Devoir maison n°3. A rendre pour le 13/10/2017

Exercice 1.

1. Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ les applications définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) = 2n \text{ et } g(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & si\ n\ est\ pair \\ \frac{n-1}{2} & si\ n\ est\ impair \end{cases}$$

a. Etudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de f et de g

b. Préciser les applications $g \circ f$ et $f \circ g$ et étudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de ces deux applications.

2. Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit $f :]a, +\infty[\to \mathbb{R}$ l'application définie par : $\forall x \in]a, +\infty[, f\ (x) = \frac{1}{x-a}$.

Montrer que f est bijective de $]a, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$ et déterminer son application réciproque f^{-1}.

Exercice 2.

Soient E et F deux ensembles et soit f une application de E dans F .

1. Montrer que pour toute partie A de E, on a $A \subset f^{-1}(f(A))$.

2. Montrer que pour toute partie B de F, on a $f(f^{-1}(B)) \subset B$.

3. Montrer que f est injective si et seulement si pour toute partie A de E on a $A = f^{-1}(f(A))$.

4. Montrer que f est surjective si et seulement si pour toute partie B de F on a $f(f^{-1}(B)) = B$.

5. Soit f la fonction sinus définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Déterminer les ensembles suivants : $f\ (\mathbb{R}), f\ ([-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}], f\ ([0; \pi], f^{-1}(\{0\}), f^{-1}(f(\{0\})), f(f^{-1}(\{0\}))$.

6. Soit g la fonction définie par $g = f/_{[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]}$. Déterminer les ensembles suivants : $f^{-1}(f([0; \frac{\pi}{4}])), f(f^{-1}([-1; 0]))$.

Exercice 13 — On considère les applications

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, x-y, xy) \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+y+z, x+y) \end{array}$$

1. Déterminer $f(0,0)$ et $f(1,2)$, $g(1,-1,0)$ et $g(1,1,1)$.
2. $(0,0)$ et $(1,2)$ ont-ils des antécédents par g ? Les déterminer, le cas échéant.
3. Montrer que g est surjective. Est-elle injective ?
4. f est-elle injective ?
5. Montrer que $(1,1,2)$ n'a pas d'antécédent par f. Que peut-on en déduire ?
6. Définir $f \circ g$ puis $g \circ f$.