Devoir maison n°2 A rendre pour le 06/11/2017

Exercice 1

On se propose de démontrer le théorème des valeurs intermédiaires à l'aide d'une méthode de dichotomie. Soient a, $b \in \mathbb{R}$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(a)f(b) \leq 0$. On définit trois suites (a_n), (b_n) et (c_n) en posant $a_0 = a$, $b_0 = b$, puis pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$$

et si $f(a_n)f(c_n) \leq 0$, alors

$$\begin{cases} a_{n+1} := a_n, \\ b_{n+1} := c_n, \end{cases}$$

et sinon

$$\begin{cases} a_{n+1} := c_n, \\ b_{n+1} := b_n. \end{cases}$$

a) Montrer que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes et qu'elles convergent vers une même limite ℓ.
b) Montrer que $f(\ell) = 0$.

Exercice 2

Soient $a, b \in R$ et $f : [a, b] \to [a, b]$une fonction continue. Montrer que f admet au moins un point fixe sur $[a, b]$,c'est-à-dire, il existe un $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = x$.

Exercice 3

Une urne contient cinq boules noires numérotées de 1 à 5, trois boules vertes numérotées de 1 à 3 et deux boules blanches numérotées 1 et 2. On tire trois boules dans l'urne successivement sans remise.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
2. Combien de tirages avec trois boules de la même couleur ?
3. Combien de tirages avec uniquement des numéros strictement plus petits que 3 ?
4. Combien de tirages avec un numéro apparaissant deux fois (exactement) ?
5. Combien de tirages avec une boule de chaque couleur ?

Mêmes questions si on effectue désormais un tirage de trois boules simultanées.

Exercice 4

Pour $n \geq 2$, on considère le polynôme P_n défini par $P_n(x) = x^n - nx + 1$

1. Montrer que P_n admet exactement une racine entre 0 et 1, notée x_n.

2. Montrer que $(x$¿¿$n)_{n \geq 2}$¿converge et déterminer sa limite.

3. Montrer que $\lim_{n \to +\infty} (x_n)^n$. En déduire que $\lim_{n \to +\infty} nx_n$.