CORRECTION DU DEVOIR MAISON 2

Exo 1. 1. Prouvons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété

$$\mathcal{P}_n : a_n \leqslant c_n \leqslant b_n \text{ et } b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$$

- Nous avons $a \leqslant b$ *(c'est un « oubli » du sujet)* car $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue *(sinon, cela n'a aucun sens)*. A fortiori, $a_0 = a \leqslant \frac{a+b}{2=c_0} \leqslant b_0 = b$ et $b_0 - a_0 = b - a = \frac{b-a}{2^0}$. En particulier, la proposition $\mathcal{P}_0$ est vraie
- Supposons que $\mathcal{P}_n$ soit vraie pour un entier $n \in \mathbb{N}$. Alors,
  - soit $f(a_n)f(c_n) \leqslant 0$, auquel cas il résulte de $\mathcal{P}_n$ que

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n \leqslant \frac{a_n + c_n}{2} = c_{n+1} \leqslant c_n = b_{n+1} \text{ et} \\ b_{n+1} - a_{n+1} &= c_n - a_n = \frac{a_n + b_n}{2} - a_n = \frac{b_n - a_n}{2} \leqslant \frac{1}{2}\frac{b-a}{2^n} = \frac{b-a}{2^{n+1}} \end{aligned}$$

    En particulier, la proposition $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie
  - Soit $f(a_n)f(c_n) > 0$, auquel cas il résulte de $\mathcal{P}_n$ que

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= c_n \leqslant \frac{c_n + b_n}{2} = c_{n+1} \leqslant b_n = b_{n+1} \text{ et} \\ b_{n+1} - a_{n+1} &= b_n - c_n = b_n - \frac{a_n + b_n}{2} = \frac{b_n - a_n}{2} \leqslant \frac{1}{2}\frac{b-a}{2^n} = \frac{b-a}{2^{n+1}} \end{aligned}$$

    En particulier, la proposition $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie

  Dans les deux cas, nous remarquons que la proposition $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie

Par récurrence, nous obtenons alors que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour $n \in \mathbb{N}$. Il en résulte alors que

- la suite $(b_n - a_n)$ converge vers 0 d'après la propriété des gendarmes et l'inégalité $0 \leqslant b_n - a_n \leqslant \frac{b-a}{2^n} \qquad (n \in \mathbb{N})$
- La suite (a_n) est croissante car

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \begin{cases} a_n - a_n = 0 & \text{si } f(a_n)f(c_n) \leqslant 0 \\ c_n - a_n \geqslant 0 & \text{si } f(a_n)f(c_n) > 0 \end{cases} \\ &\geqslant 0 \end{aligned}$$

- La suite (b_n) est décroissante car

$$\begin{aligned} b_{n+1} - b_n &= \begin{cases} c_n - b_n \leqslant 0 & \text{si } f(a_n)f(c_n) \leqslant 0 \\ b_n - b_n = 0 & \text{si } f(a_n)f(c_n) > 0 \end{cases} \\ &\leqslant 0 \end{aligned}$$

A fortiori, les suite (a_n) et (b_n) sont adjacentes et convergent donc vers la même limite ℓ.

2. Nous avons $\ell = \lim a_n = \lim b_n$. Comme f est continue en ℓ nous remarquons alors que l'on a forcément $f(\ell) = \lim f(a_n) = \lim f(b_n)$

   Pour $n \in \mathbb{N}$, prouvons par récurrence la proposition $\mathcal{Q}_n : f(a_n)f(b_n) \leqslant 0$.
   - Comme $a_0 = a$, $b_0 = b$ et $f(a)f(b) \leqslant 0$, la proposition $\mathcal{Q}_0$ est vraie

- Supposons la propriété $\mathcal{Q}_n$ pour un entier $n \in \mathbb{N}$. Alors,
  - soit $f(a_n)f(c_n) \leqslant 0$. Dans ce cas, $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = c_n$ de sorte que
  $$f(a_{n+1})f(b_{n+1}) = f(a_n)f(c_n) \leqslant 0$$
  - soit $f(a_n)f(c_n) > 0$. Dans ce cas, $a_{n+1} = c_n$ et $b_{n+1} = b_n$ de sorte que $f(a_n)$ et $f(c_n)$ sont non nuls, de même signe, opposé à celui de $f(b_n)$, d'après $\mathcal{Q}_n$, et par suite
  $$f(a_{n+1})f(b_{n+1}) = f(c_n)f(b_n) \leqslant 0$$

  Dans tous les cas, nous avons $\mathcal{Q}_{n+1}$

En conclusion, la propriété $\mathcal{Q}_n$ est vraie pour $n \in \mathbb{N}$. Comme $f(a_n)f(b_n) \leqslant 0$ pour $n \in \mathbb{N}$, en passant à la limite, nous déduisons de la conservation des inégalités larges par passage à la limite que
$$f(\ell)^2 = \lim_{n\to+\infty} f(a_n)f(b_n) \leqslant 0$$
A fortiori, nous avons nécéssairement $f(\ell) = 0$ *Un exercice assez difficile, qui aurait été découpé en plusieurs questions s'il avait été donné en ds.. mais en DM, avec temps illilité, cela fait réfléchir...*
Notons également qu'il aurait été plus malin d'inclure la proposition $\mathcal{Q}_n$ dans la proposition $\mathcal{P}_n$ pour ne faire qu'une seule récurrence

Exo 2. La fonction g définie par $g(x) = f(x) - x$ est continue sur $[a,b]$ et vérifie $g(a) = f(a) - a \geqslant 0$ et $g(b) = f(b) - b \leqslant 0$ car f est à valeurs dans $[a,b]$. Alors,

- soit $g(a) = 0$ et on a prouvé que $f(a) = a$
- soit $g(b) = 0$ et on a prouvé que $f(b) = b$
- soit $g(a > 0$, $g(b < 0$ et le théorème des valeurs intermédiaires assure qu'il exists $x \in]a,b[$ tel que $g(x) = 0$, autrement dir $f(x) = x$.

