{in\theta}{2}} - \mathrm{e}^{\frac{in\theta}{2}})}{\mathrm{e}^{\frac{i\theta}{2}}(\mathrm{e}^{-\frac{i\theta}{2}} - \mathrm{e}^{\frac{i\theta}{2}})}\right) \\ &= \mathscr{R}\mathrm{e}\left(\mathrm{e}^{\frac{i(n+1)\theta}{2}}\frac{\sin(\frac{n\theta}{2})}{\sin(\frac{\theta}{2})}\right) \\ &= \cos\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)\frac{\sin(\frac{n\theta}{2})}{\sin(\frac{\theta}{2})} \end{aligned}$$

(3) Résoudre, par la méthode de Gauss, le système linéaire :

$$(S) : \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & -2y & +z & +t & = & 1 \\ x & +2y & +z & -t & = & -1 \\ x & -2y & +z & +5t & = & 5 \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} (S) \iff & \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & -2y & +z & +t & = & 1 & \\ & 4y & & -2t & = & -2 & L_2 \longleftarrow L_2 - L_1 \\ & & & 4t & = & 4 & L_3 \longleftarrow L_3 - L_1 \end{array} \right. \\ \iff & \left\{ \begin{array}{cccccc} x & -2y & +z & +t & = & 1 \\ & 2y & & -t & = & -1 \\ & & & t & = & 1 \end{array} \right. \\ \iff & \left\{ \begin{array}{cccccc} x & & +z & & = & 0 \\ & y & & & = & 0 \\ & & & t & = & 1 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Le système (S) admet donc une infinité de solutions données par les quadruplets $(x, 0, -x, 1)$ où x parcourt $\mathbb{R}$.

(4) Déterminer des réels a, b, d tels que pour tout réel x,

$$(\sin x)^4 = a + b\cos(2x) + d\cos(4x).$$

Appliquons la méthode du cours en utilisant les formules d'Euler :

$$\begin{aligned} (\sin x)^4 &= \left(\frac{\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix}}{2i}\right)^4 \\ &= \frac{1}{16}\left(\mathrm{e}^{4ix} - 4\mathrm{e}^{2ix} + 6 - 4\mathrm{e}^{-2ix} + \mathrm{e}^{-4ix}\right) \\ &= \frac{1}{16}(6 - 8\cos 2x + 2\cos 4x) \end{aligned}$$

On trouve donc

$$(\sin x)^4 = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{8}\cos(4x).$$

Exercice 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\begin{aligned} S_1(n) &= 1 + 2 + 3 + \cdots + n, \\ S_2(n) &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2, \\ S_3(n) &= 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3, \end{aligned}$$

et de façon plus générale, si p est un entier naturel

$$S_p(n) = 1^p + 2^p + 3^p + \cdots + n^p.$$

(1) Rappeler, sans justifier, l'expression de $S_1(n)$ en fonction de n.

$$S_1(n) = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

(2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_2(n) = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $\mathscr{P}_n$ la propriété : « $S_2(n) = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. »

— Pour $n = 1$, on a $S_2(1) = 1^2 = 1$ et $\dfrac{1 \times 2 \times 3}{6} = 1$ donc $\mathscr{P}_1$ est vraie.

— Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathscr{P}_n$ est vraie. Montrons que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

$$\begin{aligned}
S_2(n+1) &= S_2(n) + (n+1)^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\
&= \frac{n+1}{6}\left(2n^2 + n + 6(n+1)\right) \\
&= \frac{n+1}{6}\left(2n^2 + 7n + 6\right)
\end{aligned}$$

Le trinôme $2X^2 + 7X + 6$ admet -2 comme racine évidente ($2 \times 4 - 14 + 6 = 0$) donc, puisque le produit des racines est 3, l'autre racine est $-\dfrac{3}{2}$. Par suite, ce trinôme se factorise en $2X^2 + 7X + 6 = 2(X+2)(X+\frac{3}{2}) = (X+2)(2X+3)$.

Ainsi, $S_2(n+1) = \dfrac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$ et $\mathscr{P}_{n+1}$ est donc vraie dès que $\mathscr{P}_n$ est vraie.

— D'après le principe de récurrence sur $\mathbb{N}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_2(n) = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

(3) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, S_3(n) = (S_1(n))^2$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $\mathscr{P}_n$ la propriété : « $S_3(n) = (S_1(n))^2$. »

— Pour $n = 1$, on a $S_3(1) = 1^3 = 1$ et $(S_1(1))^2 = 1$ donc $\mathscr{P}_1$ est vraie.

— Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathscr{P}_n$ est vraie. Montrons que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

$$\begin{aligned}
S_3(n+1) &= S_3(n) + (n+1)^3 \\
&= (S_1(n))^2 + (n+1)^3, \text{ d'après l'hypothèse de récurrence} \\
&= (S_1(n))^2 + (n+1)^2(n+1) \\
&= (S_1(n))^2 + n(n+1)^2 + (n+1)^2 \\
&= (S_1(n))^2 + 2 \times (n+1) \times \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)^2 \\
&= (S_1(n))^2 + 2 \times (n+1) \times S_1(n) + (n+1)^2 \\
&= (S_1(n) + n + 1)^2 \\
&= (S_1(n+1))^2
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie dès que $\mathscr{P}_n$ est vraie.

— D'après le principe de récurrence sur $\mathbb{N}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_2(n) = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

(4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer l'égalité $8S_1(n)^3(n+1) + 12S_1(n)^2(n+1)^2 + 8S_1(n)(n+1)^3 = (n+1)^4(n^3 + 3n^2 + 4n)$.

Posons $A = 8S_1(n)^3(n+1) + 12S_1(n)^2(n+1)^2 + 8S_1(n)(n+1)^3$. Comme $S_1(n) = \dfrac{n(n+1)}{2}$, on a

$$\begin{aligned}
A &= 8(n+1)\left[\frac{n^3(n+1)^3}{2^3}\right] + 12(n+1)^2\left[\frac{n^2(n+1)^2}{2^2}\right] + 8(n+1)^3\left[\frac{n(n+1)}{2}\right] \\
&= n^3(n+1)^4 + 3n^2(n+1)^4 + 4n(n+1)^4 \\
&= (n^3 + 3n^2 + 4n)(n+1)^4
\end{aligned}$$

(5) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, S_5(n) + S_7(n) = 2(S_1(n))^4$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $\mathscr{P}_n$ la propriété : « $S_5(n) + S_7(n) = 2(S_1(n))^4$. »

— Pour $n = 1$, on a $S_5(1) + S_7(1) = 1^5 + 1^7 = 2$ et $2(S_1(1))^4 = 2 \times 1^4 = 2$ donc $\mathscr{P}_1$ est vraie.

— Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathscr{P}_n$ est vraie. Montrons que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

$$\begin{aligned}
S_5(n+1)+S_7(n+1) &= S_5(n)+(n+1)^5+S_7(n)+(n+1)^7\\
&= 2(S_1(n))^4+(n+1)^5+(n+1)^7 \text{ d'après l'hypothèse de récurrence}\\
&= 2(S_1(n))^4+(n+1)^4(n+1+(n+1)^3)\\
&= 2(S_1(n))^4+(n+1)^4(2+4n+3n^2+n^3)\\
&= 2(S_1(n))^4+(n+1)^4(n^3+3n^2+4n)+2(n+1)^4\\
&= 2(S_1(n))^4+8S_1(n)^3(n+1)+12S_1(n)^2(n+1)^2+8S_1(n)(n+1)^3+2(n+1)^4\\
&= 2\left((S_1(n))^4+4S_1(n)^3(n+1)+6S_1(n)^2(n+1)^2+4S_1(n)(n+1)^3+1(n+1)^4\right)\\
&= 2\left(S_1(n)+(n+1)\right)^4\\
&= 2(S_1(n+1))^4
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie dès que $\mathscr{P}_n$ est vraie.

— D'après le principe de récurrence sur $\mathbb{N}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_5(n)+S_7(n)=2(S_1(n))^4$.

Exercice 3. Bob, John et Samuel sont auditionnés par la police à la suite d'un crime commis par l'un d'entre eux. Tous les trois font chacun deux affirmations. Les voici :

Bob dit : « — Je suis innocent. John est aussi innocent. »

John dit :« — Bob est innocent. C'est Samuel, le coupable. »

Samuel dit : « — Je suis innocent. C'est Bob, le coupable. »

Par la suite, les enquêteurs établissent avec certitude que l'un d'entre eux a fait deux affirmations vraies, un autre a fait deux affirmations fausses et le troisième a fait une affirmation vraie et l'autre fausse. Qui est coupable ?

On procède par élimination des cas.

— Supposons que les deux affirmations de Bob soient vraies, ce sera notre premier cas. Dans ce cas, le coupable serait Samuel. Mais alors, les deux affirmations de John seraient vraies aussi et cela serait en contradiction avec ce que les enquêteurs savent : un seul des trois a fait deux affirmations vraies. Notre premier cas n'est donc pas le bon.

— Supposons maintenant que les deux affirmations de John soient vraies, ce sera notre second cas. Samuel serait encore le coupable. Là encore, les deux affirmations de Bob seraient vraies aussi et cela serait en contradiction avec ce que les enquêteurs savent : un seul des trois a fait deux affirmations vraies. Notre premier cas n'est donc pas le bon.

— Par conséquent, celui dont les deux affirmations sont vraies est Samuel. Donc Bob est le coupable.

Exercice 4. Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel fixé et $\omega = \cos(\frac{2\pi}{2n+1}) + i\sin(\frac{2\pi}{2n+1})$. On pose $z = \frac{1}{2}+\omega+\omega^2+\omega^3+\cdots+\omega^n$.

(1) Simplifier la somme $1+\omega+\omega^2+\omega^3+\cdots+\omega^{2n}$.

Comme $\omega \neq 1$

$$1+\omega+\omega^2+\cdots+\omega^{2n} = \frac{1-\omega^{2n+1}}{1-\omega} = 0$$

puisque $\omega^{2n+1} = (\mathrm{e}^{\frac{i\pi}{2n+1}})^{2n+1} = 1$.

(2) Montrer que $z = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\omega^n-1}{\omega^n+1}\right)$.

$$\begin{aligned}
(\omega^n+1)z &= \frac{1}{2}+\omega+\omega^2+\omega^3+\cdots+\omega^n+\frac{\omega^n}{2}+\omega^{n+1}+\omega^{n+2}+\omega^{n+3}+\cdots+\omega^{2n}\\
&= -\frac{1}{2}+1+\omega+\omega^2+\omega^3+\cdots+\omega^n+\frac{\omega^n}{2}+\omega^{n+1}+\omega^{n+2}+\omega^{n+3}+\cdots+\omega^{2n}\\
&= \frac{\omega^n-1}{2}+1+\omega+\omega^2+\cdots+\omega^{2n}\\
&= \frac{\omega^n-1}{2} \text{ puisque } 1+\omega+\omega^2+\cdots+\omega^{2n}=0.
\end{aligned}$$

d'où l'égalité $z = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\omega^n-1}{\omega^n+1}\right)$.

(3) En déduire que, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, z^{2k} est réel et z^{2k+1} est imaginaire pur.

Vérifions que $\overline{z} = -z$.

$$\overline{z} = \overline{\frac{1}{2}\left(\frac{\omega^n-1}{\omega^n+1}\right)} = \frac{1}{2}\left(\frac{\overline{\omega}^n-1}{\overline{\omega}^n+1}\right)$$

Comme $|\omega|=1$, on a $\overline{\omega}=\dfrac{1}{\omega}$ donc

$$\overline{z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{1}{\omega^n}-1}{\frac{1}{\omega^n}+1}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1-\omega^n}{\omega^n+1}\right)=-z$$

et par conséquent, pour tout entier $k\in\mathbb{N}$,

$$\overline{z^{2k}}=\overline{z}^{2k}=(-z)^{2k}=z^{2k}$$

donc $z^{2k}\in\mathbb{R}$, et de même,

$$\overline{z^{2k+1}}=\overline{z}^{2k+1}=(-z)^{2k+1}=-z^{2k}$$

donc z^{2k+1} est imaginaire pur.

(4) Montrer que $\left(\dfrac{2z+1}{2z-1}\right)^{2n+1}=-1$.

D'après la question (2),

$$2z+1=\frac{\omega^n-1}{\omega^n+1}+1=\frac{2\omega^n}{\omega^n+1}\text{ et }2z-1=\frac{\omega^n-1}{\omega^n+1}-1=\frac{-2}{\omega^n+1}$$

donc

$$\frac{2z+1}{2z-1}=-\omega^n$$

et par conséquent

$$\left(\frac{2z+1}{2z-1}\right)^{2n+1}=(-\omega^n)^{2n+1}=-(\omega^{2n+1})^n=-1^n=-1.$$

Exercice 5. Soient f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ et (u_n) la suite de nombres réels déterminée par $u_0=\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=\displaystyle\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x$.

On rappelle le théorème d'intégration par parties : si u et v sont des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$ alors

$$\int_a^b u'(t)v(t)\mathrm{d}t=[u(t)v(t)]_a^b-\int_a^b u(t)v'(t)\mathrm{d}t$$

où $[u(t)v(t)]_a^b=u(b)v(b)-u(a)v(a)$.

On considère la fonction numérique F de la variable réelle x définie par :

$$F(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$$

Pour tout réel λ strictement positif, on note $\mathcal{A}(\lambda)$ l'aire (exprimée en unité d'aire) du domaine constitué par l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que :

$$\lambda\leq x\leq 2\lambda\quad\text{et}\quad 0\leq y\leq f(x)$$

(1) Exprimer $\mathcal{A}(\lambda)$ sous forme d'une intégrale.

$$\mathcal{A}(\lambda)=\int_\lambda^{2\lambda}\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\mathrm{d}t$$

(2) Déterminer l'ensemble de définition de F et montrer que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$ puis exprimer $\mathcal{A}(\lambda)$ en fonction de λ.

Par stricte croissance de la fonction $t\mapsto\sqrt{t}$, pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$\sqrt{1+x^2}>\sqrt{x^2}=|x|\geq -x$$

donc $\sqrt{1+x^2}+x>0$. La fonction F est donc définie sur $\mathbb{R}$. Elle est dérivable comme somme, produit et composée de fonctions dérivables et sa dérivée est donnée par

$$F'(x)=\frac{(x+\sqrt{1+x^2})'}{x+\sqrt{1+x^2}}=\frac{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}=\frac{\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=f(x)$$

donc F est bien une primitive de f.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\lambda) &= F(2\lambda) - F(\lambda)\\ &= \ln\left(2\lambda + \sqrt{4\lambda^2+1}\right) - \ln\left(\lambda + \sqrt{\lambda^2+1}\right)\\ &= \ln\left(\frac{2\lambda + \sqrt{4\lambda^2+1}}{\lambda + \sqrt{\lambda^2+1}}\right)\end{aligned}$$

(3) Calculer u_0 et u_1.

$$u_0 = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = F(1) - F(0) = \ln(1+\sqrt{2}) \text{ puis } u_1 = \int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 (\sqrt{1+x^2})'\mathrm{d}x = \left[\sqrt{1+x^2}\right]_0^1 = \sqrt{2} - 1$$

(4) A l'aide d'une intégration par parties, calculer u_3.
(On pourra remarquer que $\dfrac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} = x^2\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$)
Posons $u(x) = \sqrt{1+x^2}$ et $v(x) = x^2$: les fonctions u et v sont définies et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$. Le théorème d'intégration par parties donne alors

$$\begin{aligned}u_3 &= \int_0^1 x^2\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1 u'(x)v(x)\mathrm{d}x\\ &= [u(x)v(x)]_0^1 - \int_0^1 u(x)v'(x)\mathrm{d}x\\ &= \sqrt{2} - \int_0^1 2x\sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x\\ &= \sqrt{2} - \int_0^1 \left[\frac{2}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}\right]'\mathrm{d}x\\ &= \sqrt{2} - \left[\frac{2}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1\\ &= \sqrt{2} - \frac{4}{3}\sqrt{2} + \frac{2}{3}\\ &= \frac{2-\sqrt{2}}{3}\end{aligned}$$

(5) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n), montrer que la suite (u_n) est convergente. (On ne cherchera pas sa limite dans cette question)
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0,1]$, $0 \leq x^{n+1} \leq x^n$ donc $0 \leq x^{n+1}f(x) \leq x^n f(x)$ puisque $f(x) \geq 0$. Par positivité de l'intégrale, on peut donc affirmer

$$0 \leq \int_0^1 x^{n+1}f(x)\mathrm{d}x \leq \int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x$$

c'est à dire $0 \leq u_{n+1} \leq u_n$. La suite (u_n) est donc décroissante et positive. Décroissante et minorée par 0, la suite est convergente d'après le théorème de convergence monotone.

(6) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $\quad 0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{n+1}$. (On pourra commencer par établir l'encadrement $0 \leq x^n f(x) \leq x^n$ pour tout $x \in [0,1]$.)
La première partie de l'encadrement est déjà obtenu : la suite (u_n) est positive. Pour l'autre partie, il suffit de remarquer que $f(x) \leq 1$ pour tout $x \in [0,1]$. Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0,1]$, $x^n f(x) \leq x^n$ donc par positivité de l'intégrale

$$u_n \leq \int_0^1 x^n \mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

(7) Déterminer alors la limite de la suite (u_n) .
Comme $0 = \lim \dfrac{1}{n+1}$, on peut affirmer que la suite (u_n) converge vers 0 d'après le théorème de convergence par encadrement.

(8) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 3$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^{n-2}\sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x$.

(a) Etablir, pour $n \geq 3$, l'égalité $u_n + u_{n-2} = I_n$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 3$.

$$\begin{aligned}
u_n + u_{n-2} &= \int_0^1 (x^n + x^{n-2}) f(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 x^{n-2}\left(\frac{1+x^2}{\sqrt{1+x^2}}\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 x^{n-2}\sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x = I_n
\end{aligned}$$

(b) A l'aide d'une intégration par parties, établir, pour $n \geq 3$, l'égalité $nu_n + (n-1)u_{n-2} = \sqrt{2}$.

Cette question sera hors-barême : il y avait une erreur d'énoncé puisque la bonne égalité à obtenir est $nu_n + (n-1)u_{n-2} = \sqrt{2}$. Les étudiants qui auront utilisées l'égalité de l'énoncé par la suite ne seront pas pénalisés.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 3$.

$$\begin{aligned}
nu_n &= \int_0^1 nx^n \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 nx^{n-1}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 nx^{n-1}\left(\sqrt{1+x^2}\right)'\mathrm{d}x \\
&= \left[nx^{n-1}\sqrt{1+x^2}\right]_0^1 - \int_0^1 n(n-1)x^{n-2}\sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x \text{ (intégration par parties)} \\
&= n\sqrt{2} - n(n-1)I_n \\
&= n\sqrt{2} - n(n-1)(u_n + u_{n-2})
\end{aligned}$$

donc $nu_n + n(n-1)u_n = n\sqrt{2} - n(n-1)u_{n-2}$ c'est à dire $n^2u_n = n\sqrt{2} - n(n-1)u_{n-2}$ et après simplification par $n \neq 0$:

$$nu_n = \sqrt{2} - (n-1)u_{n-2}$$

qui est l'égalité à obtenir.

(c) En déduire, pour $n \geq 3$, l'inégalité $(2n-1)u_n \leq \sqrt{2}$.

La positivité et décroissance de la suite (u_n) permet d'ffirmer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 3$, $0 \leq u_n \leq u_{n-1} \leq u_{n-2}$ donc

$$(2n-1)u_n = nu_n + (n-1)u_n \leq nu_n + (n-1)u_{n-2} = \sqrt{2}$$

(d) Conclure quant à la limite de la suite (nu_n).

L'inégalité précédente se réecrit

$$nu_n \leq \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}u_n = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}u_n$$

Il nous reste à minorer judicieusement nu_n : pour tout $x \in [0,1]$, $\sqrt{1+x^2} \leq \sqrt{2}$ donc $f(x) \geq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ puis $x^n f(x) \geq \dfrac{x^n}{\sqrt{2}}$ et par positivité de l'intégrale, on peut écrire

$$u_n \geq \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{2}}\mathrm{d}x = \frac{1}{(n+1)\sqrt{2}}$$

donc

$$nu_n \geq \frac{n}{(n+1)\sqrt{2}}.$$

On parvient donc à l'encadrement

$$\frac{n}{(n+1)\sqrt{2}} \leq nu_n \leq \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}u_n.$$

Comme $\lim u_n = 0$ et $\lim \dfrac{n}{n+1} = 1$, on a

$$\lim \frac{n}{(n+1)\sqrt{2}} = \lim \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}u_n = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

donc $\lim nu_n = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ d'après le théorème de convergence par encadrement.

Mathématique **ECS 1**

22 nov. 2014

Correction du devoir surveillé 3.

Veillez à bien justifier vos réponses : un exercice bien traité rapporte des points, un exercice traité de façon non rigoureuse ne rapporte pas de points.

Soignez votre écriture et votre rédaction, faites des phrases complètes et encadrez vos résultats.

Le malus de 2 points pour les copies non soignées ou mal rédigées sera appliqué.
La durée de l'épreuve est de 4 heures.
Aucune sortie avant la fin de l'épreuve.
Les calculatrices ne sont pas autorisées.

Si, au cours de l'épreuve, vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez le sur votre copie et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous êtes amenés à prendre.

Ce sujet comporte cinq exercices indépendants.
Laissez une demi-page de garde pour les observations.

Exercice 1. Applications directes du cours.

(1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer les égalités suivantes :

$$\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \binom{2n+1}{n+1} - 2\binom{2n}{n+1}$$

Pour la première égalité

$$\begin{aligned}\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} &= \frac{(2n)!}{n!n!} - \frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!}\\ &= \frac{(2n)!}{n!n!}\left(1 - \frac{n}{n+1}\right)\\ &= \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}\end{aligned}$$

et pour l'autre

$$\begin{aligned}\binom{2n+1}{n+1} - 2\binom{2n}{n+1} &= \frac{(2n+1)!}{(n+1)!n!} - \frac{2(2n)!}{(n-1)!(n+1)!}\\ &= \frac{(2n)!}{n!n!}\left(\frac{2n+1}{n+1} - \frac{2n}{n+1}\right)\\ &= \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}\end{aligned}$$

(2) A l'aide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale $\displaystyle\int_1^2 \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$. On pourra être amené à déterminer des réels a, b, c tels que pour tout réel x non nul

$$\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{1+x^2}$$

Commençons par trouver les réels a, b, c suggérés par l'indication : pour tout réel x non nul

$$\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{1+x^2-x^2}{x(1+x^2)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}.$$

On remarque ensuite que $\displaystyle\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2} = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \times \frac{(-\ln x)}{2}$.

On pose $u(x) = \dfrac{(-\ln x)}{2}$ et $v(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$: les fonctions u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[1, 2]$. Le théorème d'intégration par partie donne

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x = \int_1^2 u(x)v'(x)\mathrm{d}x &= [u(x)v(x)]_1^2 - \int_1^2 u'(x)v(x)\mathrm{d}x\\ &= \left[\frac{(-\ln x)}{2(1+x^2)}\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{-1}{2x(1+x^2)}\mathrm{d}x\\ &= \left[\frac{(-\ln x)}{2(1+x^2)}\right]_1^2 + \frac{1}{2}\int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x\\ &= \left[\frac{(-\ln x)}{2(1+x^2)} + \frac{\ln x}{2} - \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_1^2\\ &= \frac{(-\ln 2)}{10} + \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{4}\ln 5 + \frac{\ln 2}{4}\\ &= \frac{13\ln 2 - 5\ln 5}{20}\end{aligned}$$

(3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier les sommes $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}$

Voir cours.

