

CORRECTION DU DEVOIR MAISON 4

Exo 1. En procédant aux opérations $L_2 \leftarrow L_2 - mL_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - mL_1$, nous obtenons que

$$(S) \quad \begin{cases} x & -my & +m^2z & = 2m \\ mx & -m^2y & +mz & = 2m \\ mx & +y & -m^2z & = 1-m \end{cases} \iff \begin{cases} x & -my & +m^2z & = 2m \\ & (m-m^3)z & = 2m-2m^2 \\ (1+m^2)y & -(m^2+m^3)z & = 1-m-2m^2 \end{cases}$$

Comme $m-m^3 = m(1-m^2) = m(1-m)(1+m)$ et comme $2m-2m^2 = 2m(1-m)$, il résulte de la deuxième ligne que

- lorsque $m \notin \{-1, 0, 1\}$, le système admet une unique solution donnée par

$$\begin{cases} z = \frac{2m-2m^2}{m-m^3} = \frac{2}{1+m} \\ y = \frac{1-m-2m^2+(m^2+m^3)z}{1+m^2} = \frac{1-m-2m^2+2m^2}{1+m^2} = \frac{1-m}{1+m^2} \\ x = 2m + my - m^2z = 2m + m\frac{1-m}{1+m^2} - \frac{2m^2}{1+m} \end{cases}$$

- Le système S n'a pas de solution lorsque $m = -1$ (sur la ligne 2, on obtient $0 = -4$).
- Lorsque $m = 0$

$$(S) \quad \begin{cases} x & -my & +m^2z & = 2m \\ mx & -m^2y & +mz & = 2m \\ mx & +y & -m^2z & = 1-m \end{cases} \iff \begin{cases} x & = 0 \\ y & = 1 \end{cases}$$

A fortiori, (S) possède une infinité de solution de la forme $(0, 1, z)$ ($z \in \mathbb{R}$)

- Lorsque $m = 1$,

$$(S) \quad \begin{cases} x & -my & +m^2z & = 2m \\ mx & -m^2y & +mz & = 2m \\ mx & +y & -m^2z & = 1-m \end{cases} \iff \begin{cases} x & -y & +z & = 2 \\ 2y & -2z & = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x & = 2 \\ 2y & -2z & = -2 \end{cases}$$

En particulier, (S) possède une infinité de solution de la forme $(1, z-1, z)$ ($z \in \mathbb{R}$)

Exo 2. 1. Fixons $p \geq 0$.

Pour $n \geq p$, prouvons par récurrence la proposition $P_n : \sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$

2. • La proposition $\mathcal{P}_p$ est vraie car

$$\sum_{k=p}^p \binom{k}{p} = \binom{p}{p} = 1 = \binom{p+1}{p+1}$$

- Supposons $\mathcal{P}_n$ pour un entier $n \geq p$ et prouvons $\mathcal{P}_{n+1}$.
Il résulte de $\mathcal{P}_n$ et de la formule de Pascal que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=p}^{n+1} \binom{k}{p} &= \sum_{k=p}^n \binom{k}{p} + \binom{n+1}{p} && \text{D'abord, on se ramène au rang précédent} \\
&= \binom{n+1}{p} + \binom{n+1}{p+1} && \text{d'après } \mathcal{P}_n \\
&= \binom{n+2}{p+1} && \text{d'après la formule de Pascal}
\end{aligned}$$

En particulier, la proposition $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie

En conclusion, la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour $n \geq p$.

3. Comme $\binom{k}{1} = \frac{k!}{(k-1)!1!} = k$ ($k \geq 1$, Le résultat précédent pour $p = 1$ induit que

$$E_1(n) = \sum_{k=1}^n k = \sum_{k=1}^n \binom{k}{1} = \binom{n+1}{2} = \frac{(n+1)!}{(n-1)!2!} = \frac{n(n+1)}{2}$$

En particulier, on retrouve le résultat que l'on aurait trouvé en utilisant la somme des termes d'une suite arithmétique.