Dans tous les cas, il existe $x \in [a,b]$ vérifiant $f(x) = x$ (un point fixe de f)

Exo 3.
1. Il y a A_{10}^3 tirages possibles, c'est le nombre de 3-listes sans répétition d'éléments de l'ensemble des boules en jeu (il y en a 10).
2. Pour tirer trois boules de la même couleur, peut tirer soit trois boules noires (A_5^3 choix possibles) soit trois boules vertes ($A_3^3 = 1$ choix possible).
   Au total, il y a $A_5^3 + A_3^3$ tirages possibles
3. Il y a , A_6^3 tirages possibles avec des numéros strictement plus petits que 3. C'est le nombre de 3-listes sans répétition d'éléments de l'ensemble des boules
   $$\{N1,N2,V1,V2,B1,B2\}$$
4. Pour tirer trois boules avec un numéro apparaissant deux fois exactement, on commence par choisir la position des boules dont le numéro est répété, puis le chiffre que l'on répéte deux fois (1, 2 ou 3), puis on constitue une 2-liste parmi les boules portant ce numéro (parmi 3 boules pour 2×1 et $\times 2$ mais parmi 2 boules seulement pour 2×3) enfin on complete avec une boule qui n'a pas ce numéro (parmi 7 boules pour 2×1 et 2×2 et parmi 8 boules pour 2×3). *C'est assez simple à expliquer avec un arbre mais ça l'est un peu moins quand on dactylographie* Le nombre de tirage recherché est

$$\underbrace{\binom{3}{2}}_{\text{position de la paire}} \times \underbrace{\left(\underbrace{2\times A_3^2\times\binom{7}{1}}_{2\times1 \text{ ou } 2\times2}+\underbrace{2\times A_2^2\times\binom{8}{1}}_{2\times3}\right)}_{\text{choix d'une paire de boules ordonnée et d'une autre boule}}$$

5. Pour constituer un tirage avec une boule de chaque couleur, on peut choisir une noire parmi 5 noires, une verte parmi les vertes et une blanche parmi les blanches, puis les faire permutter (ou alors il faut s'amuser à choisir des positioins, ce qui revient au même). En tout, il y en a

$$\binom{5}{1}\binom{3}{1}\binom{1}{2}\times 3! = 180$$

6. On refait la même chose mais en simultané (il n'y a plus d'ordre dans la résultat) : on compte les ensembles de trois boules tirées Au total, il y a $\binom{10}{3}$ tirages possibles
7. Il y a $\binom{5}{3}+\binom{3}{3}$ tirages possibles avec une seule couleur
8. Il y a $\binom{6}{3}$ tirages avec des boules de numéros strictement plus petits que 3
9. On a plus besoin de se préoccuper des positions et de l'ordre du tirage, il y en a

$$\left(\underbrace{2\times\binom{3}{2}\times\binom{7}{1}}_{2\times1 \text{ ou } 2\times2}+\underbrace{2\times\binom{2}{2}\times\binom{8}{1}}_{2\times3}\right)$$

10. Il y a $\binom{5}{1}\binom{3}{1}\binom{1}{2}$ tirages possibles

Exo 4. 1. P_n est une fonction (polynôme) continue sur $[0,1]$.
Comme $P_n(0) = 1 > 0$ et $P(1) = 2 - n < 0$ il résulte du théorème des valeurs intermédiaires que P_n admet une racine x_n dans $]0,1[$. Comme P_n est dérivable, on déduit sa stricte décroissance sur $]0,1[$ de l'inégalité

$$P_n'(x) = nx^{n-1} - n = n\underbrace{(x^{n-1}-1)}_{<0} < 0 \qquad (0 < x < 1)$$

Cette racine x_n est donc nécéssairement unique *(et la suite x_n est bien définie)*

Exo 5. Comme $0 \leqslant x_n \leqslant 1$, nous déduisons de la relation $0 = P_n(x_n) = x_n^n - nx_n + 1$ que

$$0 \leqslant x_n = \frac{1+x_n^n}{n} \leqslant \frac{2}{n} \qquad (n \geqslant 2).$$

En particulier, il résulte du principe des gendarmes que la suite x_n converge vers 0

Exo 6. A fortiori, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n^n = 0$ et en reportant dans la relation $x_n^n - nx_n + 1 = 0$ $(n \geqslant 2)$, on conclut que $\lim\limits_{n\to+\infty} nx_n = 1$
Méditation pour etudiants : Si ce devoir avait été donné en DS, quelles auraient été les questions (ou les exercices) rapportant le plus de points en le moins de temps