

DEVOIR MAISON 4

Exo 1. Résoudre, en discutant suivant la valeur du paramètre $m \in \mathbb{R}$, le système

$$\begin{cases} x & -my & +m^2z & = 2m \\ mx & -m^2y & +mz & = 2m \\ mx & +y & -m^2z & = 1 - m \end{cases}$$

Exo 2. 1. Montrer que, pour $0 \leq p \leq n$, on a

$$\sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$$

2. En déduire l'expression de la somme $E_1(n) = 1 + 2 + \dots + n$ où $n \in \mathbb{N}$.

Une démonstration n'utilisant pas le résultat précédent n'est pas recevable !

3. a. Déterminer des nombres réels a et b tels que

$$k^2 = a \binom{k}{2} + b \binom{k}{1} \quad (k \geq 2)$$

b. Retrouver l'expression de la somme $E_2(n) = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$ où $n \in \mathbb{N}$.

La encore, vous ne devez utiliser que les résultats précédents

Exo 3. Jojo le glacier propose g variétés de glaces, s variétés de sorbets et 4 variétés d'accompagnements : chantilly, nappage chocolat, nappage caramel, éclats d'amandes. Le client choisit un certain nombre de boules de glace ou de sorbet (avec éventuellement plusieurs fois le même parfum) et, s'il le désire, un ou plusieurs accompagnement(s). Les éventuels accompagnements sont toujours disposés dans l'ordre suivant : chantilly, nappage, éclats d'amandes (mais on n'est pas obligé de mettre les trois). On ne peut pas choisir deux fois le même accompagnement ni choisir simultanément les deux nappages. La commande est servie dans un cornet ou une coupelle, en gauffre.

1. Dans toute cette question, le client choisit d'être servi dans un cornet. Par conséquent, on tient compte de l'ordre dans lequel les boules sont disposées dans le cornet. Ainsi, le cornet fraise-fraise-chocolat n'est pas le même que le cornet fraise-chocolat-fraise.

a. Combien Jojo peut-il servir de cornets différents avec b boules, de parfums distincts ou non (glace ou sorbet), sans accompagnement ?

b. Même question dans le cas où le cornet est surmonté d'un (unique) accompagnement.

2. a. Combien Jojo peut-il servir de cornets différents avec b boules, de parfums distincts (glace ou sorbet), sans accompagnement ?

b. Même question dans le cas où le cornet est surmonté de deux accompagnements.

3. a. Combien Jojo peut-il servir de cornets avec 4 boules (de parfums distincts ou non, sans accompagnement) dont au moins une est un sorbet ?

b. Combien Jojo peut-il servir de cornets avec 4 boules (de parfums distincts ou non, sans accompagnement) dont au moins 3 sont des glaces ?

4. A partir de maintenant, le client choisit d'être servi dans une coupelle. On ne tient donc plus compte de l'ordre dans lequel les boules sont disposées dans la coupelle. Ainsi, la coupelle vanille-passion est identique à la coupelle passion-vanille.
- Combien Jojo peut-il servir de coupelles différentes avec b boules de parfums distincts, sans accompagnement ?
 - Combien Jojo peut-il servir de coupelles différentes avec 2 boules de glace de parfums distincts, 1 boule de sorbet et 3 accompagnements.
 - Chaque boule vaut 2 € et chaque accompagnement vaut 1 €. Évéeane veut acheter une coupelle à 5 € dont tous les parfums sont distincts. Combien de coupelles différentes peut lui proposer Jojo ?
 - Les glaces et sorbets de Jojo sont répartis en c catégories contenant chacune 4 parfums. Il y a les classiques : vanille, chocolat, café et pistache ; les fruitées : fraise, framboise, citron et banane ; les exotiques : rhum-raison, noix de coco, passion et mangue ; les américaines : noix de pécan, cookies, noix de macadamia et caramel-brownie ; les italiennes : amaretto, amarena, straciatella et tiramisu ; etc Valentine veut une coupelle méga-five : 5 boules, de parfums distincts, dont deux choisies dans une première catégorie, deux d'une autre catégorie et une dernière d'une troisième catégorie. Le tout agrémenté de trois accompagnements, cela va de soi ! Combien existe-t-il de coupelles méga-five différentes ?
 - Combien Jojo peut-il servir de coupelles différentes avec b boules, de parfums distincts ou non, sans accompagnement ? Indication : on pourra se servir de gauffrettes pour séparer les parfums...