(4) Simplifier la somme double $\displaystyle\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=j}^{n}\binom{n}{i}\binom{i}{j}$.

La somme double se réecrit avec le système d'indice $0 \leq j \leq i \leq n$ donc

$$\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=j}^{n}\binom{n}{i}\binom{i}{j} = \sum_{0\leq j\leq i\leq n}\binom{n}{i}\binom{i}{j} = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i}\binom{n}{i}\binom{i}{j} = \sum_{i=0}^{n}\left[\binom{n}{i}\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}\right] = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}2^i = 3^n$$

(5) On entre, dans une console Scilab, les instructions suivantes :

```
-->> a= [4,5,1,-3,4,1,3,2];  b= [2,1,7,2,1,1,1,2];  c= [8,5,0,-3,4,1,6,2];
-->> d=(c.*b)./a; e=d(8:-1:1)
```

Quel est le résultat affiché lorsqu'on valide la deuxième ligne ?

Normalement, on obtient le vecteur `2.  2.  1.  1.  2.  0.  1.  4.`

Exercice 2. Soit $\beta = \mathrm{e}^{\frac{i\pi}{7}}$.

(1) Calculer la somme : $1 - \beta + \beta^2 - \beta^3 + \beta^4 - \beta^5 + \beta^6$.

C'est une somme géométrique de raison $-\beta$ et il est clair que $\beta \neq -1$ donc

$$1 - \beta + \beta^2 - \beta^3 + \beta^4 - \beta^5 + \beta^6 = \frac{1+\beta^7}{1+\beta} = 0.$$

(2) En déduire que : $\beta^3 - \beta^2 + \beta = \dfrac{1}{1-\beta^3}$.

La relation précédente donne l'égalité $\beta^3 - \beta^2 + \beta = 1 + \beta^4 - \beta^5 + \beta^6 = 1 + \beta^3(\beta^3 - \beta^2 + \beta)$ qui donne encore $(\beta^3 - \beta^2 + \beta) - \beta^3(\beta^3 - \beta^2 + \beta) = (1-\beta^3)(\beta^3 - \beta^2 + \beta) = 1$ pour en tirer

$$\beta^3 - \beta^2 + \beta = \frac{1}{1-\beta^3}$$

(3) Déterminer alors la valeur de $\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7}$.

Il est clair que $\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} = \mathrm{Re}(\beta^3 - \beta^2 + \beta)$.

Evaluons donc $\mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{1-\beta^3}\right)$:

$$\frac{1}{1-\beta^3} = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{\frac{3i\pi}{7}}} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{3i\pi}{14}}\times 2i\times\sin(-\frac{3\pi}{14})} = \frac{1}{2}\times\frac{-\mathrm{e}^{\frac{i\pi}{2}}\mathrm{e}^{\frac{-3i\pi}{14}}}{\sin(-\frac{3\pi}{14})} = \frac{1}{2}\times\frac{\mathrm{e}^{\frac{4i\pi}{14}}}{\sin(\frac{3\pi}{14})}$$

donc

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-\beta^3}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{\cos(\frac{4\pi}{14})}{\sin(\frac{3\pi}{14})}=\frac{1}{2}\times\frac{\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{14})}{\sin(\frac{3\pi}{14})}=\frac{1}{2}\times\frac{\sin(\frac{3\pi}{14})}{\sin(\frac{3\pi}{14})}=\frac{1}{2}$$

ce qui permet de conclure

$$\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{2}$$

Exercice 3. Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $x_1,x_2,\ldots,x_n$ des réels strictement positifs. L'objectif de l'exercice est de démontrer *l'inégalité arithmético-géométrique* :

$$\left(\prod_{k=1}^{n}x_k\right)^{\frac{1}{n}}\leq\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k$$

(1) Montrer que pour tout réel $x>0$, $\ln x\leq x-1$.

Doit vous paraître classique : étudier les variations de $x\mapsto\ln x-x+1$

(2) On pose $m=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}x_k$. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x_k}{m}-1\right)=0$.

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x_k}{m}-1\right)=\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{n}x_k-\sum_{k=1}^{n}1=\frac{1}{m}\times nm-n=0$$

(3) En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{x_k}{m}\right)\leq 0$ et conclure.

D'après la question (1),

$$\forall k\in[\![1,n]\!],\ \ln\left(\frac{x_k}{m}\right)\leq\frac{x_k}{m}-1$$

donc en sommant ces inégalités membre à membre, on obtient

$$\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{x_k}{m}\right)\leq\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x_k}{m}-1\right)=0.$$

Pour conclure, on applique la fonction exponentielle, croissante sur $\mathbb{R}$, à chaque membre pour obtenir

$$\prod_{k=1}^{n}\frac{x_k}{m}\leq\mathrm{e}^0=1$$

ce qui donne encore

$$\left(\prod_{k=1}^{n}x_k\right)\leq m^n=\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k\right)^n$$

et la fonction racine $n^{\text{ème}}$ étant croissante sur $\mathbb{R}^+$, on obtient

$$\left(\prod_{k=1}^{n}x_k\right)^{\frac{1}{n}}\leq\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k.$$

Exercice 4. Pour tout entier $k\in\mathbb{N}$ et tout entier $n\in\mathbb{N}$, on pose $J(k,n)=\displaystyle\int_0^1 x^k(1-x)^n\mathrm{d}x$ et $J(k,0)=\displaystyle\int_0^1 x^k\mathrm{d}x$.

(1) **(a)** Calculer, pour tout entier $k\in\mathbb{N}$, $J(k,0)$ et $J(k,1)$.

$$J(k,0)=\frac{1}{k+1}$$

et

$$J(k,1)=J(k,0)-J(k+1,0)=\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}=\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

(b) Montrer que quelque soient les entiers $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$J(k+1,n) = \frac{k+1}{n+1} J(k,n+1).$$

On procède par intégration par parties avec les fonctions polynômiales $x \mapsto \dfrac{x^{k+1}}{k+1}$ et $x \mapsto -(1-x)^{n+1}$:

$$\begin{aligned}
\frac{n+1}{k+1} J(k+1,n) &= \int_0^1 \frac{x^{k+1}}{k+1} \times (n+1)(1-x)^n \mathrm{d}x \\
&= \left[-\frac{x^{k+1}}{k+1}(1-x)^{n+1} \right]_0^1 + \int_0^1 x^k (1-x)^{n+1} \mathrm{d}x \\
&= 0 + J(k,n+1).
\end{aligned}$$

(2) Etablir, quelque soient les entiers $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$, l'égalité

$$J(k,n) = \frac{n!}{(k+1)(k+2)\dots(k+n+1)}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathscr{P}_n$ la propriété « $\forall k \in \mathbb{N}, \quad J(k,n) = \dfrac{n!}{(k+1)(k+2)\dots(k+n+1)}$. »

— les propriétés $\mathscr{P}_n$ et $\mathscr{P}_n$ ont été vérifiées à la question (1a).

— Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}_n$ est vraie : on suppose donc

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad J(k,n) = \frac{n!}{(k+1)(k+2)\dots(k+n+1)}.$$

D'après la question (1b) :

$$J(k,n+1) = \frac{n+1}{k+1} J(k+1,n)$$

et par hypothèse de récurrence

$$J(k+1,n) = \frac{n!}{(k+2)(k+3)\dots(k+n+2)}$$

donc

$$J(k,n+1) = \frac{n+1}{k+1} \times \frac{n!}{(k+2)(k+3)\dots(k+n+2)} = \frac{(n+1)!}{(k+1)(k+2)\dots(k+n+2)}$$

donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie dès que $\mathscr{P}_n$ est vraie.

— Le principe de récurrence permet de conclure que la formule proposée est vraie pour tout couple d'entiers naturels (k,n).

(3) Le but de cette question est de simplifier la somme $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{2k+1}$ en utilisant le résultat précédent.

(a) Calculer $\displaystyle\int_0^1 t^{2k} \mathrm{d}t$ et en déduire que $S_n = \displaystyle\int_0^1 (1-t^2)^n \mathrm{d}t$.

Un calcul de primitive élémentaire donne $\displaystyle\int_0^1 t^{2k} \mathrm{d}t = \frac{1}{2k+1}$. On a donc

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \int_0^1 t^{2k} \mathrm{d}t = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} t^{2k} \right) \mathrm{d}t = \int_0^1 (1-t^2)^n \mathrm{d}t$$

puisque $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-t^2)^k 1^{n-k} = (1-t^2)^n$.

(b) En remarquant que $(1-t^2)^n = (1-t)^n(1+t)^n$, montrer que $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} J(k,n)$

$$S_n = \int_0^1 (1-t)^n (1+t)^n \mathrm{d}t = \int_0^1 (1-t)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \int_0^1 (1-t)^n t^k \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} J(k,n)$$

(c) En utilisant le résultat de la question (2), établir l'égalité

$$S_n = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{n-k} = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k}$$

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} J(k,n) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{n!}{(k+1)(k+2)\dots(k+n+1)} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \times \frac{n!}{(k+1)(k+2)\dots(k+n+1)} \\ &= \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} \sum_{k=0}^{n} \frac{(2n+1)!}{(k+n+1)!(n-k)} \\ &= \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{n-k} \end{aligned}$$

puisque $\dfrac{(2n+1)!}{(k+n+1)!(n-k)} = \binom{2n+1}{n-k}$.
Le changement d'indice $j = n-k$ donne alors

$$S_n = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} \sum_{j=0}^{n} \binom{2n+1}{j} = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k}$$

la deuxième égalité s'expliquant par le fait que l'indice de sommation est muet.

(d) Montrer l'égalité : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{n+1+k}$

Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, la formule de symétrie donne $\displaystyle\binom{2n+1}{n-k} = \binom{2n+1}{(2n+1)-(n-k)} = \binom{2n+1}{n+k+1}$ donc

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{n+k+1}$$

(e) En déduire que $S_n = \dfrac{2^{2n}}{(2n+1)\binom{2n}{n}}$.

On sait, d'une part, que $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} = 2^{2n+1}$ et d'autre part

$$\sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k} + \sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k}$$

où la deuxième somme du membre de droite peut être réexprimée grâce à un changement d'indice $j = k-(n+1)$:

$$\sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} = \sum_{j=0}^{n} \binom{2n+1}{n+1+j}$$

de sorte qu'avec le résultat établi en (d), on parvient à

$$2^{2n+1} = 2 \times \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k}.$$

Par conséquent,

$$S_n = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} \times 2^{2n} = \frac{2^{2n}}{2n+1} \times \frac{n! \times n!}{(2n)!} = \frac{2^{2n}}{(2n+1)\binom{2n}{n}}.$$

Exercice 5 (d'après Bac C, 1983)**.** Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t.$$

(1) Expliquez pourquoi g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donnez l'expression de $g'(x)$.

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme primitive de la fonction continue $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$. Par conséquent,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

(2) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = g(x) + g(-x)$.

(a) Expliquez pourquoi h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donnez l'expression de $h'(x)$.

La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme et composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h'(x) = g'(x) - g'(-x) = 0$$

(b) En déduire que h est une fonction constante que l'on précisera. Qu'en déduisez vous sur la fonction g ?

Comme h' est nulle sur $\mathbb{R}$, la fonction h est constante sur $\mathbb{R}$ donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = h(0) = 2g(0) = 0$$

et par conséquent

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(-x) = -g(x)$$

ce qui montre que la fonction g est impaire.

(3) Soit maintenant la fonction f définie sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ par $f(x) = g(\tan x)$.

(a) Expliquez pourquoi la fonction f est dérivable et donnez l'expression de $f'(x)$. En remarquant que $f(0) = 0$, déterminez alors une expression simple pour $f(x)$.

La fonction f est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ comme composée de fonctions dérivables et

$$\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[,\ f'(x) = (1+\tan^2 x)g'(\tan x) = (1+\tan^2 x) \times \frac{1}{1+\tan^2 x} = 1.$$

On en déduit que, pour tout réel $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$,

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\mathrm{d}t = g(0) + \int_0^x 1\mathrm{d}t = x.$$

(b) On pose $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$. A l'aide de la question précédente, déterminez la valeur de I.

On remarque que $I = g(1)$ et d'après ce qui précède $g(1) = f(\tan \frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4}$ donc $I = \frac{\pi}{4}$.

(4) Pour tout entier naturel n, on considère les intégrales suivantes :

$$I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n \mathrm{d}t \text{ et } J_n = \int_0^1 t^2(1-t^2)^n \mathrm{d}t.$$

(a) Exprimer I_{n+1} en fonction de I_n et J_n.

$$I_{n+1} = \int_0^1 (1-t^2)^{n+1}\mathrm{d}t = \int_0^1 (1-t^2)^n(1-t^2)\mathrm{d}t = \int_0^1 (1-t^2)^n\mathrm{d}t - \int_0^1 t^2(1-t^2)^n\mathrm{d}t = I_n - J_n$$

(b) A l'aide d'une intégration par parties, établir, pour tout entier naturel n, la relation

$$I_{n+1} = 2(n+1)J_n$$

(*on pourra remarquer que* $t^2(1-t^2)^n = t \times t(1-t^2)^n$).

On pose $u(t) = t$ et $v(t) = -\dfrac{(1-t^2)^{n+1}}{2(n+1)}$: les fonctions u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$. Le théorème d'intégration par parties donne :

$$\begin{aligned} J_n = \int_0^1 t^2(1-t^2)^n\mathrm{d}t &= \int_0^1 u(t)v'(t)\mathrm{d}t \\ &= [u(t)v(t)]_0^1 - \int_0^1 u'(t)v(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \frac{(1-t^2)^{n+1}}{2(n+1)}\mathrm{d}t \end{aligned}$$

d'où on tire $I_{n+1} = 2(n+1)J_n$.

(c) Etablir alors une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n.

Des relations obtenues en (a) et (b), on obtient, pour tout entier n,

$$I_{n+1} = I_n - \frac{1}{2(n+1)} I_{n+1} \text{ soit } I_{n+1} = \frac{2(n+1)}{2n+3} I_n$$

(d) Montrer alors que, pour tout entier naturel n,

$$I_n = 2^n \times \frac{n!}{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n+1)}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathscr{P}_n$ la propriété « $I_n = 2^n \times \dfrac{n!}{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n+1)}$. »

— Puisque $I_0 = 1$, la formule proposée est vraie pour $n = 0$.

— Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}_n$ est vraie. D'après la relation de récurrence

$$I_{n+1} = \frac{2(n+1)}{2n+3} I_n = \frac{2(n+1)}{2n+3} \times 2^n \times \frac{n!}{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n+1)}$$

donc

$$I_{n+1} = 2^{n+1} \times \frac{(n+1)!}{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n+1)(2n+3)}.$$

Ainsi, $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie dès que $\mathscr{P}_n$ est vraie.

— D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = 2^n \times \frac{n!}{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n+1)}$$

(5) On définit une suite (u_n) par $u_0 = 1,\ u_1 = 1 + \dfrac{1}{1 \times 3}$ et pour tout entier naturel $n \geq 2$, on pose

$$u_n = 1 + \frac{1}{1 \times 3} + \frac{2!}{1 \times 3 \times 5} + \cdots + \frac{n!}{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n+1)}$$

(a) En utilisant le résultat de la question (4d), montrer que

$$u_n = 2 \int_0^1 h_n(t) \mathrm{d}t.$$

où h_n est la fonction définie sur $[0, 1]$ par $h_n(t) = \dfrac{1 - \left(\frac{1-t^2}{2}\right)^{n+1}}{1+t^2}$.

D'après le résultat précédent, et par linéarité de l'intégrale

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{I_k}{2^k} = \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 \frac{(1-t^2)^k}{2^k} \mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1-t^2}{2}\right)^k \mathrm{d}t.$$

Pour tout $t \in [\![0, 1]\!],\ 0 \leq \dfrac{1-t^2}{2} \leq \dfrac{1}{2} < 1$ donc

$$u_n = \int_0^1 \frac{1 - (\frac{1-t^2}{2})^{n+1}}{1 - \frac{1-t^2}{2}} \mathrm{d}t = 2 \int_0^1 \frac{1 - (\frac{1-t^2}{2})^{n+1}}{1+t^2} \mathrm{d}t = 2 \int_0^1 h_n(t) \mathrm{d}t.$$

(b) Etablir, pour tout $t \in [0, 1]$, l'encadrement

$$0 \leq \frac{\left(\frac{1-t^2}{2}\right)^{n+1}}{1+t^2} \leq \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Pour tout réel $t \in [0, 1],\ 0 \leq \frac{1-t^2}{2} \leq \frac{1}{2}$ donc $0 \leq \left(\frac{1-t^2}{2}\right)^{n+1} \leq \dfrac{1}{2^{n+1}}$ et $0 \leq \dfrac{1}{1+t^2} \leq 1$. Comme tous les membres de ces encadrements sont positifs, on obtient en multipliant membre à membre,

$$0 \leq \frac{\left(\frac{1-t^2}{2}\right)^{n+1}}{1+t^2} \leq \frac{1}{2^{n+1}}.$$

(c) On pose $v_n = 2I - u_n$ où I désigne l'intégrale de la question (3b). Après avoir exprimé $v_n = 2I - u_n$ sous forme intégrale, déduire de (b) un encadrement pour la suite (v_n).

La définition de (v_n) donne

$$v_n = 2\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{1-(\frac{1-t^2}{2})^{n+1}}{1+t^2}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{(\frac{1-t^2}{2})^{n+1}}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

et la positivité de l'intégrale et l'encadrement obtenu en (b) entraînent

$$0 \leq v_n \leq \frac{1}{2^{n+1}}$$

(d) Déterminer alors la limite de la suite (v_n), puis celle de la suite (u_n).

Puisque $\lim \dfrac{1}{2^{n+1}} = 0$, le théorème de convergence par encadrement s'applique à la suite (v_n) et on a $\lim v_n = 0$, ce qui entraîne $\lim u_n = 2I = \dfrac{\pi}{2}$.

Concours blanc 1. Corrigé de l'épreuve a.

Veillez à bien justifier vos réponses : un exercice bien traité rapporte des points, un exercice traité de façon non rigoureuse ne rapporte pas de points. Malus de 2 points pour les copies mal rédigées. La durée de l'épreuve est de 4 heures. Aucune sortie avant la fin de l'épreuve. Les calculatrices ne sont pas autorisées.

Si, au cours de l'épreuve, vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez le sur votre copie et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous êtes amenés à prendre.

Ce sujet comporte quatre exercices indépendants.

Exercice 1. Applications du cours.

(1) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite arithmético-géométrique définie par $u_0 = -1$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{u_n+3}{4}$. Exprimer u_n en fonction de n.

L'équation $u_{n+1} = \dfrac{u_n+3}{4}$ a pour solution $x = 1$.

On pose donc $v_n = u_n - 1$, de sorte que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 1 = \frac{u_n+3}{4} - 1 = \frac{u_n-1}{4} = \frac{1}{4}v_n.$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison $\dfrac{1}{4}$: pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n = \dfrac{v_0}{4^n}$ ce qui donne $u_n = v_n + 1 = 1 - \dfrac{2}{4^n}$.

(2) Enoncer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

(3) Simplifier la somme double $\displaystyle\sum_{0\le j\le k\le 2n} (-1)^k \binom{2n}{k}\binom{k}{j}$.

On rappelle la formule : $(1+x)^p = \displaystyle\sum_{i=0}^{p}\binom{p}{i}x^i$.

$$\begin{aligned}
\sum_{0\le j\le k\le 2n} (-1)^k \binom{2n}{k}\binom{k}{j} &= \sum_{k=0}^{2n}\sum_{j=0}^{k}(-1)^k\binom{2n}{k}\binom{k}{j}\\
&= \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\binom{2n}{k}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\\
&= \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\binom{2n}{k}(1+1)^k\\
&= \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\binom{2n}{k}2^k\\
&= \sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}(-2)^k\\
&= (1-2)^{2n} = 1
\end{aligned}$$

(4) Etudier l'inversibilité et, le cas échéant, calculer l'inverse, de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1\\ 2 & 4 & -1\\ -2 & -5 & 3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1\\ 2 & 4 & -1\\ -2 & -5 & 3\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&0&1\\0&-1&1\end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l}L_2 \longleftarrow L_2-2L_1\\ L_3 \longleftarrow L_3+2L_1\end{array} \qquad \begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&-1&1\\0&0&1\end{pmatrix} \qquad L_2 \longleftrightarrow L_3 \qquad \begin{pmatrix}1&0&0\\2&0&1\\-2&1&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l}L_2 \longleftarrow L_2-L_3\\ L_1 \longleftarrow L_1+L_3\end{array} \qquad \begin{pmatrix}-1&1&0\\4&-1&1\\-2&1&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \qquad L_1 \longleftarrow L_1+2L_2 \qquad \begin{pmatrix}7&-1&2\\4&-1&1\\-2&1&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \qquad L_2 \longleftarrow -L_2 \qquad \begin{pmatrix}7&-1&2\\-4&1&-1\\-2&1&0\end{pmatrix}$$

Exercice 2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{4} + x - x^2$. L'objectif de cet exercice est d'étudier la nature de la suite définie par la donnée de $u_0 = y \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.

(1) (a) Montrer que pour tout réel $x,\ f(x) \leq \frac{1}{2}$.

En écrivant la forme canonique du trinôme, on obtient, pour tout réel x,

$$f(x) = \frac{1}{2} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$$

ce qui entraîne $f(x) \leq \frac{1}{2}$.

(On pouvait aussi étudier la fonction f...)

(b) En déduire que pour tout entier $n \geq 1,\ u_n \leq \frac{1}{2}$.

Pour tout entier $n \geq 1,\ u_n = f(u_{n-1}) \leq \frac{1}{2}$ d'après (a).

(2) On suppose, dans cette question seulement, que $y = 0$.

Montrer que la suite (u_n) est croissante, puis en déduire que la suite (u_n) converge vers une limite ℓ à déterminer.

• La fonction f est définie par un trinôme du second degré qui admet un maximum égal à $\frac{1}{2}$, atteint en $x = \frac{1}{2}$. Elle est donc croissante sur $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

• Montrons par récurrence que pour tout entier $n,\ 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{2}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $\mathscr{P}_n$ la propriété : « $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{2}$ »

— Pour $n = 0$, puisque $u_0 = 0$, on a $u_1 = \frac{1}{4}$ donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.

— Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathscr{P}_n$ est vraie. Montrons que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

Puisque la fonction f est croissante sur $[0, \frac{1}{2}]$, l'hypothèse $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{2}$ implique $f(0) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f\left(\frac{1}{2}\right)$, c'est à dire

$$\frac{1}{4} \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \frac{1}{2}$$

qui implique encore $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \frac{1}{2}$.

Ainsi, la propriété $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie dès que $\mathscr{P}_n$ est vraie.

— D'après le principe de récurrence sur $\mathbb{N}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{2}$

• La suite (u_n) est donc croissante et majorée par $\frac{1}{2}$. D'après le théorème de la limite monotone, elle est convergente vers une limite ℓ. D'après le théorème de prolongement des inégalités aux limites, cette limite ℓ est comprise entre 0 et $\frac{1}{2}$.

La continuité de f et la relation de récurrence impliquent $\ell = f(\ell)$ dont les solutions sont $\ell = \frac{1}{2}$ ou $\ell = -\frac{1}{2}$.