4. a. Pour $k \geq 2$, on remarque que $\binom{k}{2} = \frac{k(k-1)}{2}$ et $\binom{k}{1} = k$. A fortiori, pour $a = 2$ et $b = 1$, nous obtenons que

$$a \binom{k}{2} + b \binom{k}{1} = 2 \times \frac{k(k-1)}{2} + 1 \times k = k^2 \quad (k \geq 2)$$

- b. En procédant comme précédemment, nous remarquons que

$$\begin{aligned}
E_2(n) &= \sum_{k=1}^n k^2 = 1 + \sum_{k=2}^n k^2 \\
&= 1 + \sum_{k=2}^n \left(2 \times \binom{k}{2} + 1 \times \binom{k}{1} \right) \\
&= 2 \sum_{k=2}^n \binom{k}{2} + 1 + \sum_{k=2}^n \binom{k}{1} \\
&= 2 \binom{n+1}{3} + \sum_{k=1}^n \binom{k}{1} \\
&= 2 \binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2} \\
&= 2 \times \frac{(n-1)n(n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{n(n+1)}{6} \times (2(n-1) + 3) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}
\end{aligned}$$

5. a. • Constituer un cornet à b boules, sans accompagnement, revient à constituer une b -liste (avec répétitions possibles) dont les éléments sont choisis parmi les $s + g$ parfums. Il y en a $\binom{s+g}{1}^b = (s+g)^b$.
- Si l'on ajoute un unique accompagnement, il faut choisir un accompagnement parmi les quatre accompagnements possibles, il y en a $(s+g)^b \times \binom{4}{1} = 4(s+g)^b$

b.

- Constituer un cornet à b boules de parfums distincts revient à constituer une b -liste sans répétition dont les éléments sont choisis parmi les $s + g$ parfums. Il y en a A_{s+g}^b .
 - Pour choisir deux accompagnements, on en choisit 2 parmi les 4 possibles et on enlève le cas particulier napage chocolat et napage café (cela fait $\binom{4}{2} - 1 = \frac{4 \times 3}{2} - 1 = 5$ possibilités. La réponse est donc $5A_{s+g}^b$
- c.
- Pour compter ces cornets, on prend tous les cornets et on enlève ceux qui ne contiennent pas de sorbet. Il y en a donc $(s + g)^4 - g^4$
 - Pour compter ces cornets, on prend les cornets avec 4 boules de glaces (il y en a g^4) et on ajoute les cornets avec 3 boules de glace et 1 boule de sorbet (il y en a $\binom{4}{1}g^3s$ car il faut choisir la position d'apparition du sorbet). En tout, il y en a $g^4 + 4sg^3$.
- d.
- Il peut en servir $\binom{s+g}{b}$: On choisit b parfums parmi les $s + g$ possibles pour constituer une coupelle
 - Il peut en servir $\binom{g}{2} \times \binom{s}{1} \times 2$. On choisit 2 parfums de glace parmi g possibles, puis 1 parfum de sorbet parmi s possibles. Enfin, il n'y a que 2 façons possibles de choisir 3 accompagnements (tout sauf napage café ou tout sauf nappage chocolat)
 - Il peut lui servir une coupelle avec 2 boules et un accompagnement (il y en a $\binom{s+g}{2} \times \binom{4}{1}$) ou une coupelle avec une boule et 3 accompagnements (il y en a $\binom{s+g}{1} \times 2$). En tout, il y en a $\binom{s+g}{2} \times \binom{4}{1} + \binom{s+g}{1} \times 2$
 - Il y en a $A_c^3 \times \binom{4}{2} \times \binom{4}{2} \times \binom{4}{1} \times 2$. On commence par choisir la première catégorie, la seconde catégorie et la troisième catégorie (A_c^3 choix possibles) puis on choisit les parfums dans chaque catégorie dans l'ordre, puis les accompagnements
 - Il y a autant de coupelles possibles que de façon d'écrire un mot de $g + s + b - 1$ lettres avec b points et $g + s - 1$ barres : les points entre les barres représentent le nombre de boules choisies pour le parfum correspondant. Il suffit de choisir la position des b boules parmi ces $g + s + b - 1$ cases. En tout, il y en a $\binom{b+g+s-1}{b}$