DEVOIR MAISON 5

Exo 1. Dans cet exercice, on montre d'abord que $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[, \sin(x) \leqslant x \leqslant \tan(x)$
On améliore ensuite cet encadrement en prouvant que

$$\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[, \frac{3\sin(x)}{2+\cos(x)} \leqslant x \leqslant \frac{2\sin(x)+\tan(x)}{3}$$

1. On pose $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[, \varphi(x) = \sin(x) - x$ et $w(x) = \tan(x) - x$
   a. Montrer que φ est décroissante sur $[0, \frac{\pi}{2}[$. En déduire que $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[, \varphi(x) \leqslant 0$
   b. Montrer que w est monotone sur $[0, \frac{\pi}{2}[$.
   c. A l'aide de ce qui précède, montrer que $\forall x \in [0, \dfrac{\pi}{2}[, \sin(x) \leqslant x \leqslant \tan(x)$
2. A l'aide des formules d'Euler, montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \left(\sin \dfrac{x}{2}\right)^2 = \dfrac{1-\cos(x)}{2}$
   On admet qu'on montrerait de même que $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(x) = 2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}$
3. On pose $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[, f(x) = 2x + x\cos(x) - 3\sin(x)$
   a. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$
   b. Montrer à l'aide de 2) que $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[, f'(x) = 2\sin(x)\big(\tan\frac{x}{2} - \frac{x}{2}\big)$
   c. A l'aide de 1.c, déterminer le signe de $f'(x)$ pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$
   d. Montrer que $\forall x \in [0, \dfrac{\pi}{2}[, \dfrac{3\sin x}{2+\cos x} \leqslant x$.
4. On pose $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[, g(x) = 2\sin(x) + \tan(x) - 3x$
   a. On pose $\forall t \in \mathbb{R}, P(t) = 2t^2 - t - 1$. Déterminer, selon les valeurs du réel t, le signe de $P(t)$
   b. Montrer que $\forall x \in [0, \dfrac{\pi}{2}[, g'(x) = \dfrac{(\cos(x)-1)P(\cos x)}{(\cos x)^2}$
   c. A l'aide de ce qui précède, montrer que $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[, x \leqslant \frac{2\sin x + \tan x}{3}$
5. Montrer que $\forall x \in [0, \dfrac{\pi}{2}[, \tan(x) \geqslant \dfrac{2\sin(x)+\tan(x)}{3}$ et $\sin(x) \leqslant \dfrac{3\sin(x)}{2+\cos(x)}$
   L'encadrement obtenu à l'aide de 4.c) et 3.d) est alors meilleur que celui obtenu en 1.c)

Exo 2. Une puce évolue sur trois cases A, B et C. A l'instant $t = 0$, la puce se situe sur la case A puis elle se déplace de façon aléatoire selon la règle suivante :

- Si la puce se trouve en A ou en B à l'instant $k \in \mathbb{N}$, alors elle ira sur l'une des deux autres cases avec équiprobabilité à l'instant $k+1$.
- Si la puce se trouve en C à l'instant $k \in \mathbb{N}$, alors elle y restera à l'instant $k+1$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit les événement suivants :

- A_n : « La puce se trouve en A à l'instant n »,
- B_n : « La puce se trouve en B à l'instant n »,
- C_n : « La puce se trouve en C à l'instant n »

et on pose $a_n = P(A_n)$, $b_n = P(B_n)$ et $c_n = P(C_n)$.

1. Exprimer chaque quantité a_{n+1} , b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n , b_n et c_n.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = a_n + b_n$ et $v_n = a_n - b_n$.
   a. Montrer que (u_n) est une suite géométrique et en déduire la valeur de c_n en fonction de n.
   b. A l'aide de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ déterminer les valeurs de a_n et b_n en fonction de n.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Sachant que la puce est en C à l'instant $n+1$, calculer la probabilité qu'elle y ait été pour la première fois à l'instant n.

Exo 3. Calculs dans l'espace $\mathbb{K}^n$

On considère l'espace vectoriel $E := \mathbb{R}^4$ et les vecteurs $a := (2,-1,1,0)$, $b := (-1,2,-2,1)$, $c := (-2,2,-3,1)$, $d := (1,4,-2,2)$ et $e := (8,2,5,1)$.

1. Étudier si la famille (c,d,e) est libre. Si ce n'est pas le cas, donner une relation de dépendance linéaire entre ses vecteurs.
2. Montrer que la famille (a,b,c,d) est une base de E.
3. Déterminer les coordonnées des vecteurs c, d et e dans la base (a,b,c,d).
4. Démontrer que $G := \big\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x - z - t = 0 \text{ et } y - 2t = 0\big\}$ est un sous-espace vectoriel de E. En donner une base.
5. Démontrer que $c \in G$. Donner une base de G comportant c.
6. Déterminer, suivant les valeurs du réel m, si les vecteurs $u_m := (-2m,2m,0,0)$ et $v_m := (m+6,-4,m+2,0)$ forment une famille libre ou liée.
7. Les vecteurs u_m et v_m forment-ils une base de G ?
8. Donner les équations cartésiennes vérifiées par les vecteurs (x,y,z,t) qui sont dans $F := \mathrm{Vect}(c,d)$.
9. Déterminer une base de $F \cap G$.