La limite ℓ est donc $\ell = \frac{1}{2}$.

(3) On suppose, dans cette question seulement, que $u_0 = y < -\frac{1}{2}$.

(a) Montrer que pour tout réel $x < -\frac{1}{2}$, $f(x) < x$.

Pour tout réel $x < -\frac{1}{2}$, on a $x^2 > \frac{1}{4}$ donc $f(x) - x = \frac{1}{4} - x^2 < 0$.

(b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

• Montrons par récurrence que pour tout entier n, $u_{n+1} < u_n < -\frac{1}{2}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $\mathscr{P}_n$ la propriété : « $u_{n+1} < u_n < -\frac{1}{2}$ »

— Pour $n = 0$, puisque $u_0 = y < -\frac{1}{2}$, on a $u_1 = f(y) < y = u_0 < -\frac{1}{2}$ d'après (3a) donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.

— Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathscr{P}_n$ est vraie. Montrons que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

Puisque la fonction f est croissante sur $]-\infty, -\frac{1}{2}]$, l'hypothèse $u_{n+1} < u_n < -\frac{1}{2}$ implique $f(u_{n+1}) < f(u_n) < f\left(-\frac{1}{2}\right)$, c'est à dire

$$u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq -\frac{1}{2}.$$

Ainsi, la propriété $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie dès que $\mathscr{P}_n$ est vraie.

— D'après le principe de récurrence sur $\mathbb{N}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} < u_n < -\frac{1}{2}$.

(c) Etablir que la suite (u_n) diverge vers $-\infty$.

La suite (u_n) est décroissante donc d'après le théorème de la limite monotone, elle est soit convergente soit divergente vers $-\infty$.

En cas de convergence, la continuité de f et la relation de récurrence impliquent que les seules limites possibles sont $\ell = \frac{1}{2}$ ou $\ell = -\frac{1}{2}$.

Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_0 = y < -\frac{1}{2}$ donc, en cas de convergence, on aurait $\lim u_n \leq y < -\frac{1}{2}$ ce qui est impossible, puisqu'il n'y a pas de limite possible strictement inférieure à $-\frac{1}{2}$!

La suite (u_n) diverge donc vers $-\infty$.

(4) On suppose, dans cette question seulement, que $u_0 = y > \frac{3}{2}$.

(a) Montrer que pour tout réel $x > \frac{3}{2}$, $f(x) < -\frac{1}{2}$.

Sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$, la fonction f décroît strictement donc pour tout réel $x > \frac{3}{2}$, $f(x) < f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$.

(b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

Puisque $u_0 = y > \frac{3}{2}$, la question (4a) implique $u_1 < -\frac{1}{2}$.

On peut donc appliquer le résultat démontré à la question (3) et affirmer que la suite (u_n) est décroissante à partir du rang 1. La décroissance de la suite (u_n) résulte alors de l'inégalité $u_1 < -\frac{1}{2} < \frac{3}{2} < u_0$.

(c) Etablir que la suite (u_n) diverge vers $-\infty$.

Pour tout entier $n \geq 1$, $u_n \leq u_1 < -\frac{1}{2}$. Comme en (3c), la convergence de la suite (u_n) est impossible. La suite (u_n) étant décroissante, le théorème de la limite monotone implique qu'elle diverge vers $-\infty$.

(5) On suppose, dans cette question seulement, que $-\frac{1}{2} < y < \frac{3}{2}$.

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-\frac{1}{2} < u_n < \frac{3}{2}$.

L'inégalité établie en (1a) donne $u_n \leq \frac{1}{2}$ pour tout entier $n \geq 1$.

• Montrons par récurrence, l'encadrement $-\frac{1}{2} < u_n \leq \frac{1}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $\mathscr{P}_n$ la propriété : « $-\frac{1}{2} < u_n \leq \frac{1}{2}$ »

— Pour $n = 1$: puisque pour tout $x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right[$, $-\frac{1}{2} < f(x) \leq \frac{1}{2}$, on a l'encadrement $-\frac{1}{2} < f(u_0) \leq \frac{1}{2}$ donc $\mathscr{P}_1$ est vraie.

— Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathscr{P}_n$ est vraie. Montrons que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.
Puisque la fonction f est strictement croissante sur $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, l'hypothèse $-\frac{1}{2} < u_n \leq \frac{1}{2}$ implique $f(-\frac{1}{2}) < f(u_n) \leq f\left(\frac{1}{2}\right)$, c'est à dire

$$-\frac{1}{2} < u_{n+1} \leq \frac{1}{2}.$$

Ainsi, la propriété $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie dès que $\mathscr{P}_n$ est vraie.

— D'après le principe de récurrence sur $\mathbb{N}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $-\frac{1}{2} < u_n \leq \frac{1}{2}$.

• L'encadrement établie ci-dessus et le fait que $-\frac{1}{2} < u_0 < \frac{3}{2}$ permettent donc d'affirmer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-\frac{1}{2} < u_n < \frac{3}{2}$.

(b) Montrer que pour tout réel $x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right[$, $\left|f(x) - \frac{1}{2}\right| \leq \left|x - \frac{1}{2}\right|$.

Pour tout réel t, $f(t) - \frac{1}{2} = \left(t - \frac{1}{2}\right)^2$.

Or lorsque $x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right[$, on a $\left|x - \frac{1}{2}\right| < 1$ donc pour tout réel $x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right[$,

$$\left|f(x) - \frac{1}{2}\right| = \left|x - \frac{1}{2}\right|^2 \leq \left|x - \frac{1}{2}\right|.$$

(c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left|u_n - \frac{1}{2}\right| \leq \left|y - \frac{1}{2}\right|^n$ et conclure quant à la convergence de la suite (u_n).

L'encadrement établie en (5a) permet d'appliquer l'inégalité précédente avec u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left|u_{n+1} - \frac{1}{2}\right| = \left|f(u_n) - \frac{1}{2}\right| \leq \left|u_n - \frac{1}{2}\right|.$$

On en déduit facilement par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left|u_n - \frac{1}{2}\right| \leq \left|u_0 - \frac{1}{2}\right|^n = \left|y - \frac{1}{2}\right|^n.$$

Puisque $\left|y - \frac{1}{2}\right| < 1$, $\lim \left|y - \frac{1}{2}\right|^n = 0$ et d'après le théorème de convergence par encadrement $\lim \left|u_n - \frac{1}{2}\right| = 0$, ce qui se réecrit encore $\lim u_n = \frac{1}{2}$.

Exercice 3. Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$ et tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose $J(k, n) = \int_0^1 x^k (1-x)^n \mathrm{d}x$ et $J(k, 0) = \int_0^1 x^k \mathrm{d}x$.

(1) **(a)** Calculer, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, $J(k, 0)$ et $J(k, 1)$.

(b) Montrer que quelque soient les entiers $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$J(k+1, n) = \frac{k+1}{n+1} J(k, n+1).$$

(2) Etablir, quelque soient les entiers $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$, l'égalité

$$J(k, n) = \frac{n!}{(k+1)(k+2)\dots(k+n+1)}.$$

(3) Le but de cette question est de simplifier la somme $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{2k+1}$ en utilisant le résultat précédent.

(a) Etablir l'égalité $S_n = \int_0^1 (1-t^2)^n \mathrm{d}t$.

(b) En déduire l'égalité $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} J(k,n)$

(c) En utilisant le résultat de la question (2), établir les égalités

$$S_n = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{n-k} = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k}$$

(d) Montrer l'égalité : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{n+1+k}$

(e) En déduire que $S_n = \dfrac{2^{2n}}{(2n+1)\binom{2n}{n}}$.

Exercice 4. On considère les matrices $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Soit de plus la matrice $M = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 2/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 2/3 \end{pmatrix}$.

(1) Exprimer J^2 en fonction de J. En déduire, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, J^n en fonction de J.

On trouve $J^2 = 3J$ et par récurrence (raisonnement à rédiger), on montre que pour tout entier $n \geq 2$, $J^n = 3^{n-1}J$. Cette formule est vraie aussi pour $n = 1$.

(2) Exprimer M sous la forme $aI_3 + bJ$ où a et b sont à déterminer. En déduire que, pour tout entier naturel n :

$$M^n = \frac{1}{2^n} I_3 + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) J.$$

Il est clair que $M = \frac{1}{6}J + \frac{1}{2}I_3$. Puisque I_3 et J commutent, les matrices $\frac{1}{6}J$ et $\frac{1}{2}I_3$ commutent aussi. Par application de la formule du binôme avec $n \geq 2$, on a donc

$$\begin{aligned}
M^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{6}J\right)^k \left(\frac{1}{2}I_3\right)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{2^{n-k}6^k} J^k \\
&= \frac{1}{2^n} I_3 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{3^{k-1}}{2^{n-k}6^k} J \\
&= \frac{1}{2^n} I_3 + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{2^{k-1}2^{n-k}6} \right) J \\
&= \frac{1}{2^n} I_3 + \frac{1}{6 \times 2^{n-1}} \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \right) J \\
&= \frac{1}{2^n} I_3 + \frac{2^n - 1}{6 \times 2^{n-1}} J
\end{aligned}$$

puisque $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} = 2^n - 1$. Enfin, $\dfrac{2^n-1}{6 \times 2^{n-1}} = \dfrac{2(2^n-1)}{6 \times 2^n} = \dfrac{1}{3}\left(1 - \dfrac{1}{2^n}\right)$ donc

$$M^n = \frac{1}{2^n} I_3 + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) J.$$

Cette formule reste valable lorsque $n = 0$ ou 1.

On pouvait aussi traiter cette question par récurrence.

(3) On étudie ici l'inversibilité de M. On pose $A = 6M$.

(a) Calculer $(A - 3I_3)^2$ puis $(A - 6I_3)(A - 3I_3)^2$.

$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ donc $A - 3I_3 = J$ puis $(A-3I_3)^2 = J^2 = 3J$. Par conséquent

$$(A-6I_3)(A-3I_3)^2 = 3\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O$$

(b) En déduire que A est inversible et donner l'inverse de A.

En développant le produit $(A-6I_3)(A-3I_3)^2$, on obtient

$$(A-6I_3)(A-3I_3)^2 = (A-6I_3)(A^2-6A+9I_3) = A^3 - 12A^2 + 45A - 54I_3 = 0$$

de sorte que $A\left(\frac{1}{54}(A^2-12A+45I_3)\right) = I_3$. La matrice A est inversible et son inverse est

$$A^{-1} = \frac{1}{54}(A^2-12A+45I_3)$$

On trouve

$$A^{-1} = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

(c) Conclure à l'inversibilité de M et donner la matrice inverse de M.

Puisque $M = \frac{1}{6}A$, la matrice A est aussi inversible et son inverse est $6A^{-1}$:

$$M^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

(4) On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $M^{-n} = (M^{-1})^n$. Vérifier que la formule obtenue en (2) reste vraie pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

On remarque que la formule obtenue en (2) donne bien M^{-1} lorsqu'on l'applique avec $n = -1$.
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. La matrice $M^{-n} = (M^{-1})^n$ est la matrice inverse de M^n : il suffit donc de vérifier que

$$M^n\left(\frac{1}{2^{-n}}I_3 + \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2^{-n}}\right)J\right) = \left(\frac{1}{2^n}I_3 + \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)J\right)\left(\frac{1}{2^{-n}}I_3 + \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2^{-n}}\right)J\right) = I_3$$

Le développement du membre de gauche donne

$$\begin{aligned} M^n\left(\frac{1}{2^{-n}}I_3 + \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2^{-n}}\right)J\right) &= I_3 + \frac{2^n-1}{3}J + \frac{1-2^n}{3\times 2^n}J + \frac{(1-2^n)(2^n-1)}{9\times 2^n}\times 3J \\ &= I_3 + \left(\frac{(2^n-1)2^n}{3\times 2^n} + \frac{1-2^n}{3\times 2^n} + \frac{(1-2^n)(2^n-1)}{3\times 2^n}\right)J \\ &= I_3 + \left(\frac{4^n - 2^n + 1 - 2^n + 2^n - 1 - 4^n + 2^n}{3\times 2^n}\right)J \\ &= I_3 + 0J = I_3. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$M^{-n} = (M^{-1})^n = \frac{1}{2^{-n}}I_3 + \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2^{-n}}\right)J = 2^nI_3 + \frac{1-2^n}{3}J.$$

Concours blanc 1. Epreuve b.

Veillez à bien justifier vos réponses : un exercice bien traité rapporte des points, un exercice traité de façon non rigoureuse ne rapporte pas de points. Malus de 2 points pour les copies mal rédigées. La durée de l'épreuve est de 4 heures. Aucune sortie avant la fin de l'épreuve. Les calculatrices ne sont pas autorisées.

Si, au cours de l'épreuve, vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez le sur votre copie et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous êtes amenés à prendre.

Ce sujet comporte quatre exercices indépendants.

Exercice 1. Dans cet exercice, on admettra le résultat suivant :

> **Proposition.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels.
> Si les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite ℓ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

On considère pour tout $p \in \mathbb{N}$, les intégrales $I_p = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^p}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

(1) Cette question a pour objet le calcul de I_0. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t.$$

(a) Justifier la dérivabilité de g sur $\mathbb{R}$ et donnez l'expression de $g'(x)$.

(b) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = g(x) + g(-x)$.
Montrer que h est une fonction constante que l'on précisera. Qu'en déduisez vous sur la fonction g ?

(c) Soit maintenant la fonction f définie sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ par $f(x) = g(\tan x)$. Justifier la dérivabilité de f et montrer que f' est une fonction constante à préciser. En déduire une expression simple pour $f(x)$.

(d) Déterminer la valeur de I_0.
On trouve $I_0 = \dfrac{\pi}{4}$. Revoir la correction du devoir précédent pour les détails.

(2) Relation de récurrence.

(a) Calculer I_1.

$$I_1 = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2$$

(b) Calculer $I_p + I_{p+2}$ en fonction de p.
Soit $p \in \mathbb{N}$.

$$I_p + I_{p+2} = \int_0^1 \frac{x^p + x^{p+2}}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int_0^1 x^p\mathrm{d}x = \frac{1}{p+1}.$$

(c) En déduire I_2 et I_3.
On a donc $I_2 = \dfrac{1}{0+1} - I_0 = 1 - \dfrac{\pi}{4}$ et $I_3 = \dfrac{1}{1+1} - I_1 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\ln 2$.

(3) Pour tout entier $n \geq 1$, on considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$, $s_n = u_{2n}$ et $t_n = u_{2n+1}$.

(a) Calculer $s_1, s_2, s_3, t_1, t_2, t_3$.

$$s_1 = u_2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \quad s_2 = u_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{7}{12}, \quad s_3 = u_6 = \frac{7}{12} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{37}{60}$$

$$t_1 = s_1 + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}, \quad t_2 = s_2 + \frac{1}{5} = \frac{47}{60}, \quad t_3 = s_3 + \frac{1}{7} = \frac{60 + 7\times 37}{7\times 60},$$

(b) Calculer $s_{n+1} - s_n$ et $t_{n+1} - t_n$ en fonction de n, et montrer que les suites $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$s_{n+1} - s_n = u_{2n+2} - u_{2n} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} > 0 \text{ et}$$

$$t_{n+1} - t_n = u_{2n+3} - u_{2n+1} = \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+2} < 0$$

donc la suite (s_n) est croissante et la suite (t_n) est décroissante.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, t_n - s_n = u_{2n+1} - u_{2n} = \dfrac{1}{2n+1}$ donc $\lim(t_n - s_n) = 0$.

Les suites $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont donc adjacentes.

(c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

Puisque les suites $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = (u_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes, elles convergent vers une même limite. D'après le résultat admis, la suite (u_n) est convergente.

(4) En utilisant le résultat admis en début d'énoncé, montrer que la suite définie par $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, est convergente.

Etudions les suites $(v_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$v_{2n+2} - v_{2n} = \frac{1}{4n+1} - \frac{1}{4n+3} > 0$$

et

$$v_{2n+3} - v_{2n+1} = \frac{1}{4n+5} - \frac{1}{4n+3} < 0$$

donc la suite $(v_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et la suite $(v_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, v_{2n+1} - v_{2n} = \dfrac{1}{4n+1}$ donc $\lim(v_{2n+1} - v_{2n}) = 0$.

Les suites $(v_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont donc adjacentes, et par conséquent convergent vers une même limite. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc convergente d'après le résultat admis.

(5) Etablir, pour tout entier $q \geq 1$, les égalités suivantes :

(a) $u_q + 2(-1)^q I_{2q+1} = \ln 2$

On va raisonner par récurrence en utilisant la relation de récurrence établie en (2b).

Pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, notons $\mathscr{P}_q$ la propriété « $u_q + 2(-1)^q I_{2q+1} = \ln 2.$ »

— Pour $q = 1$: $I_3 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\ln 2$ donc $1 - 2I_3 = \ln 2$. Or $u_1 = 1$ donc $u_1 + 2(-1)^1 I_3 = \ln 2$ et $\mathscr{P}_1$ est donc vraie.

— Soit $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathscr{P}_q$ est vraie. Donc

$$\begin{aligned}
\ln 2 &= u_q + 2(-1)^q I_{2q+1} \\
&= u_q + 2(-1)^q \left(\frac{1}{2q+2} - I_{2q+3}\right) \\
&= u_q + \frac{(-1)^q}{q+1} + 2(-1)^{q+1} I_{2q+3} \\
&= u_{q+1} + 2(-1)^{q+1} I_{2q+3}
\end{aligned}$$

donc $\mathscr{P}_{q+1}$ est vraie dès que $\mathscr{P}_q$ est vraie.

— D'après le principe de récurrence, pour tout entier $q \in \mathbb{N}^*$, $u_q + 2(-1)^q I_{2q+1} = \ln 2$.

(b) $v_q + (-1)^q I_{2q} = \dfrac{\pi}{4}$

Pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, notons $\mathscr{P}_q$ la propriété « $v_q + (-1)^q I_{2q} = \dfrac{\pi}{4}.$ »

— Pour $q = 1$: $I_2 = 1 - \dfrac{\pi}{4}$ donc $\dfrac{\pi}{4} = 1 - I_2$. Or $v_1 = 1$ donc $v_1 + (-1)^1 I_2 = \dfrac{\pi}{4}$ et $\mathscr{P}_1$ est donc vraie.

— Soit $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathscr{P}_q$ est vraie. Donc

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{4} &= v_q + (-1)^q I_{2q} \\
&= v_q + (-1)^q \left(\frac{1}{2q+1} - I_{2q+2}\right) \\
&= v_q + \frac{(-1)^q}{2q+1} + (-1)^{q+1} I_{2q+2} \\
&= v_q + \frac{(-1)^{q+1-1}}{2(q+1)-1} + (-1)^{q+1} I_{2(q+1)} \\
&= v_{q+1} + (-1)^{q+1} I_{2(q+1)}
\end{aligned}$$

donc $\mathscr{P}_{q+1}$ est vraie dès que $\mathscr{P}_q$ est vraie.

— D'après le principe de récurrence, pour tout entier $q \in \mathbb{N}^*$, $v_q + (-1)^q I_{2q} = \dfrac{\pi}{4}$.

(6) Déterminer les limites des suites $(I_p)_{p\in\mathbb{N}}, (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Pour tout $x \in [0, 1]$,

$$0 \leq \frac{x^p}{1+x^2} \leq x^p$$

donc, par positivité de l'intégrale,

$$0 \leq I_p \leq \frac{1}{p+1}.$$

Puisque $\lim\limits_{p\to+\infty} \dfrac{1}{p+1} = 0$, le théorème de convergence par encadrement implique $\lim\limits_{p\to+\infty} I_p = 0$.
Donc $\lim\limits_{q\to+\infty} I_{2q} = \lim\limits_{q\to+\infty} I_{2q+1} = 0$ et puisque la suite $(-1)^q$ est bornée,

$$\lim_{q\to+\infty} (-1)^q I_{2q} = \lim_{q\to+\infty} (-1)^q I_{2q+1} = 0$$

(produit d'une suite bornée par une suite tendant vers 0).
Il en résulte que

$$\lim u_q = \ln 2 \text{ et } \lim v_q = \frac{\pi}{4}.$$

(7) A l'aide d'une intégration par partieS, déterminer $\lim\limits_{p\to+\infty} pI_p$.

Pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$,

$$pI_p = \int_0^1 \frac{px^p}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int_0^1 px^{p-1}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x.$$

On pose $u(x) =$ et $v(x) =$
Les fonctions u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, 1]$, donc d'après le théorème d'intégration par partieS

$$\begin{aligned} pI_p &= \int_0^1 (x^p)'\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{x^{p+1}}{1+x^2}\right]_0^1 - \int_0^1 x^p\left(\frac{x}{1+x^2}\right)'\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2} - \int_0^1 x^p\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Pour tout réel $x \in [0, 1]$

$$0 \leq \frac{1-x^2}{1+x^2} \leq 1 - x^2$$

donc

$$0 \leq x^p\frac{1-x^2}{1+x^2} \leq x^{p+1} - x^{p+2}$$

donc par positivité de l'intégrale,

$$0 \leq \int_0^1 x^p\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x \leq \frac{1}{p+2} - \frac{1}{p+3} = \frac{1}{(p+2)(p+3)}$$

et puisque $\lim\limits_{p\to+\infty} \dfrac{1}{(p+2)(p+3)} = 0$, le théorème de convergence par encadrement donne

$$\lim_{p\to+\infty} \int_0^1 x^p\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x = 0$$

donc

$$\lim_{p\to+\infty} pI_p = \frac{1}{2}.$$

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le but de cet exercice est la simplification de la somme

$$S = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \cdots + \frac{1}{k+n} \right) \binom{n}{k}$$

qui se réécrit encore $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sum_{j=1}^{n} (-1)^k \frac{1}{k+j} \binom{n}{k}$

(1) Soit $j \in [\![1, n]\!]$. Montrer que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k+j} \binom{n}{k} = \int_0^1 t^{j-1}(1-t)^n \mathrm{d}t$.

Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ et tout $j \in [\![1, n]\!]$,

$$\frac{1}{k+j} = \int_0^1 x^{k+j-1} \mathrm{d}x$$

donc

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k+j} \binom{n}{k} &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \int_0^1 x^{k+j-1} \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 x^{j-1} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} x^k \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 x^{j-1} (1-x)^n \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

(2) Montrer que pour tout réel $t \in [0, 1]$, $\displaystyle(1-t)^n \sum_{j=1}^{n} t^{j-1} = (1-t)^{n-1}(1-t^n)$.

Si $t = 1$, l'égalité est claire.
Si $t \neq 1$,

$$(1-t)^n \sum_{j=1}^{n} t^{j-1} = (1-t)^n \frac{1-t^n}{1-t} = (1-t)^{n-1}(1-t^n)$$

(3) En déduire que $S = \displaystyle\frac{1}{n} - \int_0^1 t^n (1-t)^{n-1} \mathrm{d}t$

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k+j} \binom{n}{k} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \int_0^1 x^{j-1}(1-x)^n \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \sum_{j=1}^{n} x^{j-1}(1-x)^n \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 (1-x)^{n-1}(1-x^n) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 (1-x)^{n-1} \mathrm{d}x - \int_0^1 (1-x)^{n-1} x^n \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{n} - \int_0^1 (1-x)^{n-1} x^n \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

(4) Soit $m \in \mathbb{N}$ tel que $m \geq 2$. En intégrant par parties, établir une relation entre $\displaystyle\int_0^1 t^m (1-t)^{m-1} \mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^1 t^{m+1}(1-t)^{m-2} \mathrm{d}t$ et en déduire l'expression de $\displaystyle\int_0^1 t^m (1-t)^{m-1} \mathrm{d}t$ en fonction de m (on mettra en évidence un coefficient binômial). Conclure.

Soit $m \in \mathbb{N}$ tel que $m \geq 2$. Par intégration par parties, on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^1 t^m(1-t)^{m-1}\mathrm{d}t &= \int_0^1 \left(\frac{t^{m+1}}{m+1}\right)'(1-t)^{m-1}\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{t^{m+1}}{m+1}\times(1-t)^{m-1}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{t^{m+1}}{m+1}\times(m-1)(1-t)^{m-2}\mathrm{d}x \\ &= \frac{m-1}{m+1}\int_0^1 t^{m+1}(1-t)^{m-2}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

(les fonctions mises en jeu étant polynômiales, l'intégration par parties est valide).
Par récurrence, il vient

$$\begin{aligned}\int_0^1 t^m(1-t)^{m-1}\mathrm{d}t &= \frac{(m-1)(m-2)\times\cdots\times 1}{(m+1)(m+2)\times\cdots\times(m+m-1)}\int_0^1 t^{2m-1}\mathrm{d}t \\ &= \frac{(m-1)(m-2)\times\cdots\times 1}{(m+1)(m+2)\times\cdots\times(m+m-1)}\times\frac{1}{2m} \\ &= \frac{(m-1)!m!}{(2m)!} \\ &= \frac{1}{2m\binom{2m-1}{m}}\end{aligned}$$

En conclusion $S = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n\binom{2n-1}{n}}$

Exercice 3. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $a_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = a_n + \mathrm{e}^{-a_n}$.
On introduit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = x + \mathrm{e}^{-x}$.

(1) Nature de la suite (a_n).

(a) Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

Pour tout $n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} - a_n = \mathrm{e}^{-a_n} > 0$ donc la suite (a_n) est croissante strictement.

(b) Etudier les variations de la fonctions f.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ comme somme de fontions dérivables et sa dérivée sur $\mathbb{R}^+$ est donnée par

$$f'(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x}.$$

D'après la croissance stricte de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, pur tout réel $x > 0,\ \mathrm{e}^{-x} < 1$ donc $f'(x) > 0$ et f est par conséquent strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

(c) Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'inégalité $a_n \geq \ln(n+1)$ et en déduire la limite de la suite (u_n) lorsque n tend vers l'infini.

Supposons d'abord l'inégalité acquise. Puisque $\lim \ln(n+1) = +\infty$, par comparaison, la suite (a_n) diverge aussi vers $+\infty$.

Montrons, maintenant, l'inégalité par récurrence.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $\mathscr{P}_n$ la propriété : « $a_n \geq \ln(n+1)$ »

— Pour $n = 1, a_1 = 1 + \mathrm{e}^{-1} > 1 = \ln \mathrm{e} > \ln 2 = \ln(1+1)$ d'après la stricte positivité de la fonction exponentielle et la stricte croissance de la fonction logarithme. Donc $\mathscr{P}_1$ est vraie.

— Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathscr{P}_n$ est vraie. Montrons que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

On suppose donc $a_n \geq \ln(n+1)$. Puisque la fonction f est croissante, on a $f(a_n) \geq f(\ln(n+1))$ donc $a_{n+1} \geq \ln(n+1) + \mathrm{e}^{-\ln(n+1)} = \ln(n+2) + \ln(n+1) - \ln(n+2) + \dfrac{1}{n+1}$.

Il suffit donc de montrer que $\ln(n+1) - \ln(n+2) + \dfrac{1}{n+1} \geq 0$.

$$\begin{aligned}\ln(n+1) - \ln(n+2) + \frac{1}{n+1} &= \int_{n+2}^{n+1}\frac{1}{t}\mathrm{d}t + \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{1}{n+1} - \int_{n+1}^{n+2}\frac{1}{t}\mathrm{d}t \\ &= \int_{n+1}^{n+2}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Puisque $\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{t}$ est positif sur l'intervalle $[n+1,n+2]$, la positivité de l'intégrale donne $\displaystyle\int_{n+1}^{n+2}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t \geq 0$ donc $\ln(n+1)-\ln(n+2)+\dfrac{1}{n+1}\geq 0$ donc $a_{n+1}\geq \ln(n+2)$.
Ainsi, la propriété $\mathscr{P}_{n+1}$ est donc vraie dès que $\mathscr{P}_n$ est vraie.
— D'après le principe de récurrence sur $\mathbb{N}$, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$

(2) On pose, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $b_n=a_n-\ln(n)$.

(a) Etablir, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, l'inégalité $b_n>0$.
Puisque $a_n\geq \ln(n+1)$ et $\ln(n+1)>\ln n$ (croissance stricte de la fonction ln), on a $a_n>\ln n$ donc $b_n>0$.

(b) Etablir, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, l'encadrement $\dfrac{1}{n+1}\leq \ln(n+1)-\ln n\leq \dfrac{1}{n}$.
On procède comme dans le raisonnement par récurrence en (1c).
Soit $n\in\mathbb{N}^*$.
Pour tout réel $t\in[n,n+1]$, on a l'encadrement $\dfrac{1}{n+1}\leq\dfrac{1}{t}\leq\dfrac{1}{n}$ puis par positivité de l'intégrale,

$$\int_n^{n+1}\frac{1}{n+1}\mathrm{d}t\leq\int_n^{n+1}\frac{1}{t}\mathrm{d}t\leq\int_n^{n+1}\frac{1}{n}\mathrm{d}t$$

donc, puisque $\displaystyle\int_n^{n+1}\frac{1}{t}\mathrm{d}t=\ln(n+1)-\ln n$,

$$\frac{1}{n+1}\leq \ln(n+1)-\ln n\leq\frac{1}{n}.$$

(c) Montrer que la suite (b_n) est décroissante, puis qu'elle est convergente.
Soit $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
b_{n+1}-b_n &= a_{n+1}-\ln(n+1)-a_n+\ln(n)\\
&= \mathrm{e}^{-a_n}+\ln(n)-\ln(n+1)\\
&\leq \mathrm{e}^{-\ln(n+1)}+\ln(n)-\ln(n+1)\quad(\text{ car } a_n\geq\ln(n+1))\\
&\leq \frac{1}{n+1}+\ln(n)-\ln(n+1)
\end{aligned}$$

et d'après l'encadrement précdent, $\dfrac{1}{n+1}+\ln(n)-\ln(n+1)\leq 0$.
Par conséquent, la suite (b_n) est décroissante et minorée par 0, elle est donc convergente.

Exercice 4 (D'après ESCP 1994)**.** Pour tout réel t, on pose

$$A(t)=\begin{pmatrix}1-t & -t & 0\\ -t & 1-t & 0\\ -t & t & 1-2t\end{pmatrix}$$

et on appelle $\mathcal{M}$ l'ensemble des matrices de cette forme.
Par exemple, les matrices

$$P=\begin{pmatrix}0&-1&0\\-1&0&0\\-1&1&-1\end{pmatrix}\text{ et }Q=\begin{pmatrix}1/2&-1/2&0\\-1/2&1/2&0\\-1/2&1/2&0\end{pmatrix}$$

sont des matrices appartenant à l'ensemble $\mathcal{M}$ puisque $P=A(1)$ et $Q=A(\frac{1}{2})$.

(1) Soient s et t deux réels. Calculer le produit matriciel $A(s)A(t)$ et vérifier que $A(s)A(t)$ est encore une matrice de $\mathcal{M}$ en précisant le réel u tel que $A(s)A(t)=A(u)$.
Le produit $A(s)A(t)$ donne

$$\begin{pmatrix}1-s&-s&0\\-s&1-s&0\\-s&s&1-2s\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1-t&-t&0\\-t&1-t&0\\-t&t&1-2t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(1-t)(1-s)+st & -t(1-s)-s(1-t) & 0\\ -s(1-t)-t(1-s) & st+(1-t)(1-s) & 0\\ -s(1-t)-ts-t(1-2s) & st+s(1-t)+t(1-2s) & (1-2t)(1-2s)\end{pmatrix}$$

En posant $u=s+t-2st$, on obtient

$$\begin{pmatrix}1-s&-s&0\\-s&1-s&0\\-s&s&1-2s\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1-t&-t&0\\-t&1-t&0\\-t&t&1-2t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-u&-u&0\\-u&1-u&0\\-u&u&1-2u\end{pmatrix}$$

donc $A(s)A(t)=A(s+t-2st)$ ce qui montre que $A(s)A(t)$ est encore une matrice de $\mathcal{M}$.

(2) On s'intéresse ici aux matrices inversibles de $\mathcal{M}$.

(a) La matrice $Q = A(\frac{1}{2})$ est-elle inversible ?

En considérant le vecteur $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, on a

$$A(\frac{1}{2})\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/2 & -1/2 & 0\\ -1/2 & 1/2 & 0\\ -1/2 & 1/2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

ce qui donne une solution non nulle à l'équation $A(\frac{1}{2})X = 0$. La matrice $A(\frac{1}{2})$ est donc non inversible.

(b) Montrer que si $t \neq \frac{1}{2}$, la matrice $A(t)$ est inversible et donner son inverse. On vérifiera que $A(t)^{-1}$ est encore une matrice de $\mathcal{M}$.

Soit t un réel tel que $t \neq \dfrac{1}{2}$. On remarque que $A(0) = I_3$. On étudie donc l'équation d'inconnue s : $s + t - 2st = 0$. Celle-ci a pour solution $s = \dfrac{-t}{1-2t}$, bien définie pour $t \neq \frac{1}{2}$. Pour $s = \dfrac{-t}{1-2t}$, on a donc $A(s)A(t) = A(s+t-2st) = A(0) = I_3$ donc $A(t)$ est une matrice inversible et son inverse est donnée par

$$A(t)^{-1} = A\left(\frac{-t}{1-2t}\right).$$

(3) Déterminer les matrices S de $\mathcal{M}$ solutions de l'équation $S^2 = A(-\frac{3}{2})$.

On cherche S sous la forme $S = A(t)$: cette fois, on résoud donc $2t - 2t^2 = -\dfrac{3}{2}$ qui équivaut à $4t^2 - 4t - 3 = 0$. Cette équation a pour discriminant $\Delta = 4^2 - 4 \times 4 \times (-3) = 16 + 48 = 64 = 8^2$ donc l'équation a deux solutions

$$\frac{4-8}{8} = -\frac{1}{2} \text{ et } \frac{4+8}{8} = \frac{3}{2}.$$

L'équation $S^2 = A(-\frac{3}{2})$ a donc pour solutions les deux matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix}3/2 & 1/2 & 0\\ 1/2 & 3/2 & 0\\ 1/2 & -1/2 & 2\end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix}-1/2 & -3/2 & 0\\ -3/2 & -1/2 & 0\\ -3/2 & 3/2 & -2\end{pmatrix}$$

(4) On note J la matrice $A(-1)$ et on cherche à expliciter J^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. On rappelle que $J^0 = I_3$ par convention, où I_3 est la matrice identité.

(a) Montrer qu'il existe une suite (t_n) telle que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A(t_n) = J^n.$$

L'ensemble $\mathcal{M}$ est stable pour le produit matriciel et puisque $J = A(-1)$ est une matrice de $\mathcal{M}$,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, J^n \in \mathcal{M}$$

donc pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un réel t_n tel que $J^n = A(t_n)$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer une relation de récurrence entre t_{n+1} et t_n.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $J^{n+1} = J^n \times J$ donc $A(t_{n+1}) = A(t_n)A(-1) = A(t_n - 1 + 2t_n$ ce qui donne

$$t_{n+1} = 3t_n - 1$$

(c) Déterminer alors la matrice J^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$ en la représentant avec ses coefficients.

La suite (t_n) est une suite arithmético-géométrique de premier terme $t_0 = 0$ puisque $J^0 = I_3$.
L'équation $x = 3x-1$ a pour solution $x = \frac{1}{2}$. En posant $s_n = t_n - \frac{1}{2}$, on trouve $s_{n+1} = 3t_n - 1 - \frac{1}{2} = 3(t_n - \frac{1}{2}) = 3s_n$ donc la suite (s_n) est géométrique de raison 3 de premier terme $s_0 = t_0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$. Elle admet pour expression $s_n = -\frac{3^n}{2}$ donc

$$t_n = \frac{1-3^n}{2}$$

Par conséquent,

$$J^n = A(t_n) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+3^n & 3^n-1 & 0\\ 3^n-1 & 1+3^n & 0\\ 3^n-1 & 1-3^n & 2\times 3^n\end{pmatrix}$$

Correction du devoir surveillé 6.

Veillez à bien justifier vos réponses : un exercice bien traité rapporte des points, un exercice traité de façon non rigoureuse ne rapporte pas de points.

Soignez votre écriture et votre rédaction, faites des phrases complètes et $\boxed{\text{encadrez vos résultats.}}$

Le malus de 2 points pour les copies non soignées ou mal rédigées sera appliqué.
La durée de l'épreuve est de 4 heures.
Aucune sortie avant la fin de l'épreuve.
Les calculatrices ne sont pas autorisées.

Si, au cours de l'épreuve, vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez le sur votre copie et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous êtes amenés à prendre.

Ce sujet comporte quatre exercices indépendants.
Laissez une demi-page de garde pour les observations.

Exercice 1. Soit f la fonction définie sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ par $f(x) = \dfrac{1}{\cos x}$.
On admet que la fonction f est indéfiniment dérivable sur $[0, \frac{\pi}{4}]$.
On note $f^{(0)} = f$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f^{(n)}$ est la dérivée n^{e} de la fonction f.
Ainsi, $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = f''$, etc.

(1) Calculer, pour $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$, les dérivées $f'(x)$ et $f''(x)$ et montrer qu'elles s'écrivent sous la forme

$$f'(x) = \frac{P_1(\sin x)}{\cos^2(x)} \text{ et } f''(x) = \frac{P_2(\sin x)}{\cos^3(x)}$$

où P_1 et P_2 sont deux polynômes à déterminer.

Pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{-\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x}, \\ f''(x) &= \frac{\cos x \cos^2 x - (\sin x)(-2\sin x \cos x)}{\cos^4 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + 2\sin^2 x}{\cos^3 x} \\ &= \frac{\sin^2 x + 1}{\cos^3 x}. \end{aligned}$$

Les formules demandées sont donc vraies avec

$$P_1 = X \text{ et } P_2 = 1 + X^2.$$

(2) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, il existe un polynôme P_n tel que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$,

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin x)}{\cos^{n+1}(x)}$$

et

$$P_n = (1 - X^2)P'_{n-1} + nXP_{n-1}$$

Raisonnons par récurrence sur n.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $\mathcal{H}_n$ la propriété : « pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$, il existe un polynôme P_k tel que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$, $f^{(k)}(x) = \frac{P_k(\sin x)}{\cos^{k+1}(x)}$ et $P_k = (1 - X^2)P'_{k-1} + kXP_{k-1}$ »
La propriété est vraie pour $n = 1$ et $n = 2$ avec P_1 et P_2 trouvés en (1).
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathscr{H}_n$ est vraie.

Comme f est indéfiniment dérivable, la fonction $f^{(n)}$ est dérivable et pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$,

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f^{(n)}(x)) \\ &= \frac{\cos x P_n'(\sin x)\cos^{n+1} x - P_n(\sin x)(-(n+1)\sin x \cos^n x)}{\cos^{2n+2} x} \\ &= \frac{\cos^2 x P_n'(\sin x) + (n+1)\sin x P_n(\sin x)}{\cos^{n+2} x} \\ &= \frac{(1-\sin^2 x)P_n'(\sin x) + (n+1)\sin x P_n(\sin x)}{\cos^{n+2} x} \end{aligned}$$

Posons alors

$$P_{n+1} = (1-X^2)P_n' + (n+1)XP_n.$$

Comme une somme et produit de polynômes donnent un polynôme, P_{n+1} est un polynôme et

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{P_{n+1}(\sin x)}{\cos^{n+2} x}.$$

La propriété est donc vraie au rang $n+1$.
Le principe de récurrence sur $\mathbb{N}$ assure alors que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la propriété $\mathcal{H}_n$ est vraie.

(3) Déterminer, pour tout entier naturel n non nul, le degré et le coefficient dominant du polynôme P_n.

Calculons P_3 : $P_3(X) = (1-X^2)2X + 3X(1+X^2) = 5X + X^3$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, appelons a_n le coefficient dominant de P_n. Les premières valeurs $n = 1, 2$ et 3 donnent

$$\deg P_1 = 1,\ \deg P_2 = 2,\ \deg P_3 = 3$$

et

$$a_1 = a_2 = a_3 = 1.$$

Montrons par récurrence la propriété $\mathscr{P}_n$: « $\deg P_n = n$ et $a_n = 1$. »
C'est vrai pour $n = 1, n = 2$ et $n = 3$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathscr{P}_n$ est vraie.
On a donc $\deg(1-X^2)P_n' \leq 2 + (n-1) = n+1$ et $\deg(nXP_n) = 1+n$ donc $\deg P_{n+1} \leq n+1$.
D'après la formule de récurrence, le coefficient d'indice $n+1$ de P_{n+1} est

$$-na_n + (n+1)a_n = a_n = 1 \text{ par hypothèse de récurrence,}$$

donc le polynôme P_{n+1} est de degré $n+1$ et son coefficient dominant est $a_{n+1} = 1$.
La propriété est donc vraie au rang $n+1$.
D'après le principe de récurrence sur $\mathbb{N}$, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2. On note E l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifient la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = (4n+2)u_n + u_{n-1}$$

(1) On considère les deux suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartenant à E et définies par $\alpha_0 = \beta_1 = 1$ et $\alpha_1 = \beta_0 = 0$.

(a) Étudier la monotonie des suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On a $\alpha_0 = 1,\ \alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 6\alpha_1 + \alpha_0 = 1, \alpha_3 = 10\alpha_2 + \alpha_1 = 10$ et $\beta_0 = 0, \beta_1 = 1, \beta_2 = 6, \beta_3 = 61$.

Montrons que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante à partir du rang 1, et la suite (β_n) croissante dès le rang 0.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $\mathscr{P}_n$ la propriété « $0 \leq \alpha_n \leq \alpha_{n+1}$. »

- Pour $n = 1$ et $n = 2$, la propriété est vérifiée : $\alpha_1 = 0 \leq \alpha_2 = 1 \leq \alpha_3 = 10$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathscr{P}_n$ et $\mathscr{P}_{n+1}$ sont vraies.
On a

$$\alpha_{n+3} - \alpha_{n+2} = (4(n+2)+2)\alpha_{n+2} + \alpha_{n+1} - \alpha_{n+2} = (4n+9)\alpha_{n+2} + \alpha_{n+1}$$

et par hypothèse de récurrence $\alpha_{n+2}, \alpha_{n+1}$ sont positifs donc $\alpha_{n+3} - \alpha_{n+2} \geq 0$ donc $0 \leq \alpha_{n+2} \leq \alpha_{n+3}$.
Ainsi, la propriété $\mathscr{P}_{n+2}$ est vraie dès que $\mathscr{P}_n$ et $\mathscr{P}_{n+1}$ sont vraies.
- D'après le principe de récurrence sur $\mathbb{N}$, la propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Un raisonnement analogue montre que la suite (β_n) est croissante dès le rang 0.

(b) Montrer que les suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendent vers l'infini.

Ces deux suites sont croissantes à partir du rang 1 : d'après le théorème de la limite monotone, elles sont soit convergentes soit divergentes vers $+\infty$.

Supposons par l'absurde, que la suite (α_n) converge et appelons ℓ sa limite. Puisque $\alpha_2 = 1$, on a $\ell \geq 1$ et la relation de récurrence réecrite :

$$\alpha_{n+1} - \alpha_{n-1} = (4n+2)\alpha_n$$

impliquerait que le membre de droite tende vers $+\infty$ alors que le membre de gauche tend lui vers 0.

La suite (α_n) est donc divergente vers $+\infty$.

Le même raisonnement s'applique à la suite (β_n).

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\alpha_{n+1}\beta_n - \alpha_n\beta_{n+1} = (-1)^{n+1}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} \alpha_{n+1} &= (4n+2)\alpha_n + \alpha_{n-1} \\ \beta_{n+1} &= (4n+2)\beta_n + \beta_{n-1} \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \alpha_{n+1}\beta_n &= (4n+2)\alpha_n\beta_n + \alpha_{n-1}\beta_n \\ \beta_{n+1}\alpha_n &= (4n+2)\beta_n\alpha_n + \beta_{n-1}\alpha_n \end{aligned}$$

et après soustraction :

$$\alpha_{n+1}\beta_n - \alpha_n\beta_{n+1} = \alpha_{n-1}\beta_n - \alpha_n\beta_{n-1}$$

En posant $w_{n+1} = \alpha_{n+1}\beta_n - \alpha_n\beta_{n+1}$, on a donc la relation de récurrence

$$w_{n+1} = -w_n$$

qui définit donc une suite géométrique de raison (-1). Les formules géométriques donnent alors

$$\alpha_{n+1}\beta_n - \alpha_n\beta_{n+1} = w_{n+1} = (-1)^n w_1 = (-1)^n(\alpha_1\beta_0 - \alpha_0\beta_1) = (-1)^{n+1}$$

(d) Montrer que les deux suites $\left(\frac{\alpha_{2n}}{\beta_{2n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\left(\frac{\alpha_{2n+1}}{\beta_{2n+1}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes. On notera ℓ leur limite commune.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_{2n+2}}{\beta_{2n+2}} - \frac{\alpha_{2n}}{\beta_{2n}} &= \frac{\alpha_{2n+2}\beta_{2n} - \alpha_{2n}\beta_{2n+2}}{\beta_{2n}\beta_{2n+2}} \\ &= \frac{\left[(4(2n+1)+2)\alpha_{2n+1} + \alpha_{2n}\right]\beta_{2n} - \alpha_{2n}\left[(4(2n+1)+2)\beta_{2n+1} + \beta_{2n}\right]}{\beta_{2n}\beta_{2n+2}} \\ &= \frac{(8n+6)(\alpha_{2n+1}\beta_{2n} - \alpha_{2n}\beta_{2n+1})}{\beta_{2n}\beta_{2n+2}} \\ &= \frac{-(8n+6)}{\beta_{2n}\beta_{2n+2}} \end{aligned}$$

donc la suite $\left(\frac{\alpha_{2n}}{\beta_{2n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

Un calcul analogue montre que la suite $\left(\frac{\alpha_{2n+1}}{\beta_{2n+1}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_{2n}}{\beta_{2n}} - \frac{\alpha_{2n+1}}{\beta_{2n+1}} &= \frac{\alpha_{2n}\beta_{2n+1} - \alpha_{2n+1}\beta_{2n}}{\beta_{2n}\beta_{2n+1}} \\ &= \frac{1}{\beta_{2n}\beta_{2n+1}} \end{aligned}$$

et $\lim \beta_n = +\infty$ implique alors $\lim \beta_{2n}\beta_{2n+1} = +\infty$ qui implique $\lim \frac{\alpha_{2n}}{\beta_{2n}} - \frac{\alpha_{2n+1}}{\beta_{2n+1}} = 0$.

Les deux suites $\left(\frac{\alpha_{2n}}{\beta_{2n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\left(\frac{\alpha_{2n+1}}{\beta_{2n+1}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont donc adjacentes.

(e) Que peut-on dire de la suite $\left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$?

On rappelle le résultat suivant (hors-programme mais bon à savoir) :

Proposition. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels.
Si les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite ℓ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Puisque les suites $(\frac{\alpha_{2n}}{\beta_{2n}})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(\frac{\alpha_{2n+1}}{\beta_{2n+1}})_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent vers la même limite ℓ, la suite $(\frac{\alpha_n}{\beta_n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente vers ℓ.

(2) Comparaison asymptotique des suites.

(a) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $|\frac{\alpha_n}{\beta_n}-\ell| \leq \frac{1}{\beta_n\beta_{n+1}}$.

D'après le théorème des suites adjacentes, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$

$$\frac{\alpha_{2n+1}}{\beta_{2n+1}} \leq \ell \leq \frac{\alpha_{2n}}{\beta_{2n}}$$

donc

$$|\frac{\alpha_{2n}}{\beta_{2n}}-\ell| \leq \frac{\alpha_{2n}}{\beta_{2n}} - \frac{\alpha_{2n+1}}{\beta_{2n+1}} = \frac{1}{\beta_{2n}\beta_{2n+1}}$$

et de même

$$|\frac{\alpha_{2n+1}}{\beta_{2n+1}}-\ell| \leq \frac{1}{\beta_{2n}\beta_{2n+1}}.$$

Que n soit pair ou impair, l'inégalité

$$|\frac{\alpha_n}{\beta_n}-\ell| \leq \frac{1}{\beta_n\beta_{n+1}}$$

est donc vraie.

(b) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}(\alpha_n-\ell\beta_n)$.

Clairement, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\left|\alpha_n-\ell\beta_n\right| \leq \frac{1}{\beta_{2n+1}}$$

et puisque $\lim\beta_n=+\infty$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}(\alpha_n-\ell\beta_n)=0$.

(c) Soit $\mu\in\mathbb{R}$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}(\alpha_n-\mu\beta_n)$ en fonction de la position de μ par rapport à ℓ.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\alpha_n-\mu\beta_n=\alpha_n-\ell\beta_n+(\ell-\mu)\beta_n$ donc si $\mu<\ell$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(\alpha_n-\mu\beta_n)=+\infty$ et si $\mu>\ell$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(\alpha_n-\mu\beta_n)=-\infty$.

(3) Dans cette question, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne une suite de E.

(a) Montrer qu'il existe deux réels λ et λ' tels que :

$$u_0=\lambda\alpha_0-\lambda'\beta_0 \text{ et } u_1=\lambda\alpha_1-\lambda'\beta_1.$$

Le système d'équations se réecrit matriciellement :

$$\begin{pmatrix}\alpha_0 & -\beta_0\\ \alpha_1 & -\beta_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda\\ \lambda'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_0\\ u_1\end{pmatrix}$$

et la matrice 2×2 est inversible puisque $\alpha_0(-\beta_1)-(-\beta_0)\alpha_1=\alpha_1\beta_0-\beta_0\alpha_1=-1$ donc

$$\begin{pmatrix}\lambda\\ \lambda'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_0 & -\beta_0\\ \alpha_1 & -\beta_1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}u_0\\ u_1\end{pmatrix}$$

ce qui montre que λ et λ' existent.

(b) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=\lambda\alpha_n-\lambda'\beta_n$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, posons $\mathscr{P}_n$ la propriété « $u_n=\lambda\alpha_n-\lambda'\beta_n$. »

• Pour $n=0$ et $n=1$, la propriété vraie vu le choix de λ et λ'.

• Soit $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $\mathscr{P}_n$ et $\mathscr{P}_{n-1}$ sont vraies.
On a donc $u_{n-1}=\lambda\alpha_{n-1}-\lambda'\beta_{n-1}$ et $u_n=\lambda\alpha_n-\lambda'\beta_n$.
Par suite,

$$\begin{aligned}u_{n+1}&=(4n+2)u_n+u_{n-1}\\&=(4n+2)(\lambda\alpha_n-\lambda'\beta_n)+\lambda\alpha_{n-1}-\lambda'\beta_{n-1}\\&=\lambda((4n+2)\alpha_n+\alpha_{n-1})-\lambda'((4n+2)\beta_n+\beta_{n-1})\\&=\lambda\alpha_{n+1}-\lambda'\beta_{n+1}\end{aligned}$$

Ainsi, la propriété $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie dès que $\mathscr{P}_n$ et $\mathscr{P}_{n-1}$ sont vraies.

• D'après le principe de récurrence sur $\mathbb{N}$, la propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.

(c) Montrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, alors $\lambda' = \lambda\ell$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_n = \lambda\alpha_n - \lambda'\beta_n = \lambda(\alpha_n - \ell\beta_n) + (\lambda\ell - \lambda')\beta_n$$

donc

$$(\lambda\ell - \lambda')\beta_n = u_n - \lambda(\alpha_n - \ell\beta_n).$$

Si $\lim u_n = 0$ alors le membre de droite tend vers 0 d'après (2b) donc le membre de gauche doit aussi tendre vers 0. Mais puisque $\lim \beta_n = +\infty$, cela n'est possible que si $\lambda' = \lambda\ell$.

Exercice 3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $I_n = \displaystyle\int_0^1 (1-x)^n \mathrm{e}^{-2x}\, dx$.

(1) Calculer I_0 et I_1. Étudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n\geq 0}$.

On trouve $I_0 = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x = \left[\frac{\mathrm{e}^{-2x}}{-2}\right]_0^1 = \frac{1-\mathrm{e}^{-2}}{2}$ et par intégration par parties,

$$I_1 = \int_0^1 (1-x)\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x = \left[-(1-x)\frac{\mathrm{e}^{-x}}{2}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-2x}}{2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2} - \frac{1-\mathrm{e}^{-2}}{4} = \frac{1+\mathrm{e}^{-2}}{4}$$

Pour tout $x \in [0,1]$ et tout entier $n \in \mathbb{N}$, $(1-x)^{n+1} \leq (1-x)^n$ puisque $1-x \in [0,1]$ donc $(1-x)^{n+1}\mathrm{e}^{-2x} \leq (1-x)^n\mathrm{e}^{-2x}$ et par positivité de l'intégrale $I_{n+1} \leq I_n$ donc la suite (I_n) est décroissante.

(2) Montrer que la suite $(I_n)_{n\geq 0}$ converge et déterminer sa limite.

Pour tout $x \in [0,1]$, $0 \leq \mathrm{e}^{-2x} \leq 1$ donc $0 \leq (1-x)^n\mathrm{e}^{-2x} \leq (1-x)^n$ donc par positivité de l'intégrale

$$0 \leq I_n \leq \int_0^1 (1-x)^n\mathrm{d}x = \left[-\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

Puisque $\lim \dfrac{1}{n+1} = 0$, le théorème de convergence par encadrement assure la convergence de la suite (I_n) vers 0.

(3) Trouver une relation entre I_{n+1} et I_n. En déduire la limite de nI_n quand n tend vers $+\infty$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Les fonctions $u : x \mapsto (1-x)^{n+1}$ et $v : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-2x}}{-2}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$, donc par intégration par parties,

$$\begin{aligned}
I_{n+1} &= \int_0^1 u(x)v'(x)\mathrm{d}x \\
&= [u(x)v(x)]_0^1 - \int_0^1 u'(x)v(x)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2} - \frac{n+1}{2}\int_0^1 (1-x)^n\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2} - \frac{n+1}{2}I_n
\end{aligned}$$

ce qui se réecrit aussi $(n+1)I_n = 1 - 2I_{n+1}$ ou encore

$$nI_n = 1 - I_n - 2I_{n+1}.$$

Puisque $\lim I_n = \lim I_{n+1} = 0$, l'égalité précédente implique clairement $\lim nI_n = 1$.

Exercice 4. Soit p un entier de $\mathbb{N}^*$. On confond fonction polynomiale et polynôme associé.

(1) Soit f la fonction polynomiale définie par $f(x) = x^{2p+1} + x^{2p} - 2p$.

Étudier les variations de f et justifier que $f(x) = 0$ a une unique solution dans $\mathbb{R}$. On la note λ.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car polynômiale, de dérivée donnée par

$$f'(x) = (2p+1)x^{2p} + 2px^{2p-1} = x^{2p-1}(2p + (2p+1)x)$$

L'étude du signe de $f'(x)$ est aisée :

$$f'(x) > 0 \iff \left(x > 0 \text{ et } x > \frac{-2p}{2p+1}\right) \text{ ou } \left(x < 0 \text{ et } x < \frac{-2p}{2p+1}\right)$$

x	$-\infty$		$-\frac{2p}{2p+1}$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$f(-\frac{2p}{2p+1})$	$\searrow$	$-2p$	$\nearrow$	$+\infty$

Etudions le signe $f(-\frac{2p}{2p+1})$:

$$\begin{aligned}
f\left(-\frac{2p}{2p+1}\right) &= \left(-\frac{2p}{2p+1}\right)^{2p+1} + \left(-\frac{2p}{2p+1}\right)^{2p} - 2p \\
&= -\left(\frac{2p}{2p+1}\right)^{2p+1} + \left(\frac{2p}{2p+1}\right)^{2p} - 2p \\
&= \left(\frac{2p}{2p+1}\right)^{2p}\left(1 - \frac{2p}{2p+1}\right) - 2p \\
&= \frac{1}{2p+1}\left(\frac{2p}{2p+1}\right)^{2p} - 2p
\end{aligned}$$

Puisque $\frac{1}{2p+1}\left(\frac{2p}{2p+1}\right)^{2p} < 1$, on a $f\left(-\frac{2p}{2p+1}\right) < 1 - 2p < 0$

Les variations de f montrent que f est strictement négative sur $]-\infty, 0[$: l'équation $f(x) = 0$ n'a donc aucune solution dans $]-\infty, 0[$.

Sur $[0, +\infty[$, la fonction f est continue et strictement croissante. De plus, $f(0) = -2p < 0$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, donc d'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $[0, +\infty[$.

L 'équation $f(x) = 0$ a une unique solution dans $\mathbb{R}$: on la note λ. On sait même que $\lambda > 0$.

(2) Soit $a \in \mathbb{C}$ et n un entier tel que $n \geq 2$. Soit $P(X)$ un polynôme à coefficients complexes de degré n s'écrivant sous la forme $P(X) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k X^k$. On note P' le polynôme dérivé de P.

(a) Donner l'expression de $P'(X)$.

$$P'(X) = \sum_{k=1}^{n} k\alpha_k X^{k-1}$$

(b) On pose $Q(X) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \big(\sum_{i=0}^{k-1} a^{k-i-1} X^i\big)$.

Établir que $P(X) - P(a) = (X - a)Q(X)$. En déduire que $(X - a)^2$ divise $(P(X) - P(a))$ si et seulement si $\sum_{k=1}^{n} k\alpha_k a^{k-1} = 0$.

$$\begin{aligned}
P(X) - P(a) &= \sum_{k=0}^{n} \alpha_k (X^k - a^k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (X^k - a^k)
\end{aligned}$$

Or $X^k - a^k = (X - a)(X^{k-1} + aX^{k-2} + a^2X^{k-3} + \cdots + a^{k-2}X + a^{k--1}) = (X - a)\sum_{i=0}^{k-1} a^i X^{k-1-i}$ et un changement d'indice donne $X^k - a^k = (X - a)\sum_{i=0} a^{k-1-i} X^i$. Par suite,

$$\begin{aligned}
P(X) - P(a) &= \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (X - a) \sum_{i=0}^{k-1} a^{k-1-i} X^i \\
&= (X - a) \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \left(\sum_{i=0}^{k-1} a^{k-1-i} X^i\right) \\
&= (X - a)Q(X)
\end{aligned}$$

On en déduit que $(X-a)^2$ divise $P(X)-P(a)$ si et seulement si $Q(a)=0$, c'est à dire si et seulement si

$$\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\left(\sum_{i=0}^{k-1}a^{k-1-i}a^i\right)=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\left(\sum_{i=0}^{k-1}a^{k-1}\right)=\sum_{k=1}^{n}k\alpha_k a^{k-1}=0$$

(c) Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur $P(a)$ et $P'(a)$ pour que a soit racine au moins double de P.

On remarque que $P'(a)=\sum_{k=1}^{n}k\alpha_k a^{k-1}$.

Le nombre a est racine au moins double de P si et seulement si $P(a)=P'(a)=0$.

(3) Retour à l'étude des racines du polynôme $X^{2p+1}+X^{2p}-2p$.

(a) Montrer que le polynôme $X^{2p+1}+X^{2p}-2p$ admet $(2p+1)$ racines simples dans $\mathbb{C}$, toutes non nulles. On les notera $z_1,z_2,\cdots,z_{2p+1}$ avec $z_{2p+1}=\lambda$.

D'après le théorème de D'Alembert-Gauss, le polynôme $X^{2p+1}+X^{2p}-2p$ admet $(2p+1)$ racines dans $\mathbb{C}$ lorsqu'elles sont comptées avec leurs multiplicités.

Montrons que toutes les racines sont simples.

Supposons que β soit une racine au moins double de $X^{2p+1}+X^{2p}-2p$. On aurait alors :

$$\beta^{2p+1}+\beta^{2p}-2p=0 \text{ et } (2p+1)\beta^{2p}+2p\beta^{2p-1}=0$$

Le polynôme $X^{2p+1}+X^{2p}-2p$ n'admet pas 0 pour racine donc $\beta\neq 0$ et la deuxième équation donne alors

$$(2p+1)\beta+2p=0 \text{ soit } \beta=-\frac{2p}{2p+1}$$

Or la première question a permis d'établir que $f\left(-\frac{2p}{2p+1}\right)<1-2p<0$.

Le polynôme $X^{2p+1}+X^{2p}-2p$ n'admet donc aucune racine double et admet donc $2p+1$ racines simples dans $\mathbb{C}$.

(b) Montrer que pour tout k de $[\![1,2p+1]\!]$, $|z_k|\geq\lambda$. (On pourra considérer $f(|z_k|)$). Montrer que l'égalité a lieu si et seulement si $k=2p+1$.

Soit $k\in[\![1,2p+1]\!]$:

$$f(|z_k|)=|z_k|^{2p+1}+|z_k|^{2p}-2p\geq|z_k^{2p+1}+z_k^{2p}|-2p=2p-2p=0$$

L'étude des variations de f a montré que f reste strictement négative sur $]-\infty,\lambda[$ donc $|z_k|\geq\lambda$.

Pour l'équivalence, la condition suffisante est claire. Pour la condition nécessaire, si $|z_k|=\lambda$ alors

$$0=f(|z_k|)=|z_k|^{2p+1}+|z_k|^{2p}-2p\geq|z_k^{2p+1}+z_k^{2p}|-2p=2p-2p=0$$

donc

$$|z_k|^{2p+1}+|z_k|^{2p}=|z_k^{2p+1}+z_k^{2p}|$$

donc, après simplification par $|z_k|^{2p}\neq 0$, il vient

$$|1+z_k|=1+|z_k|$$

et après élévation au carrée, et réduction, cela donne

$$\Re\mathrm{e}(z_k)=|z_k|$$

donc z_k est réel et par conséquent $z_k=\lambda$ donc $k=2p+1$.

Exercice 5. On considère les matrices $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ et $J=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$.

Soit de plus la matrice $M=\begin{pmatrix}2/3&1/6&1/6\\1/6&2/3&1/6\\1/6&1/6&2/3\end{pmatrix}$.

(1) Exprimer J^2 en fonction de J. En déduire, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, J^n en fonction de J.

(2) En déduire, en utilisant la formule du binôme, que, pour tout entier naturel n :

$$M^n=\frac{1}{2^n}I_3+\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)J.$$

(3) Determination d'un polynôme annulateur de M. On pose $A = 6M$.

(a) Calculer le produit $(A - 6I_3)(A - 3I_3)^2$.

(b) En déduire que A est inversible et exprimer l'inverse de A en fonction de A^2, A et I_3.

On a $A^3 - 12A^2 + 45A - 54I_3 = 0$ de sorte que $A\left(\frac{1}{54}(A^2 - 12A + 45I_3)\right) = I_3$. La matrice A est inversible et son inverse est

$$A^{-1} = \frac{1}{54}(A^2 - 12A + 45I_3)$$

(c) A l'aide de (3a), montrer que $4M^3 - 8M^2 + 5M - I_3 = 0$.

En substituant $6M$ à A dans légalité $A^3 - 12A^2 + 45A - 54I_3 = 0$, on trouve

$$4M^3 - 8M^2 + 5M - I_3 = 0.$$

(4) Calcul de M^n par un polynôme annotateur. On introduit le polynôme $B(X) = 4X^3 - 8X^2 + 5X - 1$.

(a) Factoriser le polynôme B dans $\mathbb{R}[X]$ sachant qu'il possède une racine évidente.

Le polynôme B admet 1 pour racine évidente donc il se factorise par $(X-1)$. Une division euclidienne élémentaire donne $B(X) = (X-1)(4X^2 - 4X + 1)$ puis on constate que $4X^2 - 4X + 1 = (2X-1)^2$ donc

$$B(X) = 4(X-1)(X - \frac{1}{2})^2$$

(b) Déterminer le reste dans la division euclidienne du polynôme X^n par le polynôme $B(X)$.

Notons R ce reste et Q le quotient : on a donc $X^n = B(X)Q(X) + R(X)$ et $\deg R < \deg B$. Le reste est donc de degré au plus 2 : notons le sous la forme $R(X) = a + bX + cX^2$.
La racine 1 donne

$$1^n = 1 = 0 + R(1) = a + b + c$$

puis la racine $\frac{1}{2}$ donne

$$\frac{1}{2^n} = R(\frac{1}{2}) = a + \frac{b}{2} + \frac{c}{4}$$

.
Avec trois inconnues, il manque une équation ! On constate que $\frac{1}{2}$ est racine double de B donc $\frac{1}{2}$ est encore racine de $B'(X)$, on obtient donc avec $nX^{n-1} = B'(X)Q(X) + B(X)Q'(X) + R'(X)$ l'équation

$$\frac{n}{2^{n-1}} = b + c.$$

On obtient donc déjà

$$a = 1 - \frac{n}{2^{n-1}}.$$

Ensuite $b + \frac{c}{2} = 2(\frac{1}{2^n} - 1 + \frac{n}{2^{n-1}}) = \frac{2n+1}{2^{n-1}} - 2$ puis $\frac{c}{2} = (b+c) - (b + \frac{c}{2}) = \frac{n}{2^{n-1}} - \frac{2n+1}{2^{n-1}} + 2$ ce qui donne

$$c = 2\left(2 - \frac{n+1}{2^{n-1}}\right).$$

Enfin $b = \frac{n}{2^{n-1}} - c$ donc

$$b = \frac{3n+2}{2^{n-1}} - 4.$$

En conclusion, le reste cherché est

$$R(X) = 1 - \frac{n}{2^{n-1}} + \left(\frac{3n+2}{2^{n-1}} - 4\right)X + 2\left(2 - \frac{n+1}{2^{n-1}}\right)X^2$$

(c) En déduire le calcul de M^n et retrouver le résultat de la question (2).

En substituant M à l'indéterminée X dans l'égalité $X^n = B(X)Q(X) + R(X)$, on obtient

$$M^n = R(M) = \left(1 - \frac{n}{2^{n-1}}\right)I_3 + \left(\frac{3n+2}{2^{n-1}} - 4\right)M + 2\left(2 - \frac{n+1}{2^{n-1}}\right)M^2$$

Puisque $M = \frac{1}{2}I_3 + \frac{1}{6}J$ et $J^2 = 3J$, on a $M^2 = \frac{1}{4}I_3 + \frac{1}{6}J + \frac{3}{36}J = \frac{1}{4}I_3 + \frac{1}{4}J$ et par conséquent

$$M^n = \left(1 - \frac{n}{2^{n-1}}\right)I_3 + \left(\frac{3n+2}{2^{n-1}} - 4\right)\left(\frac{1}{2}I_3 + \frac{1}{6}J\right) + 2\left(2 - \frac{n+1}{2^{n-1}}\right)\left(\frac{1}{4}I_3 + \frac{1}{4}J\right)$$

soit après simplifications

$$M^n = \frac{1}{2^n}I_3 + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)J$$

Devoir surveillé 7.

Veillez à bien justifier vos réponses : un exercice bien traité rapporte des points, un exercice traité de façon non rigoureuse ne rapporte pas de points.

Soignez votre écriture et votre rédaction, faites des phrases complètes et encadrez vos résultats.

Le malus de 2 points pour les copies non soignées ou mal rédigées sera appliqué.
La durée de l'épreuve est de 4 heures.
Aucune sortie avant la fin de l'épreuve.
Les calculatrices ne sont pas autorisées.

Si, au cours de l'épreuve, vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez le sur votre copie et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous êtes amenés à prendre.

Ce sujet comporte quatre exercices indépendants.
Laissez une demi-page de garde pour les observations.

Exercice 1. Soit f la fonction définie sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ par $f(x) = \dfrac{1}{\cos x}$.
On admet que la fonction f est indéfiniment dérivable sur $[0, \frac{\pi}{4}]$.
On note $f^{(0)} = f$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f^{(n)}$ est la dérivée n^{e} de la fonction f.
Ainsi, $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = f''$, etc.

(1) Calculer, pour $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$, les dérivées $f'(x)$ et $f''(x)$ et montrer qu'elles s'écrivent sous la forme

$$f'(x) = \frac{P_1(\sin x)}{\cos^2(x)} \text{ et } f''(x) = \frac{P_2(\sin x)}{\cos^3(x)}$$

où P_1 et P_2 sont deux polynômes à déterminer.

(2) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, il existe un polynôme P_n tel que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$,

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin x)}{\cos^{n+1}(x)} \text{ et } P_n = (1 - X^2)P'_{n-1} + nXP_{n-1}$$

(3) Déterminer, pour tout entier naturel n non nul, le degré et le coefficient dominant du polynôme P_n.

Exercice déjà vu !

Exercice 2. On considère l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et l'application g de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ définies par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}\ln(1 + \mathrm{e}^x) \text{ et } g(x) = \frac{x}{1+x} - \ln(1 + x)$$

(1) (a) Etudier le signe de $g(x)$, selon les valeurs de x.

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ de dérivée donnée par

$$g'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{1+x} = \frac{-x}{(1+x)^2}.$$

La dérivée g' est négative sur $\mathbb{R}^+$ et ne s'annule qu'en 0 donc la fonction g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}+$. De plus, $g(0) = 0$ donc g est négative ou nulle sur $\mathbb{R}^+$.

(b) Étudier les variations de la fonction f.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit et composée de fonctions dérivables.

Sa dérivée est donnée par $f'(x) = -\mathrm{e}^{-x}\ln(1 + \mathrm{e}^x) + \mathrm{e}^{-x} \times \dfrac{\mathrm{e}^x}{1 + \mathrm{e}^x} = \dfrac{1}{1 + \mathrm{e}^x} - \mathrm{e}^{-x}\ln(1 + \mathrm{e}^x) = \mathrm{e}^{-x}g(\mathrm{e}^x)$. L'exponentielle étant strictement positive et la fonction g négative ou nulle, la dérivée f' est négative ou nulle. On peut même préciser que f' est strictement négative puisque g ne peut s'annuler qu'en 0 qui est une valeur impossible pour l'exponentielle.

La fonction f est donc strictement décroissante. Etudions ses limites en $+\infty$ et $-\infty$: d'une part,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\ln(1+\mathrm{e}^x)}{\mathrm{e}^x} = \lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$$

et d'autre part, par croissance de la fonction logarithme, pour tout réel x, $\ln(1+\mathrm{e}^x) = \ln(\mathrm{e}^x(1+\mathrm{e}^{-x})) = \ln(\mathrm{e}^x)+\ln(1+\mathrm{e}^{-x}) = x+\ln(1+\mathrm{e}^{-x})$ donc $f(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^x}+\mathrm{e}^{-x}\ln(1+\mathrm{e}^{-x})$ a pour limite 0 en $+\infty$ puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$ d'après le théorème des croissances comparées et $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x}\ln(1+\mathrm{e}^{-x}) = 0$ par produit de limites nulles.

(c) Déterminer les fonctions φ définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ qui vérifient la relation :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \varphi'(x) + \varphi(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}.$$

(On pourra commencer par multiplier chaque membre de l'équation par e^x)

La fonction φ vérifie la relation précédente si et seulement si : $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi'(x)\mathrm{e}^x + \varphi(x)\mathrm{e}^x = \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$.

Le premier membre est exactement la dérivée de $\mathrm{e}^x\varphi(x)$ et le second membre est la dérivée de $\ln(1+\mathrm{e}^x)$ donc la fonction φ vérifie la relation précédente si et seulement si : $\forall x \in \mathbb{R}, (\varphi(x)\mathrm{e}^x)' = (\ln(1+\mathrm{e}^x))'$.

Or deux fonctions possèdent la même dérivée si et seulement si leur différence est constante donc les fonctions φ admissibles sont les fonctions définies par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x)\mathrm{e}^x - \ln(1+\mathrm{e}^x) = k$$

soit encore

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ \varphi(x) = \mathrm{e}^{-x}\ln(1+\mathrm{e}^x) + \frac{k}{\mathrm{e}^x}$$

où k est un paramètre réel quelconque.

(2) On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = a \in \mathbb{R}^+$ et la relation : $\forall\, n \geq 0, u_{n+1} = f(u_n)$.

(a) Montrer qu'il existe un unique réel α tel que $f(\alpha) = \alpha$, et vérifier que α appartient à l'intervalle $]0,1[$.

Les fonctions $x \mapsto f(x)$ et $x \mapsto -x$ sont continues et strictement décroissantes sur $\mathbb{R}$ donc la fonction $x \mapsto f(x)-x$ est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

D'après les propriétés opératoires sur les limites, on a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - x = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = -\infty$.

Le théorème de la bijection assure alors que la fonction $x \mapsto f(x) - x$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$: le réel 0 admet donc un unique antécédent par cette fonction, qui est la seule solution de l'équation $f(x) = x$.

Appelons α cette solution : $f(0) - 0 = f(0) = \ln 2 > 0$ et $f(1) - 1 < 0$ puisque f est strictement décroissante et admet 1 pour limite en $-\infty$. La solution α vérifie donc $\alpha \in]0,1[$ d'après la propriété des valeurs intermédiaires.

(b) Montrer que pour tout $x \geq 0$, on a : $-\ln 2 \leq f'(x) \leq 0$.

D'une part, f' est négative donc pour tout $x \geq 0$, $f'(x) \leq 0$.

D'autre part, pour tout $x \geq 0$, $f'(x) = -f(x)+\frac{1}{1+\mathrm{e}^x} \geq -f(x)$ et puisque f décroit, on a pour tout $x \geq 0, f(x) \leq \ln 2$ donc $-f(x) \geq -\ln 2$ donc pour tout $x \geq 0$, on a : $-\ln 2 \leq f'(x)$.

(c) En déduire, quelque soient les réels positifs x et y, $|f(x) - f(y)| \leq |\ln 2| \times |x-y|$.

D'après la formule fondamentale du calcul intégral,

$$f(x) - f(y) = \int_x^y f'(t)\mathrm{d}t$$

et d'après l'inégalité triangulaire intégrale,

$$|f(x) - f(y)| \leq \int_{\min(x,y)}^{\max(x,y)} |f'(t)|\mathrm{d}t \leq |\ln 2||\max(x,y) - \min(x,y)| \leq |\ln 2||x-y|$$

(d) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.

Puisque f est positive sur $\mathbb{R}$, il est clair (par récurrence) que la suite (u_n) ainsi définie est positive.

En appliquant, l'inégalité précédente avec $x = u_n \geq 0$ et $y = \alpha > 0$, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |f(u_n) - f(\alpha)| \leq |\ln 2| \times |u_n - \alpha|$$

c'est à dire

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \alpha| \leq |\ln 2| \times |u_n - \alpha|.$$

Une récurrence facile (à mettre en oeuvre !) permet d'établir

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leq |\ln 2|^n |u_0 - \alpha|$$

et il ne reste plus qu'à observer que $1 < 2 < \mathrm{e}$ pour affirmer que $|\ln 2| < 1$ et par conséquent $\lim\limits_{n\to+\infty} |\ln 2|^n = 0$, entraînant à son tour (via le théorème de convergence par encadrement) $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - \alpha| = 0$.

Exercice 3. Etant donnée une fonction $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ on note, pour tout entier $n \geq 1$, $\quad f_n$ la fonction obtenue en composant n fois f avec elle-même donc :

$$f_n = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ fois}}$$

Ainsi $f_1 = f,\ f_2 = f \circ f, f_3 = f \circ f \circ f$, etc...
Dans cet exercice, on admettra le résultat suivant :

Proposition. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.
Si f est continue sur I et injective alors f est strictement monotone sur I.

On s'intéresse dans cet exercice au problème suivant : existe-t-il des fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(f(x)) - 2f(x) + x = 0 \text{ ?} \tag{1}$$

Dans toute la suite, la lettre f désigne une fonction continue solution du problème (1).

(1) **(a)** Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(y) = f(y) - 2y$. Exprimer $g \circ f$ en fonction de $I_{\mathbb{R}}$ et en déduire que f est injective.

Pour tout réel x,

$$g \circ f(x) = f(f(x)) - 2f(x) = -x$$

d'après l'équation vérifiée par f.
Donc $g \circ f = -I_{\mathbb{R}}$.
Comme $-I_{\mathbb{R}}$ est injective, $g \circ f$ est injective donc f est injective.

(b) Montrer que f est strictement monotone.

La fonction f est continue et injective sur $\mathbb{R}$, elle est donc strictement monotone, d'après la propriété admise.

(2) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(y) = f(y) - y$. Exprimer $h \circ f$ en fonction de h.

Pour tout réel x,

$$h \circ f(x) = f(f(x)) - f(x) = f(x) - x = h(x)$$

donc $h \circ f = h$.

(3) Dans cette question, on veut montrer que f n'est pas strictement décroissante. On suppose, par l'absurde, qu'elle l'est.

(a) Expliquer pourquoi on peut affirmer qu'il existe un réel a tel que $f(a) \neq a$.

S'il n'existe pas de réel a tel que $f(a) \neq a$, c'est que $f(a) = a$ pour tout réel a et f serait alors l'identité $I_{\mathbb{R}}$ de $\mathbb{R}$. La fonction f serait donc strictement croissante, ce qui contredit l'hypothèse.

(b) A l'aide de la fonction h, montrer que les cas $f(a) < a$ et $f(a) > a$ sont impossibles.

Commençons par supposer que $f(a) < a$. Comme f est strictement décroissante, la fonction h l'est aussi comme somme de deux fonctions strictement décroissantes.
Donc $h(f(a)) > h(a)$ et ceci est impossible d'après la question (2).
Le cas $f(a) > a$ est impossible pour des raisons analogues.

(c) Conclure quant à la monotonie de f.

L'hypothèse f strictement décroissante conduit à une impossibilité mathématique d'après ce qui précède.
Comme f est strictement monotone, elle est strictement croissante.

(4) Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la propriété vérifiée par f, on a $f_2(x) = 2f(x) - x$.

(a) Exprimer $f_3(x)$ en fonction de $f(x)$ et de x.

On a

$$\begin{aligned} f_3(x) &= f \circ f \circ f(x) \\ &= f_2(f(x)) \\ &= 2f \circ f(x) - f(x) \\ &= 2f_2(x) - f(x) \\ &= 2(2f(x) - x) - f(x) \\ &= 3f(x) - 2x \end{aligned}$$

(b) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, $\quad f_n(x) = nf(x) - (n-1)x$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, appelons $\mathscr{P}_n$ la propriété « $f_n(x) = nf(x) - (n-1)x$. »

— D'après ce qui précède, les propriétés $\mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_3$ sont vraies.

— Supposons la propriété vraie jusqu'à un certain rang $n \geq 3$. Montrons que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

On a

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) &= f \circ f \circ f_{n-1}(x) \\ &= f_2(f_{n-1}(x)) \\ &= 2f \circ f_{n-1}(x) - f_{n-1}(x) \\ &= 2f_n(x) - f_{n-1}(x) \\ &= 2(nf(x) - (n-1)x) - ((n-1)f(x) - (n-2)x) \\ &= (n+1)f(x) - nx. \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

— D'après le principe de récurrence sur $\mathbb{N}$, la propriété est vraie pour tout entier $n \geq 2$.

(5) On veut montrer dans cette question que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

Soient a et b deux réels tels que $a > b$.

(a) Justifier que pour tout entier $n \geq 2$, $f_n(a) > f_n(b)$.

Soit n une entier tel que $n \geq 2$.

La fonction f_n est strictement croissante comme composée de n fonctions strictement croissantes.

Comme $a > b$, on a $f_n(a) > f_n(b)$.

(b) A l'aide de la question (4), montrer que $f(a) - f(b) \geq a - b$.

D'après ce qui précède, pour tout entier $n \geq 2$, on a $f_n(a) > f_n(b)$ et donc d'après (4) :

$$nf(a) - (n-1)a > nf(b) - (n-1)b.$$

ou encore

$$n(f(a) - a) + a \geq n(f(b) - b) + b$$

qui donne après division par $n \geq 2$:

$$f(a) - a + \frac{a}{n} \geq f(b) - b + \frac{b}{n}.$$

Cette inégalité étant vraie pour tout entier $n \geq 2$, on peut « passer aux limites », en appliquant le théorème de prolongement des inégalités aux limites, pour avoir

$$f(a) - a \geq f(b) - b$$

ce qui s'écrit aussi $f(a) - f(b) \geq a - b$.

(c) En déduire les limites $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

D'après (b), quelque soient les réels a et b tels que $a > b$, on a $f(b) \leq b + f(a) - a$.

En maintenant a fixe et en faisant tendre b vers $-\infty$, on a $\lim\limits_{b \to -\infty} b + f(a) - a = -\infty$ donc $\lim\limits_{b \to -\infty} f(b) = -\infty$.

Pour la limite en $+\infty$, on écrit cette fois, $f(a) \geq a + f(b) - b$ et un « passage à la limite »sur a en maintenant b fixe, permet d'avoir $\lim\limits_{a \to +\infty} f(a) = +\infty$.

(d) Conclure.

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, strictement croissante et est telle que

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

D'après le théorème de la bijection, la fonction f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

(6) Comme f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, elle admet une bijection réciproque notée f^{-1}.

(a) Montrer que f^{-1} est aussi une solution du problème initial, c'est à dire qu'elle vérifie :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad f^{-1}(f^{-1}(y)) - 2f^{-1}(y) + y = 0.$$

D'abord, la fonction f^{-1} est continue sur $\mathbb{R}$ comme réciproque d'une fonction continue.

Soit $y \in \mathbb{R}$.

Comme f est une solution du problème, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(f(x)) - 2f(x) + x = 0.$$

En écrivant l'égalité pour $x = f^{-1}(f^{-1}(y))$, on obtient

$$\begin{aligned}0 &= f(f(f^{-1}(f^{-1}(y)))) - 2f(f^{-1}(f^{-1}(y))) + f^{-1}(f^{-1}(y)) \\ &= f \circ f \circ f^{-1} \circ f^{-1}(y) - 2f \circ f^{1} \circ f^{-1}(y) + f^{-1}(f^{-1}(y)) \\ &= f \circ (f \circ f^{-1}) \circ f^{-1}(y) - 2(f \circ f^{-1}) \circ f^{-1}(y) + f^{-1}(f^{-1}(y)) \\ &= f \circ I_{\mathbb{R}} \circ f^{-1}(y) - 2I_{\mathbb{R}} \circ f^{-1}(y) + f^{-1}(f^{-1}(y)) \\ &= f \circ f^{-1}(y) - 2f^{-1}(y) + f^{-1}(f^{-1}(y)) \\ &= y - 2f^{-1}(y) + f^{-1}(f^{-1}(y))\end{aligned}$$

Donc f^{-1} est aussi une solution du problème.

(b) En utilisant les résultats de la question (5), montrer que pour tous réels a et b,

$$f(a) - f(b) = a - b.$$

Soient a et b deux réels.

— Si $a = b$, l'égalité est claire.

— Si $a \neq b$, on peut supposer (quitte à échanger a et b) que $a > b$.

D'après la question (5b), on a $f(a) - f(b) \geq a - b$. Il ne reste plus qu'à établir que $a - b \geq f(a) - f(b)$ pour conclure à l'égalité.

Comme f est strictement croissante, on a $f(a) > f(b)$. Posons $a' = f(a)$ et $b' = f(b)$. On a donc $a' > b'$.

Comme f^{-1} est une solution du problème, on peut appliquer le résultat (5b) à f^{-1} et aux réels a' et b', ce qui donne

$$f^{-1}(a') - f^{-1}(b') \geq a' - b'$$

ou encore

$$a - b \geq f(a) - f(b).$$

L'égalité est donc acquise.

(c) En déduire qu'il existe un réel c tel que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x + c.$$

La propriété établie précédemment se reformule aussi sous la forme

$$\forall a \in \mathbb{R},\ \forall b \in \mathbb{R},\ f(a) - a = f(b) - b$$

ou encore

$$\forall a \in \mathbb{R},\ \forall b \in \mathbb{R},\ h(a) = h(b)$$

où la fonction h est celle de la question (2).

La fonction h est donc constante et par conséquent il existe un réel c tel que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x + c$$

(d) Conclure.

Les fonctions solutions du problème de départ sont donc parmi celles définies sur $\mathbb{R}$ par une expression de la forme

$$f(x) = x + c.$$

Reste à vérifier si ces fonctions conviennent. Soit c un réel et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + c$.

Pour tout réel x,

$$f(f(x)) - 2f(x) + x = f(x) + c - 2f(x) + x = x - f(x) + c = 0.$$

Ces fonctions conviennent donc bien.

Exercice 4. On désigne par n un entier naturel tel que $n \geq 2$.

Une urne contient une boule blanche et $n-1$ boules noires.

Trois joueurs A, B et C tirent à tour de rôle une boule de cette urne dans l'ordre suivant : A joue en premier, B joue après A, C joue après B, puis A joue après C etc.

Les tirages se font sans remise de la boule tirée.

Le gagnant est le premier des trois qui tire la boule blanche.

On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

— A_n l'événement « A gagne au n^{e} tirage »

— B_n l'événement « B gagne au n^{e} tirage »

— C_n l'événement « C gagne au n^{e} tirage »

On note A (resp B, C) l'événement « le joueur A (resp. B, C) est le gagnant . »

(1) Montrer que pour tout entier k tel que $3k+3 \leq n$,

$$P(A_{3k+1}) = P(B_{3k+2}) = P(C_{3k+3}) = \frac{1}{n}.$$

Le joueur A gagne au $3k+1^{\text{e}}$ tirage si et seulement si le joueur A tire la boule blanche au $3k+1^{\text{e}}$ tirage et si les trois joueurs ne tirent que des boules noires lors des $3k$ tirages précédents.

Désignons par W_j l'événement « le j^{e} tirage du jeu apporte une boule blanche » : l'événement A_{3k+1} s'exprime alors par

$$A_{3k+1} = \left(\bigcap_{j=1}^{3k} \overline{W_j}\right) \cap W_{3k+1}$$

Les tirages se faisant sans remise, on applique la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned}
P(A_{3k+1}) &= P(\overline{W_1})P_{\overline{W_1}}(\overline{W_2})P_{\overline{W_1}\cap\overline{W_2}}(\overline{W_3}) \times \cdots \times P_{\bigcap_{j=1}^{3k}\overline{W_j}}(W_{3k+1}) \\
&= \frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n-1} \times \frac{n-3}{n-2} \times \cdots \frac{n-3k}{n-3k+1} \times \frac{1}{n-3k} \\
&= \frac{1}{n} \qquad \text{(par téléscopage)}
\end{aligned}$$

De la même façon, on a

$$B_{3k+2} = \left(\bigcap_{j=1}^{3k+1} \overline{W_j}\right) \cap W_{3k+2}$$

et

$$\begin{aligned}
P(B_{3k+2}) &= P(\overline{W_1})P_{\overline{W_1}}(\overline{W_2})P_{\overline{W_1}\cap\overline{W_2}}(\overline{W_3}) \times \cdots \times P_{\bigcap_{j=1}^{3k+1}\overline{W_j}}(W_{3k+2}) \\
&= \frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n-1} \times \frac{n-3}{n-2} \times \cdots \frac{n-3k}{n-3k+1} \times \frac{n-3k-1}{n-3k} \times \frac{1}{n-3k-1} \\
&= \frac{1}{n} \qquad \text{(par téléscopage)}
\end{aligned}$$

puis

$$C_{3k+3} = \left(\bigcap_{j=1}^{3k+2} \overline{W_j}\right) \cap W_{3k+3}$$

et

$$\begin{aligned}
P(C_{3k+3}) &= P(\overline{W_1})P_{\overline{W_1}}(\overline{W_2})P_{\overline{W_1}\cap\overline{W_2}}(\overline{W_3}) \times \cdots \times P_{\bigcap_{j=1}^{3k+2}\overline{W_j}}(W_{3k+3}) \\
&= \frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n-1} \times \frac{n-3}{n-2} \times \cdots \frac{n-3k}{n-3k+1} \times \frac{n-3k-1}{n-3k} \times \frac{n-3k-2}{n-3k-1} \times \frac{1}{n-3k-2} \\
&= \frac{1}{n} \qquad \text{(par téléscopage)}
\end{aligned}$$

(2) On suppose que $n = 3m+1$ où $m \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$P(A) = \frac{m+1}{3m+1}, \; P(B) = P(C) = \frac{m}{3m+1}.$$

L'événement A se réalise si et seulement si l'un des événements $A_1, A_4, A_7, \dots, A_{3m+1}$ se réalise de sorte que A est la réunion

$$A = \bigcup_{k=0}^{m} A_{3k+1}.$$

Par additivité de P (les événements $A_1, A_4, A_7, \dots, A_{3m+1}$ sont deux à deux incompatibles), on a

$$P(A) = \sum_{k=0}^{m} P(A_{3k+1}) = \frac{m+1}{n} = \frac{m+1}{3m+1}.$$

De même, B se réalise si et seulement si l'un des événements $B_2, B_5, B_8, \dots, B_{3m-1}$ se réalise de sorte que A est la réunion

$$B = \bigcup_{k=0}^{m-1} B_{3k+2}.$$

Par additivité de P, on a

$$P(B) = \sum_{k=0}^{m-1} P(B_{3k+2}) = \frac{m}{n} = \frac{m}{3m+1}$$

En suivant la même démarche pour C :

$$P(C) = \sum_{k=0}^{m-1} P(C_{3k+3}) = \frac{m}{n} = \frac{m}{3m+1}$$

(3) On suppose que $n = 3m+2$ où $m \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$P(A) = P(B) = \frac{m+1}{3m+2}, \; P(C) = \frac{m}{3m+2}.$$

La même démarche qu'en (2) donne ici

$$P(A) = \sum_{k=0}^{m} P(A_{3k+1}) = \frac{m+1}{n} = \frac{m+1}{3m+2},$$

$$P(B) = \sum_{k=0}^{m} P(B_{3k+2}) = \frac{m}{n} = \frac{m+1}{3m+2}$$

et

$$P(C) = \sum_{k=0}^{m-1} P(C_{3k+3}) = \frac{m}{n} = \frac{m}{3m+2}$$

(4) On suppose que $n = 3m+3$ où $m \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{3}.$$

Mêmes calculs !

$$P(A) = \sum_{k=0}^{m} P(A_{3k+1}) = \frac{m+1}{n} = \frac{m+1}{3m+3} = \frac{1}{3},$$

$$P(B) = \sum_{k=0}^{m} P(B_{3k+2}) = \frac{m}{n} = \frac{m+1}{3m+3} = \frac{1}{3}$$

et

$$P(C) = \sum_{k=0}^{m} P(C_{3k+3}) = \frac{m+1}{n} = \frac{m+1}{3m+3} = \frac{1}{3}$$

Corrigé de l'épreuve a du concours blanc 2.

Veillez à bien justifier vos réponses : un exercice bien traité rapporte des points, un exercice traité de façon non rigoureuse ne rapporte pas de points. Malus de 2 points pour les copies mal rédigées. La durée de l'épreuve est de 4 heures. Aucune sortie avant la fin de l'épreuve. Les calculatrices ne sont pas autorisées.

Si, au cours de l'épreuve, vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez le sur votre copie et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous êtes amenés à prendre.

Ce sujet comporte quatre exercices indépendants.

Exercice 1. On lance un dé équitable trois fois de suite. Les numéros obtenus successivement sont notés a, b, c.

(1) Calculer la probabilité que l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ ait deux racines réelles distinctes.

Un résultat de l'expérience est un triplet (a, b, c) de $[\![1, 6]\!]^3$, le cardinal de l'univers est donc $\mathrm{card}\Omega = 6^3$.
L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux racines réelles distinctes si et seulement si $b^2 > 4ac$.
Pour $b = 1$, il n'y a aucun couple $(a, c) \in [\![1, 6]\!]^2$ vérifiant $4ac < 1$ puisque $ac \geq 1$.
Pour $b = 2$, il n'y a aucun couple $(a, c) \in [\![1, 6]\!]^2$ vérifiant $4ac < 4$ puisque $ac \geq 1$.
Pour $b = 3$, il y a trois couples $(a, c) \in [\![1, 6]\!]^2$ vérifiant $4ac < 9$, il s'agit des couples $(1, 1); (1, 2); (2, 1)$.
Pour $b = 4$, il y a cinq couples $(a, c) \in [\![1, 6]\!]^2$ vérifiant $4ac < 16$, il s'agit des couples $(1, 1); (1, 2); (2, 1); (1, 3); (3, 1)$.
Pour $b = 5$, il y a 14 couples $(a, c) \in [\![1, 6]\!]^2$ vérifiant $4ac < 25$, il s'agit des couples

$$(1, 1); (1, 2); (2, 1); (1, 3); (3, 1); (2, 2); (1, 4); (4, 1); (1, 5); (5, 1); (1, 6); (6, 1); (2, 3); (3, 2).$$

Enfin, pour $b = 6$, il y a 16 couples $(a, c) \in [\![1, 6]\!]^2$ vérifiant $4ac < 36$, il s'agit des couples

$$(1, 1); (1, 2); (2, 1); (1, 3); (3, 1); (2, 2); (1, 4); (4, 1); (1, 5); (5, 1); (1, 6); (6, 1); (2, 3); (3, 2); (2, 4); (4, 2).$$

La probabilité cherchée est donc $\dfrac{3 + 5 + 14 + 16}{6^3} = \dfrac{38}{216} = \dfrac{19}{108}$

(2) Calculer la probabilité que l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'ait pas de racines réelles.

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'a pas de racines réelles si et seulement si $b^2 < 4ac$.
Pour $b = 1$, tous les couples $(a, c) \in [\![1, 6]\!]^2$ vérifiant $4ac > 1$ puisque $ac \geq 1$: il y en a 36.
Pour $b = 2$, il y a 35 couples $(a, c) \in [\![1, 6]\!]^2$ vérifiant $4ac > 4$: seul le couple $(1, 1)$ ne convient pas.
Pour $b = 3$, il y a 33 couples $(a, c) \in [\![1, 6]\!]^2$ vérifiant $4ac > 9$: seuls les couples $(1, 1); (1, 2); (2, 1)$ ne conviennent pas.
Pour $b = 4$, il y a 28 couples $(a, c) \in [\![1, 6]\!]^2$ vérifiant $4ac > 16$: seuls les couples $(1, 1); (1, 2); (2, 1); (1, 3); (3, 1); (1, 4); (4, 1); (2, 2$
ne conviennent pas.
Pour $b = 5$, il y a 22 couples $(a, c) \in [\![1, 6]\!]^2$ vérifiant $4ac > 25$
seuls les couples

$$(1, 1); (1, 2); (2, 1); (1, 3); (3, 1); (2, 2); (1, 4); (4, 1); (1, 5); (5, 1); (1, 6); (6, 1); (2, 3); (3, 2)$$

ne conviennent pas.
Enfin, pour $b = 6$, il y a 19 couples $(a, c) \in [\![1, 6]\!]^2$ vérifiant $4ac > 36$, les couples qui ne conviennent pas étant

$$(1, 1); (1, 2); (2, 1); (1, 3); (3, 1); (2, 2); (1, 4); (4, 1); (1, 5); (5, 1); (1, 6); (6, 1); (2, 3); (3, 2); (2, 4); (4, 2); (3, 3);$$

La probabilité cherchée est donc $\dfrac{36 + 35 + 33 + 28 + 22 + 19}{6^3} = \dfrac{173}{216}$.

(3) On pose $P = aX^2 + bX + c$. Calculer la probabilité que le polynôme P admette une racine double.

Le polynôme $P = aX^2 + bX + c$ admet une racine double si et seulement $b^2 = 4ac$.
Les deux cas précdents permettent d'établir qu'il y a $216 - 173 - 38 = 5$ triplets (a, b, c) vérifiant $b^2 = 4ac$.
La probabilité cherchée est donc $\dfrac{5}{216}$.

(4) Calculer la probabilité que le polynôme $X - a$ divise le polynôme $X^2 + bX + c$.

Le polynôme $X - a$ divise le polynôme $X^2 + bX + c$ si et seulement si $a^2 + ab + c = 0$.
Les nombres a, b, c étant strictement positifs, l'égalité $a^2 + ab + c = 0$ ne se produit jamais donc la probabilité cherchée est nulle.

(5) Calculer la probabilité que la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ soit inversible.

La matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ est non inversible si et seulement si $ac = b^2$.
Pour $b = 1$, il y a un seul couple $(a, c) \in [\![1, 6]\!]^2$ réalisant $ac = 1$: il s'agit de $(1, 1)$.
Pour $b = 2$, il y a trois couples $(a, c) \in [\![1, 6]\!]^2$ réalisant $ac = 4$: il s'agit de $(1, 4); (4, 1); (2, 2)$.
Pour $b = 3$, il y a un seul couple $(a, c) \in [\![1, 6]\!]^2$ réalisant $ac = 9$: il s'agit de $(3, 3)$.
Pour $b = 4$, il y a un seul couple $(a, c) \in [\![1, 6]\!]^2$ réalisant $ac = 16$: il s'agit de $(4, 4)$.
Pour $b = 5$, il y a un seul couple $(a, c) \in [\![1, 6]\!]^2$ réalisant $ac = 25$: il s'agit de $(5, 5)$.
Pour $b = 6$, il y a un seul couple $(a, c) \in [\![1, 6]\!]^2$ réalisant $ac = 36$: il s'agit de $(6, 6)$.
Il y a donc huit triplets (a, b, c) de $[\![1, 6]\!]^3$ pour lesquels la matrice est non inversible.
Par complémentarité, la probabilité cherchée est donc $\dfrac{216 - 8}{216} = \dfrac{208}{216} = \dfrac{26}{27}$.

Exercice 2. On considère l'application f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f(x) = x^x = \mathrm{e}^{x \ln x} \\ \qquad\qquad\quad f(0) = 1 \end{cases}$$

Pour deux fonctions u et v définies sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$, on dit que u **est négligeable devant** v **au voisinage de** $+\infty$ si $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{u(x)}{v(x)} = 0$.

(1) Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}_+$.

La fonction f est continue et dérivable sur $]0, +\infty[$ comme produit et composée de fonctions dérivables.
De plus $\lim_{x \to 0} x \ln x = 0$ de sorte que $\lim_{x \to 0} f(x) = 1 = f(0)$: la fonction f est donc continue en 0 aussi. Ainsi f est continue sur $\mathbb{R}^+$.
Etudions la dérivabilité en 0 : pour tout $x > 0$,

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{\mathrm{e}^{x \ln x} - 1}{x} = \frac{\mathrm{e}^{x \ln x} - 1}{x \ln x} \times \ln x$$

Puisque $\lim\limits_{u \to 0} \dfrac{\mathrm{e}^u - 1}{u} = 1$, on obtient par composition de limites $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{e}^{x \ln x} - 1}{x \ln x} = 1$. Or $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = -\infty$.
La fonction f n'est donc pas dérivable en 0.

(2) Dresser le tableau de variations de f.

Pour tout $x > 0$, $f'(x) = (\ln x + 1)\mathrm{e}^{x \ln x}$ de sorte que $f'(x) > 0$ si et seulement si $x > \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.
On obtient le tableau de variation suivant :

x	0		$\frac{1}{\mathrm{e}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	1	$\searrow$	$\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-1}}$	$\nearrow$	$+\infty$

(3) On considère un repère orthonormal $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan et l'on note $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans ce repère. Quelle est la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à sa tangente $(\mathcal{T})$ en son point d'abscisse 1 ?

La fonction f est indéfiniment dérivable sur $]0, +\infty[$: le calcul de la dérivée seconde donne

$$f''(x) = \frac{1}{x}\mathrm{e}^{x \ln x} + (\ln x + 1)^2 \mathrm{e}^{x \ln x}$$

donc $f''(x) > 0$ sur $]0, +\infty[$. La fonction f est donc convexe et sa courbe est donc située au dessus de sa tangente au point d'abscisse $x = 1$.

(4) On note g la restriction de f à l'intervalle $I = \left[\dfrac{1}{\mathrm{e}}, +\infty\right[$. Démontrer que g réalise une bijection de I sur un intervalle J que l'on précisera.

Sur l'intervalle $I = \left[\dfrac{1}{\mathrm{e}}, +\infty\right[$, la fonction g est continue et strictement croissante avec pour limite $+\infty$ en $+\infty$. Le théorème de la bijection assure que g réalise une bijection de I sur l'intervalle $J = [\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-1}}, +\infty[$.

(5) Démontrer qu'il existe une application φ de J vers I telle que :

$$\forall x \in J, \quad \varphi(x)^{\varphi(x)} = x.$$

Soit φ la bijection réciproque de g : elle est définie sur J à valeurs dans I et vérifie

$$\forall x \in J, \ g(\varphi(x)) = x$$

donc

$$\forall x \in J, \quad \varphi(x)^{\varphi(x)} = x.$$

(6) Etablir que φ est négligeable devant la fonction logarithme népérien au voisinage de plus l'infini.

Etudions la limite $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\varphi(x)}{\ln x}$.
L'égalité précédente donne :

$$\forall x \in J, \quad \varphi(x)\ln(\varphi(x)) = \ln x.$$

donc

$$\frac{\varphi(x)}{\ln x} = \frac{1}{\ln(\varphi(x))}.$$

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, on a aussi $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = +\infty$ donc $\lim \dfrac{1}{\ln(\varphi(x))} = 0$.

Ainsi : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\varphi(x)}{\ln x} = 0$.

(7) Déterminer le plus grand intervalle K inclus dans J sur lequel φ est dérivable et montrer que :

$$\forall x \in K, \quad \varphi'(x) = \frac{\varphi(x)}{x(\varphi(x) + \ln x)}.$$

Il s'agit d'étudier la dérivabilité d'une réciproque.
Le caractère bijectif de g a déjà été établi.
La fonction g est dérivable sur I avec une dérivée nulle en $x = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ et strictement positive sur $\left]\dfrac{1}{\mathrm{e}}, +\infty\right[$.
D'après le théorème de dérivabilité d'une réciproque, le plus grand intervalle sur lequel la fonction φ est dérivable est $K = \left]\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-1}}, +\infty\right[$ et

$$\varphi'(x) = \frac{1}{g'(\varphi(x))} = \frac{1}{(\ln(\varphi(x)) + 1)g(\varphi(x))} = \frac{1}{(\ln(\varphi(x)) + 1)x}$$

Or $\dfrac{1}{(\ln(\varphi(x)) + 1)} = \dfrac{1}{1 + \frac{\ln x}{\varphi(x)}} = \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(x) + \ln x}$ donc $\varphi'(x) = \dfrac{\varphi(x)}{x(\varphi(x) + \ln x)}$.

(8) On note (Γ) la courbe représentative de φ dans le repère $\mathcal{R}$ et, pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$, on note $(\mathcal{T}_n)$ la tangente à (Γ) en son point d'abscisse n.

(a) Déterminer l'abscisse u_n du point d'intersection de $(\mathcal{T}_n)$ avec l'axe $(O, \overrightarrow{i})$.
La tangente au point d'abscisse n de (Γ) a pour équation $y = \varphi'(n)(x - n) + \varphi(n)$.
L'abscisse u_n du point d'intersection de $(\mathcal{T}_n)$ avec l'axe $(O, \overrightarrow{i})$ est donc

$$u_n = n - \frac{\varphi(n)}{\varphi'(n)} = n - n(\varphi(n) + \ln n) = -n\ln n - n\varphi(n) + n$$

(b) Donner un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers plus l'infini.

$$\lim \frac{u_n}{-n\ln n} = \lim\left(1 + \frac{\varphi(n)}{\ln n} - \frac{1}{\ln n}\right) = 1$$

puisque $\lim \dfrac{\varphi(n)}{\ln n} = \lim \dfrac{1}{\ln n} = 0$ donc $u_n \sim -n\ln n$

Exercice 3. Etude de convergence de quelques séries.

(1) **(a)** Montrer que $\dfrac{1}{1+x} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k + (-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{1+x}$ pour tout $x \in [0,1[$ et tout $n \in \mathbb{N}$. L'égalité est elle vraie pour $x = 1$?

Soit $x \in [0,1[$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k &= \sum_{k=0}^{n}(-x)^k \\ &= \frac{1-(-x)^{n+1}}{1-(-x)} \text{ car } -x \neq 1 \\ &= \frac{1}{1+x} + (-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{1+x)}\end{aligned}$$

D'où le résultat.

Ce calcul reste vrai pour $x = 1$ puisque $-x \neq 1$.

(b) En déduire que $\ln(1+x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} + (-1)^{n+1}\int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t}\mathrm{d}t$ pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$.

Soit $x \in [0,1]$. Les expressions intervenant dans l'égalité précédente définissent des fonctions continues sur $[0,x]$ donc en intégrant entre 0 et x, il vient :

$$\int_0^x \frac{1}{1+t}\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n}\int_0^x (-1)^k t^k \mathrm{d}t + (-1)^{n+1}\int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t}\mathrm{d}t.$$

Le membre de gauche est $\ln(1+x)$ et l'intégrale qui apparaît dans la somme est $\displaystyle\int_0^x (-1)^k t^k \mathrm{d}t = (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1}$ donc

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} + (-1)^{n+1}\int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t}\mathrm{d}t.$$

(c) Montrer alors que $\left|\ln 2 - \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}\right| \leq \dfrac{1}{n+2}$ et conclure quant à la nature et à la somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{n+1}$.

Avec $x = 1$, on obtient

$$\ln 2 = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1} + (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}\mathrm{d}t$$

L'inégalité sera acquise si on montre que

$$\left|(-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}\mathrm{d}t\right| \leq \frac{1}{n+2}$$

Dans la valeur absolue, $(-1)^{n+1}$ s'évapore et la positivité évidente de la fonction $t \mapsto \frac{t^{n+1}}{1+t}$ sur $[0,1]$ donne

$$\left|(-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}\mathrm{d}t\right| = \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}\mathrm{d}t$$

Pour majorer l'intégrale, il suffit de majorer l'intégrand sur $[0,1]$.

Pour tout $t \in [0,1]$, $1+t \geq 1$, donc

$$\frac{t^{n+1}}{1+t} \leq t^{n+1}$$

et par positivité de l'intégrale,

$$\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}\mathrm{d}t \leq \int_0^1 t^{n+1}\mathrm{d}t = \frac{1}{n+2}.$$

En posant $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}$, l'encadrement devient

$$|\ln 2 - S_n| \leq \frac{1}{n+2}$$

Comme $\dfrac{1}{n+2} \to 0$, le théorème de convergence par encadrement assure que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ln 2$ donc la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{n+1}$ converge et a pour somme

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1} = \ln 2$$

(2) Compléter les pointillés du programme suivant pour qu'il calcule une valeur approchée de $\ln 2$ à 10^{-3} près.

Le programme est à recopier intégralement sur votre copie.

On précise que la fonction *pmodulo*, dont la syntaxe est `pmodulo(n,p)`, renvoie le reste de la division (euclidienne) de n par p.

Lorsque $p = 2$, l'instruction `pmodulo(n,2)` renvoie donc 1 si n est un entier impair et 0 si n est un entier pair.

```
n=0;
s=1;

while 1/(n+2)>0.001 do
   n= n+1;
   if pmodulo(n,2)== 0 then s=s+1/n
                           else  s=s-1/n   ;
   end;
end;

disp(s)
```

(3) **(a)** Déterminer deux nombres réels a et b tels que pour tout réel $x \notin \{-1, 0\}$

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 0\}$

$$\frac{1}{x(1+x)} = \frac{1+x-x}{x(1+x)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x}$$

(b) Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ converge et calculer sa somme.

Pour tout $n \geq 1$, appelons $T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ la somme partielle d'indice n de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$. On a

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \text{ par télécopage} \end{aligned}$$

donc $\lim T_n = 1$. La série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ est donc convergente de somme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

(c) Montrer, pour tout entier $N \in \mathbb{N}$, l'égalité : $\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} = \sum_{p=0}^{2N+1} \frac{(-1)^p}{p+1}$

Pour tout $n \geq 1$, posons $s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)(2k+2)}$ et $u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$.

$$\begin{aligned} s_N &= \sum_{k=0}^{N} \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{N} \left(\frac{(-1)^{2k}}{2k+1} + \frac{(-1)^{2k+1}}{2k+2} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{N} (u_{2k} + u_{2k+1}) \\ &= \sum_{k=0}^{2N+1} u_k = \sum_{k=0}^{2N+1} \frac{(-1)^k}{k+1} \end{aligned}$$

(d) En déduire que la série $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}$ converge et calculer sa somme.

Puisque la série $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1}$ converge et a pour somme $\ln 2$, les sommes partielles de la série $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}$ convergent vers $\ln 2$ donc la série $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}$ converge et sa somme est

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} = \ln 2$$

(4) On admet que $\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2}$ converge et calculer sa somme.

Pour tout $n \geq 1$, posons $\zeta_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2}$. En regroupant les termes pairs ensemble et les termes impairs ensemble, on a

$$\begin{aligned}\zeta_{2n+1} &= \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{(2p)^2} + \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{(2p+1)^2} \\ &= \frac{1}{4}\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2} + \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{(2p+1)^2}\end{aligned}$$

donc

$$\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{(2p+1)^2} = \zeta_{2n+1} - \frac{1}{4}\zeta_n$$

D'après le résultat admis dans cette question, $\zeta_n \to \frac{\pi^2}{6}$, $\zeta_{2n+1} \to \frac{\pi^2}{6}$, donc la suite des sommes partielles de la série $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2}$ converge. La série $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2}$ est donc convergente de somme

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{4}\frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{8}.$$

(5) **(a)** Déterminer deux nombres réels a et b tels que pour tout réel $x \notin \{-1, -\frac{1}{2},\ 0\}$

$$\frac{1}{x(x+1)(2x+1)^2} = \frac{a}{x(x+1)} + \frac{b}{(2x+1)^2}.$$

Pour tout réel $x \notin \{-1, -\frac{1}{2},\ 0\}$,

$$\frac{1}{x(x+1)(2x+1)^2} = \frac{(2x+1)^2 - 4x(x+1)}{x(x+1)(2x+1)^2} = \frac{1}{x(x+1)} + \frac{-4}{(2x+1)^2}.$$

(b) Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)(2n+1)^2}$ converge et calculer sa somme.

Pour tout $n \geq 1$, posons $\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(2k+1)^2}$.

D'après la question précédente,

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{-4}{(2k+1)^2} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} - 4\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k+1)^2}\end{aligned}$$

et les deux sommes partielles de droite convergent, vers 1 pour la première et vers $\frac{\pi^2}{8} - 1$ pour la deuxième (attention à l'indice initial). La série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)(2n+1)^2}$ est donc convergente et a pour somme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(2n+1)^2} = 1 - 4(\frac{\pi^2}{8} - 1) = 5 - \frac{\pi^2}{2}.$$

Exercice 4. L'objet de cet exercice est le calcul de l'intégrale

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\sin x} \mathrm{d}x.$$

(1) Soit $x \in]-\pi, \pi[$. On pose $t = \tan \frac{x}{2}$. A l'aide de la remarque $\sin x = \sin(2\frac{x}{2})$, exprimez $\sin x$ en fonction de la variable t.

$$\sin x = \sin(2\frac{x}{2}) = 2\sin(\frac{x}{2})\cos(\frac{x}{2}) = 2\tan\frac{x}{2}\cos^2(\frac{x}{2}) = \frac{2t}{1+t^2}$$

puisque $\cos^2\theta = \dfrac{1}{1+\tan^2\theta}$.

(2) Déterminer quatre nombres réels $a,\ b,\ c,\ d$ tels que

$$\forall t \in [0,\ 1], \quad \frac{t}{(1+t^2)(1+t)^2} = \frac{a}{1+t} + \frac{b}{(1+t)^2} + \frac{ct+d}{1+t^2}$$

Après mise au dénominateur commun et identification, on parvient au système

$$\begin{cases} a+b+d &= 0 \\ a+c+2d &= 1 \\ a+b+2c+d &= 0 \\ a+c &= 0 \end{cases}$$

On trouve $a = 0,\ b = -\dfrac{1}{2},\ c = 0,\ d = \dfrac{1}{2}$.

(3) Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\sin x}\mathrm{d}x$ (faire le changement de variable $t = \tan\frac{x}{2}$).

La relation $x = 2 \text{ Arctan } t$ définit un changement de variable de classe C^1 de $[0,1]$ vers $[0, \frac{\pi}{2}]$:

$$I = \int_0^1 \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}} \times \frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{4t}{(1+t^2)(1+t)^2}\mathrm{d}t$$

et la décoposition précédente donne

$$I = \int_0^1 \frac{-4}{2(1+t)^2}\mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{4}{2(1+t^2)}\mathrm{d}t = 2\left[\frac{1}{1+t}\right]_0^1 + 2[\text{ Arctan } t]_0^1 = 2(\frac{1}{2}-1) + 2\times\frac{\pi}{4} = -1+\frac{\pi}{2}$$

Corrigé du concours blanc 2. Epreuve b.

Veillez à bien justifier vos réponses : un exercice bien traité rapporte des points, un exercice traité de façon non rigoureuse ne rapporte pas de points. Malus de 2 points pour les copies mal rédigées. La durée de l'épreuve est de 4 heures. Aucune sortie avant la fin de l'épreuve. Les calculatrices ne sont pas autorisées.

Si, au cours de l'épreuve, vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez le sur votre copie et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous êtes amenés à prendre.

Ce sujet comporte trois exercices indépendants.

Exercice 1. Pour tout réel positif x et tout entier naturel n, on note $U_n(x), V_n(x), S_n(x)$ les sommes partielles d'indice n suivantes

$$U_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{(2k)!}, \; V_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{(2k+1)!}, \; S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

(1) (a) Rappeler la limite de la suite $(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$.

Le cours affirme que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(x) = \mathrm{e}^x$.

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$U_n(x) + \sqrt{x}V_n(x) = S_{2n+1}(\sqrt{x})$$
$$U_n(x) - \sqrt{x}V_n(x) = S_{2n+1}(-\sqrt{x})$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} U_n(x) + \sqrt{x}V_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{(2k)!} + \sqrt{x}\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{(2k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(\sqrt{x})^{2k}}{(2k)!} + \sqrt{x}\sum_{k=0}^{n} \frac{(\sqrt{x})^{2k}}{(2k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(\sqrt{x})^{2k}}{(2k)!} + \frac{(\sqrt{x})^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(\sqrt{x})^{k}}{k!} = S_{2n+1}(\sqrt{x}). \end{aligned}$$

La deuxième égalité se prouve en remplaçant $\sqrt{x}$ par $-\sqrt{x}$ dans les calculs ci-dessus.

(c) En déduire que les séries $\sum\limits_{k\geq 0} \frac{x^k}{(2k)!}$ et $\sum\limits_{k\geq 0} \frac{x^k}{(2k+1)!}$ sont convergentes et calculer leur somme.

Les deux séries convergent trivialement pour $x = 0$ et ont même somme 1.
Supposons $x > 0$.
Les deux égalités précédentes permettent d'écrire

$$U_n(x) = \frac{S_{2n+1}(\sqrt{x}) + S_{2n+1}(-\sqrt{x})}{2} \text{ et } V_n(x) = \frac{S_{2n+1}(\sqrt{x}) - S_{2n+1}(-\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$$

La convergence des séries exponentielles assure alors celle des sommes partielles $U_n(x)$ et $V_n(x)$. Les séries $\sum\limits_{k\geq 0} \frac{x^k}{(2k)!}$ et $\sum\limits_{k\geq 0} \frac{x^k}{(2k+1)!}$ sont donc convergentes et on pour sommes

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{(2k)!} = \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}} + \mathrm{e}^{-\sqrt{x}}}{2} \text{ et } \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{(2k+1)!} = \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}} - \mathrm{e}^{-\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}.$$

(2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note a_n le nombre de triplets (x_1, x_2, x_3) d'entiers naturels solutions de l'équation

$$x_1 + x_2 + x_3 = n.$$

(a) Déterminer a_n.

Le nombre a_n est aussi le nombre de mots formés de n lettres U et 2 lettres P et un tel mot est déterminé par le choix des places des lettres P. Il y en a donc $a_n = \binom{n+2}{2}$.

(b) Soit x un nombre réel. Etudier la nature de la série $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ en fonction du réel x et calculer sa somme lorsqu'elle converge.

Soit x un nombre réel.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n x^n = \frac{(n+2)(n+1)}{2} x^n$$

La série $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ est donc (au facteur $\frac{1}{2}$ près) une série géométrique dérivée d'ordre 2, qui d'après le cours, converge si et seulement si $|x| < 1$.
Dans ce cas, sa somme est

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \frac{1}{2} \frac{2!}{(1-x)^3} = \frac{1}{(1-x)^3}$$

Exercice 2. On pourra utiliser, sans justification, le résultat suivant : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n.$$

Alors il existe des réels λ et μ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda r^n + \mu s^n$$

où r et s sont les solutions de l'équation $x^2 - ax - b = 0$. De plus, les réels λ et μ sont les solutions du système

$$\begin{cases} \lambda & + & \mu & = & u_0 \\ \lambda r & + & \mu s & = & u_1 \end{cases}$$

Première partie.

On effectue une suite de lancers d'une pièce de monnaie. On suppose que les résultats des lancers sont indépendants et qu'à chaque lancer, la pièce donne Face avec la probabilité p $(0 < p < 1)$ et Pile avec la probabilité $q = 1 - p$.

On s'intéresse au nombre de lancers nécessaires pour obtenir deux Face de suite (c'est-à-dire lors de deux lancers consécutifs).

On suppose donné un espace probabilisé, muni d'une probabilité P, modélisant cette expérience.

Pour tout entier $n \geq 1$, on note U_n l'événement « on obtient deux Face de suite, pour la première fois, aux lancers numéro n et $n+1$ », et on pose $u_n = P(U_n)$.

Pour tout entier $n \geq 2$, on note

— A_n l'événement « les n premiers lancers ne donnent pas deux Face de suite et le n^{e} lancer donne Face »,
— B_n l'événement « les n premiers lancers ne donnent pas deux Face de suite et le n^{e} lancer donne Pile ».

Enfin, on pose $x_n = P(A_n)$ et $y_n = P(B_n)$.

(1) Relation de récurrence entre $x_{n+1}, y_{n+1}, x_n, y_n$

(a) Déterminer $u_1, x_2, y_2, u_2, x_3, y_3, u_3$.

Avec des notations évidentes, on obtient par indépendance des lancers :

$$\begin{aligned}
u_1 &= P(F_1F_2) = p^2, \\
x_2 &= P(A_2) = P(P_1F_2) = pq, \\
y_2 &= P(B_2) = P(P_1P_2 \cup F_1P_2) = P(P_2) = q, \\
u_2 &= P(P_1F_2F_3) = qp^2, \\
x_3 &= P(P_2F_3) = pq, \\
y_3 &= P(P_3) - P(F_1F_2P_3) = q - p^2q, \\
u_3 &= P(P_2F_3F_4) = p^2q.
\end{aligned}$$

(b) Trouver pour $n \geq 2$, une relation simple entre x_n et u_n.

Clairement $u_n = P(A_n \cap F_{n+1})$ et comme F_{n+1} est indépendant des résultats des lancers précédents :

$$u_n = P(A_n)P(F_{n+1}) = px_n.$$

(c) Pour tout $n \geq 2$, déterminer les probabilités conditionnelles :

$$P_{A_n}(A_{n+1}), P_{B_n}(A_{n+1}), P_{A_n}(B_{n+1}), P_{B_n}(B_{n+1})$$

— Si A_n est réalisé, la série de lancers se termine par un résultat Face et A_{n+1} ne peut plus se réaliser (on aurait eu deux fois de suite Face)

$$P_{A_n}(A_{n+1}) = 0.$$

— Suivant le résultat du rang n, on a :

$$\begin{array}{rcl} P_{B_n}(A_{n+1}) & = & P(F_{n+1}) = p, \\ P_{A_n}(B_{n+1}) & = & P(P_{n+1}) = q, \\ P_{B_n}(B_{n+1}) & = & P(P_{n+1}) = q \end{array}$$

(d) En déduire, pour tout $n \geq 2$, les relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_{n+1} & = & py_n \\ y_{n+1} & = & q(x_n + y_n) \end{array} \right.$$

Pour $n \geq 2$, $(A_n \cup B_n, \overline{A_n \cup B_n})$ est un système complet d'événements donc

$$\begin{array}{ll} P(A_{n+1}) & = P((A_n \cup B_n) \cap A_{n+1}) + P(\overline{A_n \cup B_n} \cap A_{n+1}) \\ P(B_{n+1}) & = P((A_n \cup B_n) \cap B_{n+1}) + P(\overline{A_n \cup B_n} \cap B_{n+1}) \end{array}$$

Or $P(\overline{A_n \cup B_n} \cap B_{n+1}) = 0$ puisque $B_{n+1} \subset A_n \cup B_n$ et par incompatibilité de A_n et B_n, on a

$$P(B_{n+1}) = P(A_n \cup B_n) \cap B_{n+1}) = P(A_n \cap B_{n+1}) + P(B_n \cap B_{n+1})$$

De même, $A_{n+1} \subset B_n$ donc $P(\overline{A_n \cup B_n} \cap A_{n+1}) = 0$ et on a

$$P(A_{n+1}) = P(A_n \cup B_n) \cap A_{n+1}) = P(A_n \cap A_{n+1}) + P(B_n \cap A_{n+1}) = P(B_n \cap A_{n+1})$$

puisque $A_n \cap A_{n+1}$ est impossible.

Par la formule des probabilités conditionnelles, il vient donc

$$\begin{array}{rcl} x_{n+1} & = & P(A_{n+1}) = P(B_n)P_{B_n}(A_{n+1}) = y_n p, \\ y_{n+1} & = & P(B_{n+1}) = P(A_n)P_{A_n}(B_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(B_{n+1}) = x_n q + y_n q. \end{array}$$

(2) Probabilité d'obtenir deux Faces de suite.

(a) On suppose que $p = \frac{1}{2}$. Pour $n \geq 2$, on pose $v_n = 2^n y_n$. Déterminer une relation de récurrence entre v_{n+2}, v_{n+1} et v_n.

On a ici

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\, y_n, \quad y_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + y_n).$$

Donc, pour $n \geq 2$,

$$y_{n+2} = \frac{1}{2}(x_{n+1} + y_{n+1}) = \frac{1}{2}\, y_{n+1} + \frac{1}{4}\, y_n$$

ce que l'on peut écrire :

$$v_{n+2} = v_{n+1} + v_n$$

(b) En déduire, pour tout entier naturel n, v_n en fonction de n. (On pourra poser $v_0 = v_1 = 1$.)

Posons $v_0 = v_1 = 1$.

On a $v_2 = 2^2 y_2 = 4 \times \frac{1}{2} = 2$ donc $v_2 = v_0 + v_1$. Puis $v_3 = 2^3 y_3 = 8 \times (\frac{1}{2} - \frac{1}{8}) = 3$ donc $v_3 = v_2 + v_1$.

La suite (v_n) vérifient

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+2} = v_{n+1} + v_n.$$

Les solutions de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$ sont

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ et } \beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

D'après le résultat admis, il existe des scalaires λ et μ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \lambda \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \mu \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Les conditions initiales donnent alors

$$v_n = \frac{\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}}{\beta - \alpha}$$

(c) En déduire, pour tout $n \geq 2$, une expression de x_n puis de u_n, en fonction de n.

De ce qui précède, on déduit, pour tout $n \geq 2$,

$$y_n = \frac{1}{2^n}\left(\frac{\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}}{\beta - \alpha}\right) \text{ et } x_n = \frac{1}{2^n}\left(\frac{\beta^{n} - \alpha^{n}}{\beta - \alpha}\right)$$

et

$$u_n = \frac{1}{2^{n+1}}\left(\frac{\beta^{n} - \alpha^{n}}{\beta - \alpha}\right).$$

(d) Vérifier que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n = 1$ et en donner une interprétation.

Comme $|\frac{\alpha}{2}| < 1$ et $|\frac{\beta}{2}| < 1$, les séries $\displaystyle\sum_{n\geq 2}\left(\frac{\beta}{2}\right)^n$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 2}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^n$ sont des séries géométriques convergentes.

La formule donnant u_n est encore valable pour $n = 1$ donc

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \frac{1}{2(\beta-\alpha)}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\beta}{2}\right)^n - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^n\right)$$

donc

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \frac{1}{2(\beta-\alpha)}\left(\frac{1}{1-\frac{\beta}{2}} - 1 - \frac{1}{1-\frac{\alpha}{2}} + 1\right) = \frac{1}{(2-\beta)(2-\alpha)}$$

Comme $\alpha + \beta = 1$ et $\alpha\beta = -1$ (somme et produit de racines d'une équation du second degré), on a finalement :

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = 1.$$

Les événements $(U_n)_{n\geq 1}$ sont deux-à-deux incompatibles donc par σ-additivité,

$$P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} U_n\right) = 1.$$

Il est donc quasi-certain d'obtenir au moins une fois deux Face de suite dans une succession indéfinie de lancers d'une pièce honnête.

Deuxième partie.

On dispose de deux pièces équilibrées, $\left(p = q = \dfrac{1}{2}\right)$ et on réalise l'expérience suivante : pour n entier, $n \geq 1$, on répète n lancers simultanés des deux pièces distinctes numérotées 1 et 2.

Les lancers sont mutuellement indépendants.

On note les résultats sous forme d'un tableau :

$$\begin{pmatrix} N^\circ \text{ du lancer} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & n \\ \text{Pièce 1 :} & P & P & F & P & F & F & \dots & \dots \\ \text{Pièce 2 :} & F & P & F & F & P & P & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Pour $k \in \{1, \dots, n\}$, on considère l'évènement :

A_k : « A l'issue du k-ième lancer les deux pièces ont donné le même nombre de P. »

Dans l'exemple ci-dessus, seul A_6 est réalisé.

Dans la suite du problème, on pose $P(A_0) = 1$, et on s'intéresse particulièrement à l'évènement A_n.

(3) **(a)** Soit $j \in \{0, \dots, n\}$. Calculer la probabilité pour qu'à l'issue des n lancers la première pièce ait donné j fois la face Pile.

Appelons E_j l'événement : « A l'issue des n lancers, la première pièce a donné j fois la face Pile. »

Un réxultent de l'expérrance peut être considéré comme une $2n$-liste formée des lettres P ou F (les n premiers éléments sont associés aux résultats donnés par la première pièces et les n suivants aux résultats de la seconde) : il y a donc 2^{2n} résultats possibles.

Il s'agit maintenant de dénombrer le nombre de $2n$-listes dont la première série de n lettres contient j lettres P exactement. Il y a $\binom{n}{j}$ façons de choisir les rangs d'apparitions des lettres P parmi les n premières places, une seule façon de compléter cette première série avec $n-j$ lettres F et enfin 2^n façons de former la deuxième série de n lettres, ce qui fait donc $\binom{n}{j} \times 1 \times 2^n$ $2n$-listes dont la première série de n lettres contient j lettres P exactement.

La probabilité cherchée est donc $P(E_j) = \dfrac{\binom{n}{j} \times 1 \times 2^n}{2^{2n}} = \dfrac{\binom{n}{j}}{2^n}$

(b) Soit $j \in \{0, \dots, n\}$, on désigne par $p_j(n)$ la probabilité pour qu'à l'issue des n lancers les deux pièces aient donné chacune j fois la face Pile. Calculer $p_j(n)$.

Appelons F_j l'événement : « A l'issue des n lancers la deuxième pièce a donné j fois la face Pile »et G_j l'événement : « A l'issue des n lancers les deux pièces ont donné chacune j fois la face Pile. »

On a $p_j(n) = P(G_j) = P(E_j \cap F_j)$. Puisque les événements E_j et F_j sont indépendants, on a $p_j(n) = P(E_j)P(F_j) = \dfrac{\binom{n}{j}^2}{2^{2n}}$ puisque $P(F_j) = P(E_j)$.

(c) En déduire que $P(A_n) = \dfrac{1}{2^{2n}} \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}^2$.

Les événements $G_1, G_2, \dots, G_n$ sont deux à deux incompatibles et $A_n = \bigcup_{j=0}^{n} G_j$ donc par additivité de la probabilité

$$P(A_n) = \sum_{j=0}^{n} P(G_j) = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}^2$$

(4) Calcul de $P(A_6)$ par Scilab.

(a) Quel est le résultat de l'instruction `mystere(3,5)` où `mystere` est la fonction ci-dessous ?

```
function c=mystere(k,p)

if k==0 | k==p then c=1
                else      c=1;
                          a=k;
                          b=p;
                         while (a>0&b>0) then
                              c=(a/b)*c;
                              a=a-1;
                              b=b-1;
                         end;
end;

endfunction
```

La fonction `mystere` calcule $\binom{p}{k}$ donc l'instruction `mystere(3,5)` renvoie $\binom{5}{3} = 10$.

(b) Ecrire un programme Scilab, utilisant la fonction `mystere`, permettant le calcul de $P(A_6)$.

```
s=0;
d=1/2;

for j=0:6
s=s+mystere(j,6);
d=2*d;
end;

p=s/d^2;
disp(p)
```

Exercice 3. Dans tout le problème, l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est muni de sa base canonique notée $\mathscr{C} = (\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \mathrm{e}_3)$.
On identifie $\mathbb{R}^3$ et $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$: cela signifie que les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ sont notés en colonne. Ainsi

$$\mathrm{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathrm{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathrm{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On note $\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$, Id l'identité de $\mathbb{R}^3$, $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices d'ordre 3 à coefficients réels et I_3 la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
On rappelle aussi que si f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ les notations f^2, f^3, etc. désignent $f \circ f$, $f \circ f \circ f$, etc.

Il est demandé de faire figurer tous les calculs sur la copie.

Première partie.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ où A est la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -4 & 5 & -3 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

On pose $M = A - I_3$.

(1) **(a)** Montrer que la matrice $M = A - I_3$ n'est pas inversible.

$$M = A - I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -4 & 4 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

La matrice $A - I_3$ possède deux colonnes proportionnelles : en notant c_1, c_2, c_3 ses colonnes, on remarque que $c_2 = -c_1$.
Le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ vérifie donc $M\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$ ce qui assure que M n'est pas inversible (existence d'une solution non nulle à l'equation $MX = \vec{0}$.)

(b) Montrer que le noyau de $f - \mathrm{Id}$ est une droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$ dont on donnera un vecteur directeur u_1. On choisira u_1 de telle sorte que sa première coordonnée dans la base $\mathscr{C}$ soit 1.

Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. On a

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) &\iff f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
&\iff A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
&\iff (A - I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \\
&\iff \begin{cases} -2x + 2y - z = 0 \\ -4x + 4y - 3z = 0 \\ -2x + 2y - 2z = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} -2x + 2y - z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

et on prendra donc $u_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$.

(2) On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $u_2 = p\mathrm{e}_2 + q\mathrm{e}_3$ et $u_3 = r\mathrm{e}_1 + s\mathrm{e}_3$, où p, q, r, s sont des réels.

(a) Déterminer les reéels p, q, r, s pour que :

$$f(u_2) = u_1 + u_2 \quad \text{et} \quad f(u_3) = 2u_2 + u_3$$

On cherche $u_2 = \begin{pmatrix}0\\p\\q\end{pmatrix}$ tel que $f(u_2) = u_1 + u_2$.

$$\begin{aligned}
f(u_2) = u_1 + u_2 &\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 2p - q &=& 1\\ 5p - 3q &=& p + 1\\ 2p - q &=& q \end{array}\right.\\
&\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 2p - q &=& 1\\ 5p - 3q &=& p + 1\\ q &=& 1 \end{array}\right.\\
&\Longleftrightarrow p = q = 1
\end{aligned}$$

On prendra donc $u_2 = \mathrm{e}_2 + \mathrm{e}_3 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.

On cherche $u_3 = \begin{pmatrix}r\\0\\s\end{pmatrix}$ tel que $f(u_3) = 2u_2 + u_3$.

$$\begin{aligned}
f(u_3) = 2u_2 + u_3 &\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -r - s &=& r\\ -4r - 3s &=& 2\\ -2r - s &=& s + 2 \end{array}\right.\\
&\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 2r + s &=& 0\\ 4r + 3s &=& -2\\ 2r + 2s &=& -2 \end{array}\right.\\
&\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 2r + s &=& 0\\ 4r + 3s &=& -2\\ s &=& -2 \quad L_3 \longleftarrow L_3 - L_1 \end{array}\right.\\
&\Longleftrightarrow r = 1 \text{ et } s = -2
\end{aligned}$$

On prendra donc $u_3 = \mathrm{e}_1 - 2\mathrm{e}_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$.

(b) Vérifier alors que $\mathscr{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
\vec{u} = \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 &\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \alpha + \gamma &=& x\\ \alpha + \beta &=& y\\ \beta - 2\gamma &=& z \end{array}\right.\\
&\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \alpha + \gamma &=& x\\ \beta - \gamma &=& y - x \quad (L_2 \longleftarrow L_2 - L_1)\\ \beta - 2\gamma &=& z \end{array}\right.\\
&\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccl} \alpha & +\beta & & = & y \qquad (L_1 \longleftarrow L_1 + L_3)\\ & \beta & -\gamma & = & y - x\\ & & 3\gamma & = & y - x - z \quad (L_3 \longleftarrow L_2 - L_3) \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Le dernier système est un système de Cramer donc tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs u_1, u_2, u_3 qui forment par suite une base de $\mathbb{R}^3$.

(c) Les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$ et $\mathrm{Im}(f - \mathrm{Id})$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?

Puisque u_1, u_2, u_3 forment une base de $\mathbb{R}^3$, l'image d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ est engendrée par les images des vecteurs de base u_1, u_2, u_3. On a donc ici :

$$\mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}) = \ \mathrm{Vect}\ (f(u_1) - u_1, f(u_2) - u_2, f(u_3) - u_3) = \ \mathrm{Vect}\ (u_1, 2u_2) = \ \mathrm{Vect}\ (u_1, u_2).$$

De plus, $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) = \ \mathrm{Vect}\ (u_1)$.

Par conséquent : $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) \subset \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id})$ donc la somme $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) + \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}) = \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id})$ est un plan vectoriel qui ne peut être égal à $\mathbb{R}^3$: par exemple, $u_3 \notin \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id})$. Cette raison suffit pour qu'ils ne soient pas supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

On pourrait se contenter de remarquer que les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$ et $\mathrm{Im}(f - \mathrm{Id})$ ne sont pas en somme directe, ce qui est aussi une raison suffisante.

(3) Calculer M^2 et M^3. En déduire l'expression, pour tout entier naturel n, de la matrice A^n en fonction de n.

$$M^2 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M^3 = 0.$$

Comme $A = M + I_3$ et puisque les matrices M et I_3 commutent, on peut appliquer la formule du binôme : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} M^k = I_3 + nM + \frac{n(n-1)}{2} M^2.$$

(4) L'endomorphisme f est-il bijectif et, le cas échéant, exprimer $f^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ en fonction de x, y et z.

Soient a, b, c, x, y, z des réels et étudions l'égalité $f\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$:

$$f\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Longleftrightarrow A\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

et le problème revient donc à étudier l'inversibilité de la matrice A. Puisque $M^3 = 0$, on a $(A - I_3)^3 = 0$ donc d'après la formule du binôme

$$A^3 - 3A^2 + 3A - I_3 = 0, \text{ soit } A(A^2 - 3A + 3I_3) = I_3$$

donc A est inversible et $A^{-1} = A^2 - 3A + 3I_3$.

Le calcul donne $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ donc

$$f^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - z \\ 2x - y + z \\ 2x - 2y + 3z \end{pmatrix}$$

Deuxième partie.

On note g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$g(\mathrm{e}_1) = \frac{1}{2}(3\mathrm{e}_1 + \mathrm{e}_2 + \mathrm{e}_3)$$
$$g(\mathrm{e}_2) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}_1 + 3\mathrm{e}_2 - \mathrm{e}_3)$$
$$g(\mathrm{e}_3) = \mathrm{e}_1 - \mathrm{e}_2 + \mathrm{e}_3$$

(1) Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

(a) Exprimer $g\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ en fonction de x, y et z.

$$g\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}y + z \\ \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y - z \\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + z \end{pmatrix}$$

(b) Déterminer une matrice A de format 3×3 telle que $g\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$.

$$A = \begin{pmatrix}\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1\\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -1\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ 1 & 3 & -2\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$$

(c) Exprimer A^2 en fonction de A.

On trouve $A^2 = 2A$.

(2) **(a)** Déterminer le noyau de g et en donner une base.

$$\begin{aligned}
g\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \vec{0} &\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 3x+y+2z & = & 0\\ x+3y-2z & = & 0\\ x-y+2z & = & 0\end{array}\right.\\
&\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 3x+y+2z & = & 0\\ x+3y-2z & = & 0\\ 0 & = & 0 \quad L_3 \longleftarrow 2L_3+L_2\end{array}\right.\\
&\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 3x+y & = & -2z\\ x+3y & = & 2z\end{array}\right.\\
&\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 3x+y & = & -2z\\ x+y & = & 0\end{array}\right.\\
&\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -z\\ y & = & z\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Le noyau de g est donc la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$.

(b) Déterminer une base de l'image de g.

$$g\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left(x\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}2\\-2\\2\end{pmatrix}\right)$$

donc $\mathrm{Im}g = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-2\\2\end{pmatrix}\right)$.

Or $\begin{pmatrix}2\\-2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}$ donc $\mathrm{Im}g = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}\right)$.

Les deux vecteurs $\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}$ forment donc une famille génératrice de $\mathrm{Im}g$. Non colinéaires, ils forment aussi une famille libre et ces deux vecteurs constituent donc une base de $\mathrm{Im}g$.

(c) L'endomorphisme g est-il injectif ? surjectif ?

Ni l'un, ni l'autre : le noyau de g n'est pas l'espace nul $\{\vec{0}\}$ donc g n'est pas injectif et l'image de g est un plan vectoriel donc $\mathrm{Im}g \neq \mathbb{R}^3$.

(3) Soit $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Exprimer $g\circ g\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ en fonction de $g\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$.

$$g\circ g\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = Ag\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = A^2\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = 2A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = 2g\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

(4) Montrer que $\mathrm{Ker}g$ et $\mathrm{Im}g$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

— Caractère direct.

Soit $\vec{u} \in \mathrm{Ker}g \cap \mathrm{Im}g$. Puisque $\vec{u} \in \mathrm{Im}g$, il existe $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ tel que $\vec{u} = g(\vec{v})$ et puisque $\vec{u} \in \mathrm{Ker}g$, on a

$$\vec{0} = g(\vec{u}) = g(g(\vec{v})) = 2g(\vec{v}) = 2\vec{u}$$

donc $\vec{u} = \vec{0}$ et par conséquent

$$\operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} g = \{\vec{0}\}$$

— Caractère supplémentaire.
Procédons par analyse-synthèse.
Soit $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ écrit sous la forme $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$ avec $\vec{v} \in \operatorname{Ker} g$ et $\vec{w} \in \operatorname{Im} g$.
Puisque $\vec{w} \in \operatorname{Im} g$, il existe $\vec{t} \in \mathbb{R}^3$ tel que $\vec{w} = g(\vec{t})$ et puisque $\vec{v} \in \operatorname{Ker} g$, on a

$$g(\vec{u}) = \vec{0} + g(g(\vec{t})) = 2g(\vec{t}) = 2\vec{w}$$

ce qui donne $\vec{w} = \frac{1}{2}g(\vec{u})$ et par conséquent $\vec{v} = \vec{u} - \frac{1}{2}g(\vec{u})$.
Réciproquement, posons $\vec{w} = \frac{1}{2}g(\vec{u})$ et $\vec{v} = \vec{u} - \frac{1}{2}g(\vec{u})$.
Il est clair que $\vec{w} \in \operatorname{Im} g$.
Le calcul de $g(\vec{v})$ donne $g(\vec{v}) = g(\vec{u}) - \frac{1}{2}g \circ g(\vec{u}) = g(\vec{u}) - g(\vec{u}) = \vec{0}$ donc $\vec{v} \in \operatorname{Ker} g$.
Enfin, il est aussi clair que $\vec{v} + \vec{w} = \vec{u}$.
En conclusion, on a bien $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker} g + \operatorname{Im} g$.